Бинарные отношения

Старший преподаватель кафедры ИиИт

Виноградова Марина Николаевна

1.2. Бинарные отношения

1.2.1. Декартово произведение множеств

Декартовым произведением $X \times Y$ двух множеств X и Y называется множество всех упорядоченных пар (x,y) таких, что $x \in X$, а $y \in Y$.

Пример 1. Пусть $X = \{1,2\}, Y = \{-1,0,1\}$. Тогда

$$X \times Y = \left\{ (1,-1), (1,0), (1,1) (2,-1), (2,0), (2,1) \right\},$$

Очевидно, что $X \times Y \neq Y \times X$, т.е. для операции декартова произведения множеств закон коммутативности не выполняется.

Наглядно декартово произведение множеств можно представить в виде графика. На рис. 1.7 звездочками отмечены элементы множества $X \times Y = \{1,2,3\} \times \{2,4\}$.

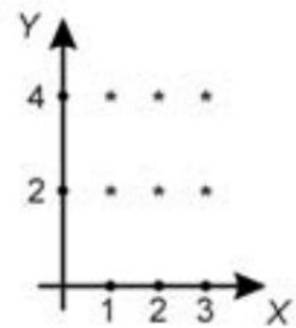


Рис. 1.7. График декартова произведения X x Y

Декартовым произведением множеств $X_1, X_2, \ldots, X_n$ будем называть множество $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ всех упорядоченных наборов $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ таких, что $x_i \in X_i$, $i = 1,2, \ldots, n$.

1.2.2. Определение бинарного отношения

Пусть среди трех людей (назовем их Андрей, Василий и Сергей) двое знакомы друг с другом (Андрей и Василий) и знают третьего (Сергея), но тот их не знает. Как описать отношения между этими людьми? Имеем множество $X=\{A.B,C\}$, из элементов которого составлены упорядоченные пары: (A,B), (B,A), (A,C), (B,C), т.е. выделено некоторое подмножество декартова произведения $X \times X$. Это подмножество и описывает связи между элементами множества X.

Определение. Говорят, что на множестве X задано бинарное отношение R, если задано подмножество декартова произведения $X \times X$ (т.е. $R \subseteq X \times X$).

Пример 2. Пусть $X = \{1,2,3,4\}$. Зададим на X следующие отношения:

$T = \{(x, y) |\ x, y \in X, x = y\}$ – отношение равенства;

$P = \{(x, y) |\ x, y \in X, x = y - 1\}$ – отношение предшествования;

$Q = \{(x, y) |\ x, y \in X, x$ делится на $y\}$ – отношение делимости.

Все эти отношения заданы с помощью характеристического свойства. Ниже перечислены элементы этих отношений:

$$T = \left\{ (1,1), (2,2), (3,3), (4,4) \right\};$$

$$P = \left\{ (1,2), (2,3), (3,4) \right\};$$

$$Q = \left\{ (4,4), (4,2), (4,1), (3,3), (3,1), (2,2), (2,1), (1,1) \right\}.$$

Тот факт, что пара (x, y) принадлежит данному отношению R, будем записывать: $(x, y) \in R$ или xRy. Например, для отношения Q запись $4Q2$ означает, что 4 делится на 2 нацело, т.е. $(4,2) \in Q$.

Областью определения D_R бинарного отношения R называется множество $D_R = \{x \mid (x, y) \in R\}$.

Областью значений E_R называется множество $E_R = \{y \mid (x, y) \in R\}$.

Так, для отношения P из примера 2 областью определения является множество $D_P = \{1,2,3\}$, а областью значений – $E_P = \{2,3,4\}$.

1.2.3. Способы задания бинарного отношения

Бинарное отношение можно задать, указав характеристическое свойство или перечислив все его элементы. Существуют и более наглядные способы задания бинарного отношения: график отношения, схема отношения, граф отношения, матрица отношения.

График отношения изображается в декартовой системе координат; на горизонтальной оси отмечается область определения, на вертикальной – область значений отношения; элементу отношения (x,y) соответствует точка плоскости с этими координатами. На рис. 1.8, *а* приведен график отношения Q примера 2.

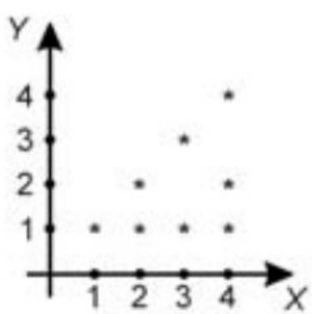
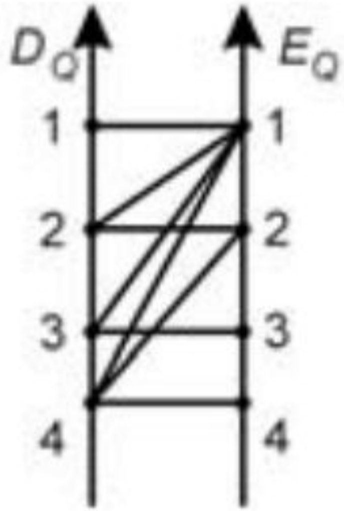
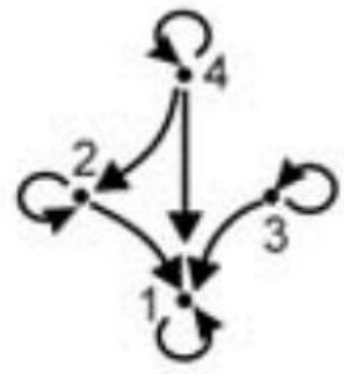


Схема отношения изображается с помощью двух вертикальных прямых, левая из которых соответствует области определения отношения, а правая – множеству значений отношения. Если элемент (x,y) принадлежит отношению R, то соответствующие точки из D_R и E_R соединяются прямой. На рис. 1.8, *б* приведена схема отношения Q из примера 2.





а

Граф отношения $R \subseteq X \times X$ строится следующим образом. На плоскости в произвольном порядке изображаются точки – элементы множества X. Пара точек x и y соединяется дугой (линией со стрелкой) тогда и только тогда, когда пара (x,y) принадлежит отношению R. На рис. 1.9, *а* приведен граф отношения Q примера 2.

Матрица отношения $R \subseteq X \times X$ – это квадратная таблица, каждая строка и столбец которой соответствует некоторому элементу множества X. На пересечении строки x и столбца y ставится 1, если пара $(x, y) \in R$; все остальные элементы матрицы заполняются нулями. Элементы матрицы нумеруются двумя индексами, первый равен номеру строки, второй - номеру столбца. Пусть $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Тогда матрица отношения $R \subseteq X \times X$ имеет n строк и n столбцов, а ее элемент r_{ij} определяется по правилу:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{если} \ (x_i, y_j) \in R, \\ 0, & \textit{если} \ (x_i, y_j) \notin R, \quad i, j = 1,2,...,n. \end{cases}$$

$$\begin{array}{c c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

б

На рис.1.9, *б* приведена матрица отношения Q примера 2.

1.2.4. Свойства бинарных отношений

Бинарные отношения делятся на типы в зависимости от свойств, которыми они обладают. Рассмотрим следующие отношения на множестве $X = \{1,2,3,4,5,6,7\}$:

$$G = \{(x, y) |\ x, y \in X, x > y\};$$

$$L = \{(x, y) |\ x, y \in X, x \le y\};$$

$$M = \{(x, y) |\ x, y \in X, (x - y) \text{ делится на } 3\};$$

$$K = \{(x, y) |\ x, y \in X, x^2 + y^2 \le 20\}.$$

Отношение R на множестве X называется ***рефлексивным,*** если для всех $x \in X$ выполняется условие $(x, x) \in R$. Среди приведенных выше отношений рефлексивными являются отношение L (т.к. неравенство $x \le x$ справедливо при всех $x \in X$) и отношение M (т.к. разность $x - x = 0$ делится на 3, значит, пара (x, x) принадлежит отношению M при всех $x \in X$).

Отношение R на множестве X называется ***антирефлексивным***, если условие $(x, x) \in R$ не выполняется ни при одном $x \in X$. Примером антирефлексивного отношения является отношение G (неравенство $x > x$ не выполняется ни при каких значениях x, следовательно, ни одна пара (x, x) не принадлежит отношению G). Отметим, что отношение K не является рефлексивным $(5^2 + 5^2 > 20 \Rightarrow (5{,}5) \notin K)$ и не является антирефлексивным $(1^2 + 1^2 \le 20 \Rightarrow (1{,}1) \in K)$.

Отношение R на множестве X называется ***симметричным***, если из условия $(x, y) \in R$ следует $(y, x) \in R$. Симметричными являются отношения M (если $x - y$ делится на 3, то и $y - x$ делится на 3) и K (если $x^2 + y^2 \le 20$, то и $y^2 + x^2 \le 20$).

Отношение R на множестве X называется ***несимметричным***, если для любых $x, y \in X$ из условия $(x, y) \in R$ следует $(y, x) \notin R$. Несимметричным является отношение G, т.к. условия $x < y$ и $y < x$ не могут выполняться одновременно (только одна из пар (x, y) или (y, x) принадлежит отношению G).

Отношение R на множестве X называется ***антисимметричным***, если для любых $x, y \in X$ из условия $(x, y) \in R$ и $(y, x) \in R$ следует $x = y$. Антисимметричным является отношение L, т.к. из одновременного выполнения $x \le y$ и $y \le x$ следует $x = y$.

Отношение R на множестве X называется ***транзитивным***, если для любых $x, y, z \in R$ из одновременного выполнения условий $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R$ следует $(x, z) \in R$. Отношения G, L, M являются транзитивными, а отношение K нетранзитивно: если $x = 3, y = 2, z = 4,$ то $3^2 + 2^2 \le 20$ и $2^2 + 4^2 \le 20$, но $3^2 + 4^2 \ge 20$, то есть выполняются условия $(x, y) \in K$ и $(y, z) \in K$, но $(x, z) \notin K$.

1.2.5. Отношения эквивалентности

Определение. Отношение R на множестве X называется отношением ***эквивалентности,*** если оно обладает свойствами рефлексивности, симметрич-

Определение. ***Классом эквивалентности***, порожденным элементом $x \in X$, называется подмножество $[x]$ множества X, для элементов которого выполняется условие $(x, y) \in R, y \in X$. Таким образом, класс эквивалентности $[x] = \{y \mid y \in X, (x, y) \in R\}$.

Так, отношение M разбивает множество $X = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ на три класса эквивалентности: $[1] = \{1,4,7\}$, $[2] = \{2,5\}$, $[3] = \{3,6\}$. Класс, порожденный элементом 4, совпадает с классом [1]; [5] = [2], [3] = [6], [7] = [1].

Классы эквивалентности образуют систему непустых непересекающихся подмножеств множества X, в объединении дающую все множество X – т.е. образуют разбиение множества X (см. 1.1.6).

Отношение эквивалентности обозначают " ≡ ", поэтому определение класса эквивалентности можно записать так: $[x] = \{y \mid y \in X, x \equiv y\}$.

1.2.6. Отношения порядка

Определение. Отношение R на множестве X, обладающее свойствами рефлексивности, антисимметричности, транзитивности, называется отношением ***порядка*** на множестве X (обозначается "$\preceq$").

Определение. Отношение R на множестве X, обладающее свойствами антирефлексивности, несимметричности, транзитивности, называется отношением ***строгого порядка***.

1.2.7. Решение задачи 4 контрольной работы № 1

Задача. На множестве $X = \{1,2,3,4,5\}$ задано бинарное отношение $R \subseteq X \times X : R = \{(x,y) \mid x, y \in X, (x+2y) \text{ делится на } 3\}$. Представить отношение R различными способами; выяснить, какими свойствами оно обладает; является ли отношение R отношением эквивалентности или отношением порядка.

Решение. Отношение R можно задать перечислением всех элементов:

$$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,4),(4,1),(5,2),(2,5)\}.$$

Наглядно представить отношение R можно с помощью графика (рис. 1.10, *а*), схемы (рис. 1.10, *б*), графа (рис. 1.11, *а*), матрицы отношения (рис. 1.11, *б*).

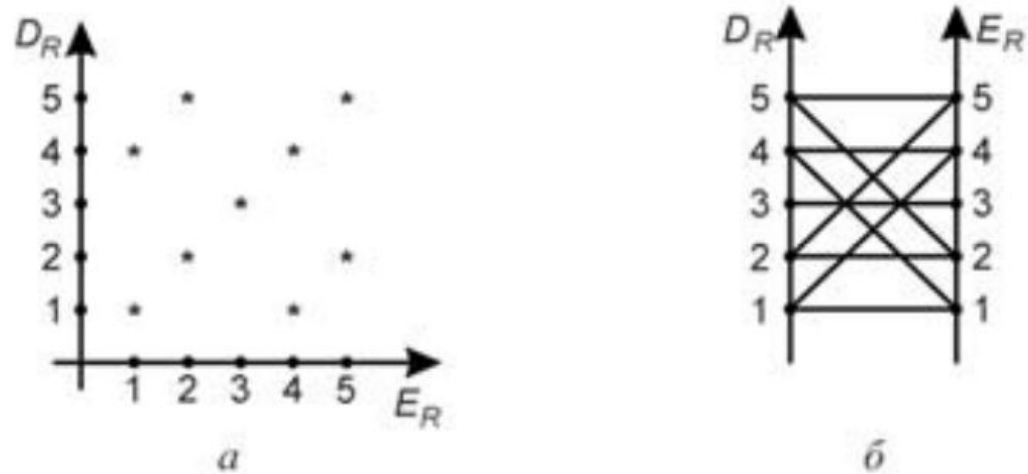
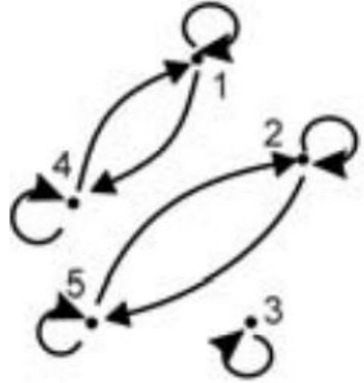


Рис. 1.10. График (*а*) и схема (*б*) отношения R



а

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} &
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

б

Рис. 1.11. График (*а*) и схема (*б*) отношения R

Выясним, какими свойствами обладает отношение.

Покажем, что отношение рефлексивно. При $x = y$ условие “$x + 2y$ делится на 3” принимает вид $x + 2x = 3x$ – делится на 3 (выполняется при любых значениях $x \in X$).

Проверим, является ли отношение симметричным. Пусть $x + 2y$ делится на 3 (т.е. $(x, y) \in R$). Составим пару (y, x) и для нее проверим характеристическое свойство отношения:

$$y + 2x = y + 2x + (x + 2y) - (x + 2y) = 3y + 3x - (x + 2y) =$$

$$= 3(y + x) - (x + 2y).$$

Очевидно, что $3(y + x)$ делится на 3, а $x + 2y$ делится на 3 по условию, следовательно, $y + 2x$ делится на 3, т.е. $(y, x) \in R$. Отношение симметрично.

Проверим, является ли отношение транзитивным. Пусть $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R$, т.е. $x + 2y$ делится на 3 и $y + 2z$ делится на 3. Будет ли делиться на 3 выражение $x + 2z$, т.е. будет ли $(x, z) \in R$? Преобразуем $x + 2z =$ $= x + 3y + 2z - 3y = x + 2y + y + 2z - 3y = (x + 2y) + (y + 2z) - 3y$ делится на 3, т.к. первые два слагаемых делятся на 3 по условию и третье слагаемое $(-3y)$ делится на 3. Значит $(x, z) \in R$, и отношение транзитивно. Свойства данного отношения перечислены в таблице 1.4.

Таблица 1.4

Свойства отношения R

Отношение	Р	АР	С	АС	НС	Т
R	+	-	+	-	-	+

Отношение R обладает свойствами рефлексивности, симметричности, транзитивности, следовательно, является отношением эквивалентности. На графе отношения R (рис. 1.11, а) хорошо видны классы эквивалентности – это подмножества {1,4}, {2,5}, {3} множества X.