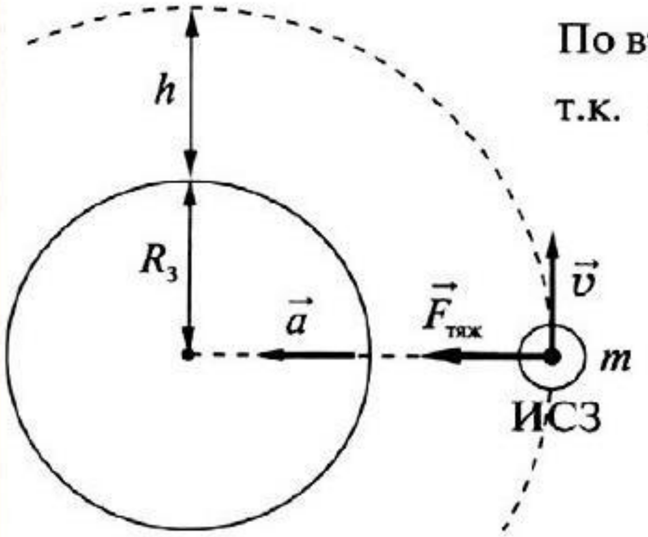
Искусственные спутники Земли

Решение задач

Краткая теория

ИСКУССТВЕННЫЕ СПУТНИКИ ЗЕМЛИ (ИСЗ)



По второму закону Ньютона: $ma = F_{тяж}$

т.к. $a = \dfrac{v^2}{R_з+h}$ $\qquad F_{тяж} = G\dfrac{M_з m}{(R_з+h)^2}$

$$\frac{mv^2}{R_з+h} = G\frac{M_з m}{(R_з+h)^2}$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{GM_з}{R_з+h}}}$$

Если $h \to 0$, то $v = \sqrt{\dfrac{GM_з}{R_з}}$

$$v_1 \approx 8\ \text{км/с}$$

Первая космическая скорость (круговая) – *скорость, которую необходимо сообщить телу у поверхности планеты, чтобы оно стало ее спутником, движущимся по круговой орбите.*

Вторая космическая скорость (11,2 км/с) – тело преодолевает притяжение Земли и уходит в космическое пространство.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Первый искусственный спутник Земли, запущенный в СССР 4 октября 1957 года, двигался на высоте 950 км над поверхностью Земли. Вычислите скорость этого спутника.

Дано:	СИ	Решение:
$h = 950$ км	$0{,}95 \cdot 10^6$ м	$v = \sqrt{\dfrac{GM_з}{R_з + h}}$
$R = 6400$ км	$6{,}4 \cdot 10^6$ м	$v = \sqrt{\dfrac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{(0{,}95 + 6{,}4) \cdot 10^6}} \approx 7{,}3 \cdot 10^3$ (м/с) $=$
$M_з = 6 \cdot 10^{24}$ кг		$= 7{,}3$ (км/с)
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$		
$v - ?$		*Ответ:* 7,3 км/с

Скорость обращения Земли вокруг Солнца 30 км/с, радиус земной орбиты $1{,}5 \cdot 10^{11}$ м. По этим данным определите массу Солнца.

Дано:

$v = 30$ км/с $= 30000$ м/с $= 3 \cdot 10^4$ м/с,

$R = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ м;

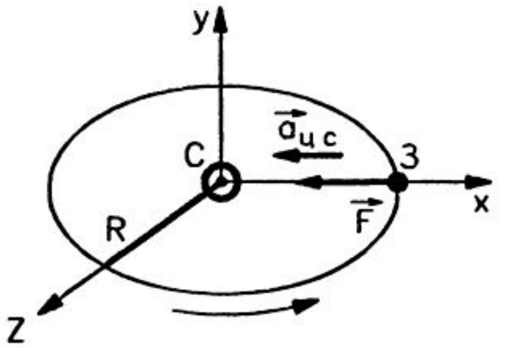
$G = 6{,}67 \cdot 10^{\ 11}$ Н $\cdot$ м^2/кг^2,

Найти:

$M_с$ — ?

Решение:

Данное движение рассматривается в трехмерной системе координат *xyz*.



Начало координат совместим с центром Солнца, ось *x* направим по радиусу земной орбиты. Сила взаимодействия Земли и Солнца направлена к центру окружности по радиусу. Это и есть сила всемирного тяготения между телами.

Согласно второму закону Ньютона: $\vec{F} = m\vec{a}_{цс}$.

В проекции на ось *x*: $-F = -ma_{цс}$ или $F = ma_{цс}$

Так как $F = G\dfrac{M_с \cdot M_з}{R^2}$, $a_{цс} = \dfrac{v^2}{R}$, то $G\dfrac{M_с \cdot M_з}{R^2} = \dfrac{M_з \cdot v^2}{R}$, где

$M_с$ — масса Солнца, $M_з$ — масса Земли.

Следовательно, масса Солнца:

$$M_с = \frac{v^2 \cdot R}{G}; \quad M_с = \left[\frac{м^2 \cdot м \cdot кг^2}{с^2 \cdot Н \cdot м^2} = \frac{м \cdot кг^2 \cdot с^2}{кг \quad м \cdot с^2} = кг\right].$$

Вычислим:

$$M_с = \frac{(3 \cdot 10^4)^2 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{11}}{6{,}67 \cdot 10^{-11}} = \frac{3^2 \cdot 1{,}5}{6{,}67} \cdot 10^{8+11-(-11)} \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ кг}.$$

Ответ: Масса Солнца $\approx 2 \cdot 10^{30}$ кг.

Вычислить первую космическую скорость для Луны, принимая радиус Луны 1700 км, а ускорение свободного падения тел на Луне — 1,6 м/с^2.

Дано:

$R = 1700$ км $= 1{,}7 \cdot 10^6$ м,

$g = 1{,}6$ м/с^2

Найти:

v_1 — ?

Решение:

Первую космическую скорость для Луны можно определить по формуле:

$$v_1 = \sqrt{G\frac{M}{R}}.$$

Но ускорение свободного падения тел на Луне:

$$g = G\frac{M}{R^2}.$$

Тогда преобразуем формулу скорости таким образом: умножим и разделим одновременно на радиус орбиты R.

Получим:

$$v_1 = \sqrt{G \cdot \frac{M}{R} \cdot \frac{R}{R}} = \sqrt{G \cdot \frac{M}{R^2} \cdot R}.$$

Откуда $v_1 = \sqrt{gR}$; $v_1 = \left[\sqrt{\frac{м}{с^2} \cdot м} = \frac{м}{с}\right]$

$$v_1 = \sqrt{1{,}6 \cdot 1{,}7 \cdot 10^6} \approx 1{,}65 \cdot 10^3 \text{ м/с} = 1{,}65 \text{ км/с}$$

Ответ: $v_1 \approx 1{,}65$ км/с.

Какую скорость должен иметь искусственный спутник, чтобы обращаться по круговой орбите на высоте 900 км над поверхностью Земли? Каков период его обращения?

Дано:

$h = 900$ км $= 9 \cdot 10^5$ м $= 0{,}9 \cdot 10^6$ м;

$M_з = 6 \cdot 10^{24}$ кг;

$R_з = 6400$ км $= 6{,}4 \cdot 10^6$ км;

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н $\cdot$ м^2/кг^2

Найти:

v — ?

T — ?

Решение:

На спутник действует сила притяжения Земли, под действием которой он обращается по круговой орбите с центростремительным ускорением. Векторы силы и ускорения направлены к центру окружности по радиусу. Спутник находится на высоте h над Землей, поэтому радиус орбиты можно определить как $R = R_з + h$.

Согласно второму закону Ньютона

$F = ma_{цс}$, где $a_{цс} = \frac{v^2}{R}$.

По закону всемирного тяготения: $F = G\frac{M_з \cdot m}{(R_з + h)^2}$.

Следовательно, $G\frac{M_з \cdot m}{(R_з + h)^2} = \frac{mv^2}{R_з + h}$.

Отсюда:

$$v = \sqrt{G\frac{M_з}{R_з + h}};\ v = \left[\sqrt{\frac{кг \cdot м \cdot м^2 \cdot кг}{с^2 \cdot кг^2 \cdot (м + м)}} = \sqrt{\frac{м^2}{с^2}} = \frac{м}{с}\right]$$

$$v = \sqrt{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24}}{6{,}4 \cdot 10^6 + 0{,}9 \cdot 10^6}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 6}{7{,}3} \cdot 10^7} \approx$$

$$\approx \sqrt{54{,}8 \cdot 10^6} \approx 7{,}4 \cdot 10^3 \text{ м/с}.$$

Период обращения спутника (время одного полного оборота)

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi\,(R_з + h)}{v}$$

$$T = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot (6{,}4 \cdot 10^6 + 0{,}9 \cdot 10^6)}{7{,}4 \cdot 10^3} \approx 6{,}195 \cdot 10^3 \text{ с} = 6195 \text{ с} \approx 103 \text{ мин} \approx 1{,}72 \text{ ч}.$$

Ответ: $v \approx 7{,}4$ км/с; $T = 103$ мин $\approx 1{,}72$ ч.

На какой высоте над поверхностью Земли был запущен искусственный спутник, если он движется со скоростью 7,1 км/с?

Дано:

$v = 7{,}1$ км/с $= 7{,}1 \cdot 10^3$ м/с;
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н · м²/кг²;
$M_з = 6 \cdot 10^{24}$ кг;
$R_з = 6400$ км $= 6{,}4 \cdot 10^6$ м

Найти:

h — ?

Решение:

Скорость движения спутника называют первой космической скоростью, которая вычисляется по формуле:

$$v = \sqrt{G\frac{M_з}{R_з + h}}.$$

Выразим из этой формулы высоту над поверхностью Земли h:

$$v^2 = G\frac{M_з}{R_з + h} \Rightarrow R_з + h = \frac{GM_з}{v^2}.$$

Отсюда:

$$h = \frac{GM_з}{v^2} - R_з; \; h = \left[\frac{Н \cdot м^2 \cdot кг}{кг^2 \cdot м^2/с^2} - м = \frac{кг \cdot м \cdot с^2}{с^2 \cdot кг} - м = м\right]$$

$$h = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{7{,}1^2 \cdot 10^6} \approx 1{,}5 \cdot 10^6 \text{ м} = 1500 \text{ км}.$$

Ответ: $h \approx 1500$ км.

Высота спутника над поверхностью Земли h = 2000 км. Определите его скорость и период обращения.

Решение. Движение по круговой орбите происходит под действием только силы тяготения со стороны Земли: $F = G\dfrac{M_з m_с}{(R_з + h)^2}$. Запишем для спутника второй закон Ньютона $F = ma_ц = m\dfrac{v^2}{R_з + h}$. С учетом этого, получаем: $G\dfrac{M_з m}{(R_з + h)^2} = m\dfrac{v^2}{R_з + h}$, откуда $v^2 = G\dfrac{M_з}{R_з + h}$. Умножая числитель и знаменатель правой части последнего уравнения на R^2, получаем: $v^2 = G\dfrac{M_з}{R_з^2}\dfrac{R_з^2}{R_з + h} = g_0\dfrac{R_з^2}{R_з + h}$, где $g_0 = G\dfrac{M_з}{R_з^2}$ — ускорение свободного падения у поверхности Земли. Следовательно, $v = R_з\sqrt{\dfrac{g_0}{R_з + h}} \approx 6{,}7$ (км/с).

Период обращения спутника по круговой орбите радиусом $R_з + h$ находим по формуле $T = \dfrac{2\pi(R_з + h)}{v}$. Отсюда получаем $T \approx 7{,}9 \cdot 10^3$ с.

Решить самостоятельно

Вычислите первую космическую скорость для Земли, если ее сообщают телу на высоте, равной двум радиусам Земли от ее поверхности, если высота равна пяти радиусам Земли.

Ускорение свободного падения на Луне равно 1,7 м/с^2. Найдите первую космическую скорость для Луны, если ее радиус равен 1,7 · 10^6 м.

Ускорение свободного падения на Венере составляет 0,9 земного, а радиус Венеры равен 0,95RЗ. Найдите первую космическую скорость у поверхности Венеры.