ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Теорема Ферма

Если дифференцируемая на промежутке X функция y=f(x) достигает наибольшего или наименьшего значения во внутренней точке x_0 этого промежутка, то производная функции в этой точке равна 0:

$$\boxed{f'(x_0) = 0}$$

Переходим в этих неравенствах соответственно к пределу справа и слева:

$$\lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0 \qquad \text{и} \qquad \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$$

По условию функция *y=f(x)* дифференцируема в точке x_0, следовательно ее предел при $\Delta x \to 0$ **не должен зависеть от способа стремления *Δx* к нулю, т.е.**

$$\lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0 \Rightarrow \boxed{f'(x_0) = 0}$$

Геометрический смысл теоремы Ферма

В точке наибольшего или наименьшего значения, достигаемого внутри промежутка
X, касательная к графику функции параллельна оси X.

Теорема Ролля

Пусть функция y=f(x) удовлетворяет следующим условиям:

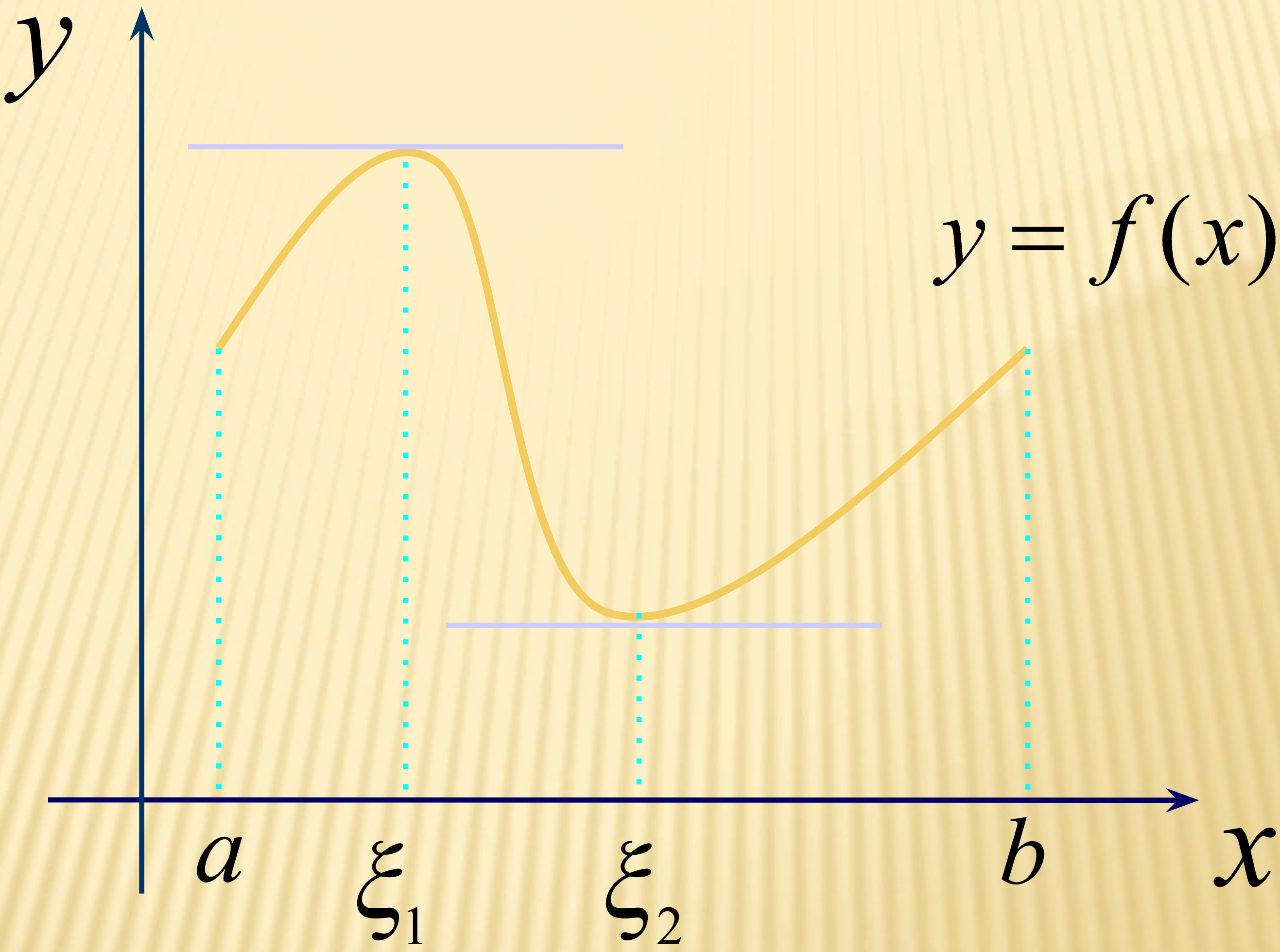
1. **Непрерывна на отрезке [a,b].**
2. **Дифференцируема на интервале (a,b).**
3. **На концах отрезка принимает равные значения: f(a)=f(b).**

Тогда внутри отрезка существует по крайней мере одна такая точка ξ, в которой производная равна нулю:

$$\boxed{f'(\xi) = 0}$$

Геометрический смысл теоремы Ролля

Найдется хотя бы одна точка, в которой касательная к графику функции параллельна оси X, в этой точке производная функции будет равна нулю.



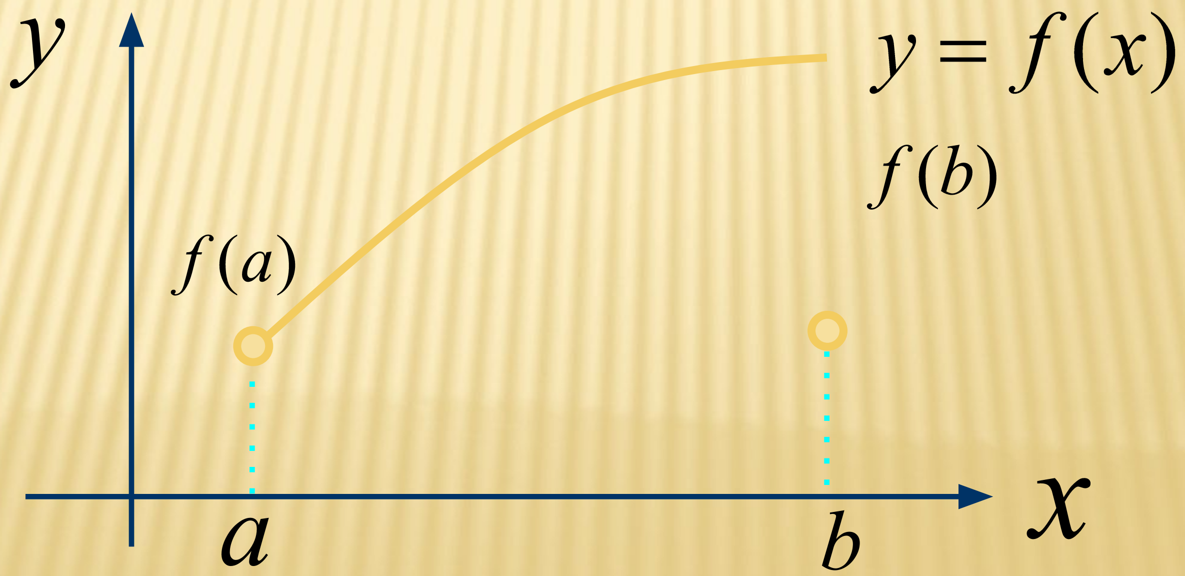
y
y = f(x)
a
ξ1
ξ2
b
x

Если же хотя бы одно условие теоремы Ролля нарушено, то заключение теоремы может быть неверным.

Например:

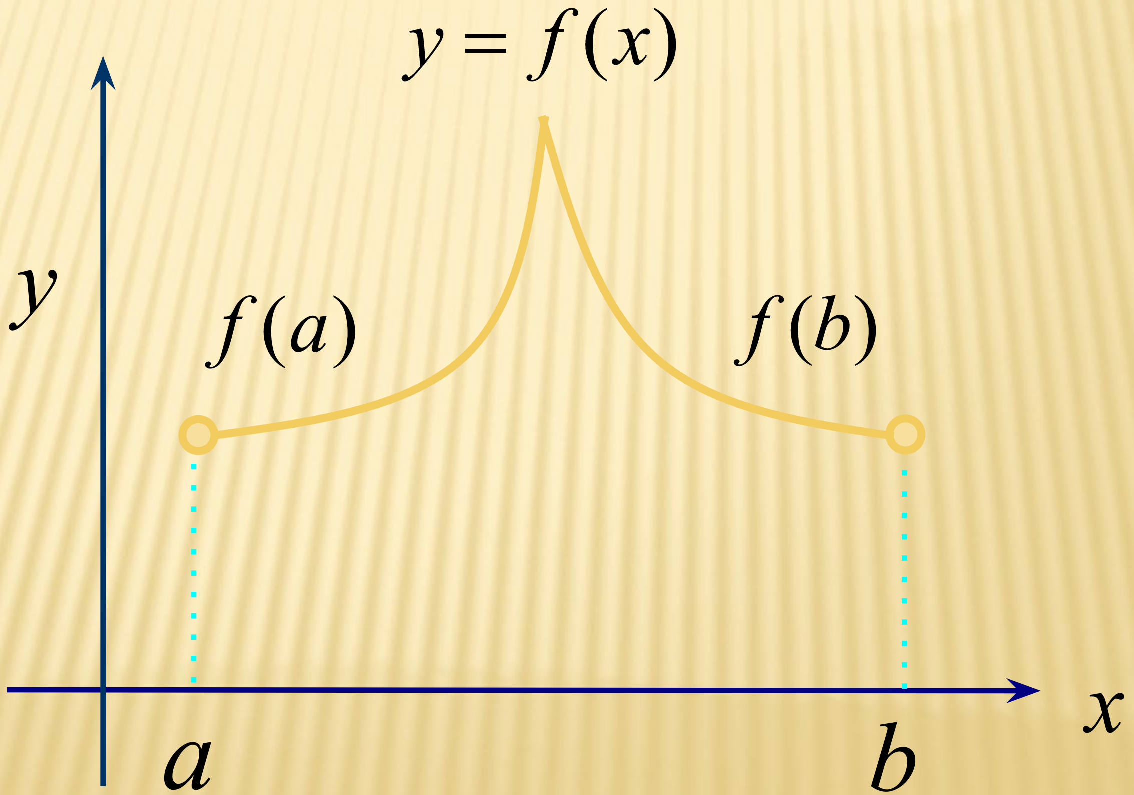
1

Отсутствует непрерывность на [a,b].



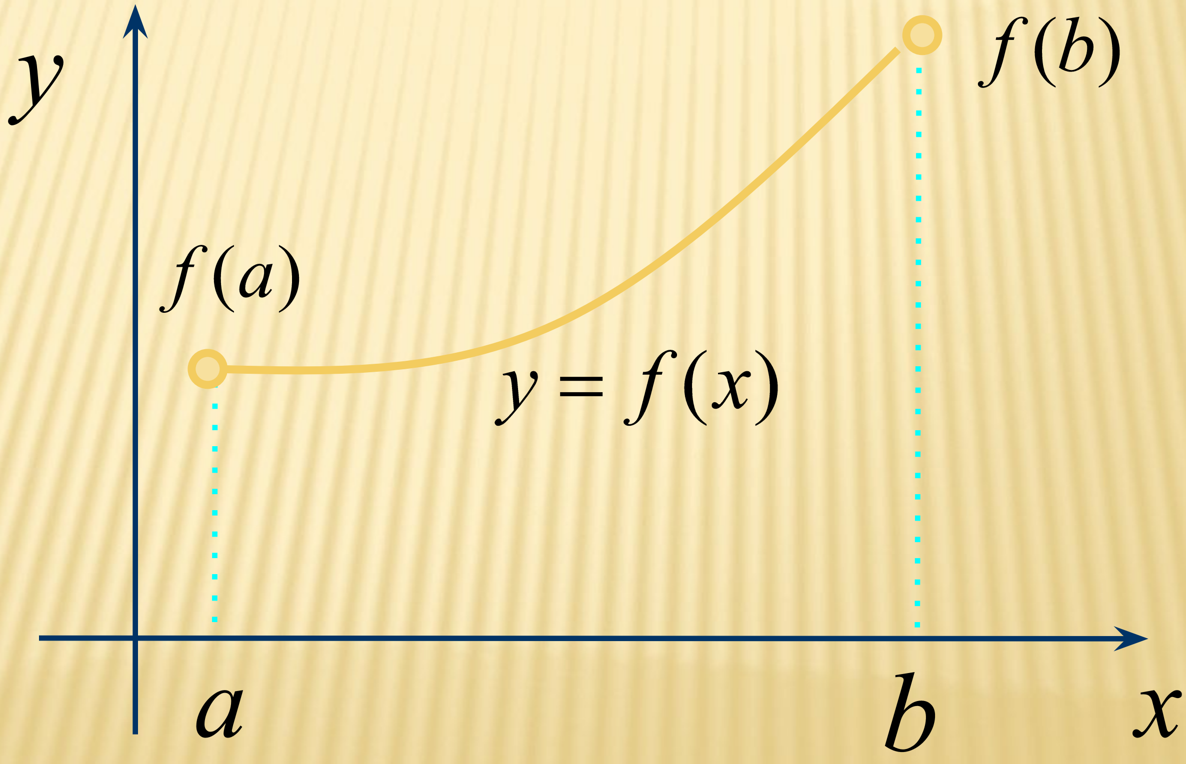
2

Отсутствует дифференцируемость на (a,b).



3

$$f(a) \neq f(b)$$



Теорема Лагранжа

Пусть функция y=f(x) удовлетворяет следующим условиям:

1. ***Непрерывна на отрезке [a,b].***
2. ***Дифференцируема на интервале (a,b).***

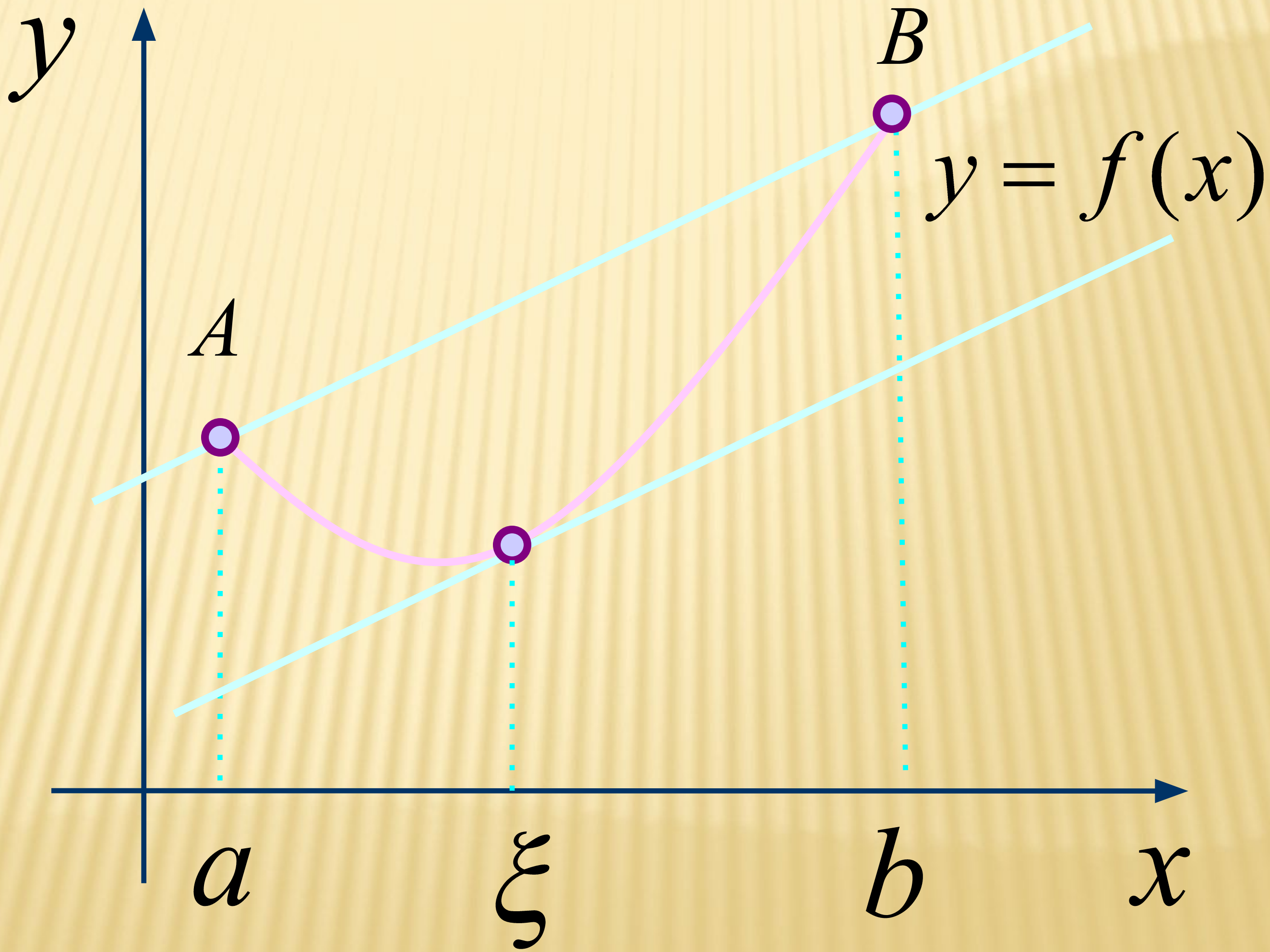
Тогда внутри отрезка существует по крайней мере одна такая точка ξ, в которой производная функции равна частному от деления приращения функции на приращение аргумента на этом отрезке:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Эту теорему часто записывают в виде:

$$f'(\xi)\cdot(b-a)=f(b)-f(a)$$

Геометрический смысл теоремы Лагранжа



Если перемещать прямую АВ параллельно начальному положению, то найдется хотя бы одна точка

$$\xi \in (a,b)$$

в которой касательная к графику функции y=f(x) и хорда АВ, проведенная через концы дуги АВ будут параллельны.

Следствие.

Если производная функции $y=f(x)$ равна 0 на некотором промежутке X, то эта функция постоянна на всем промежутке.

ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ ФУНКЦИЙ

ТЕОРЕМА 1.

(достаточное условие) возрастания функции)

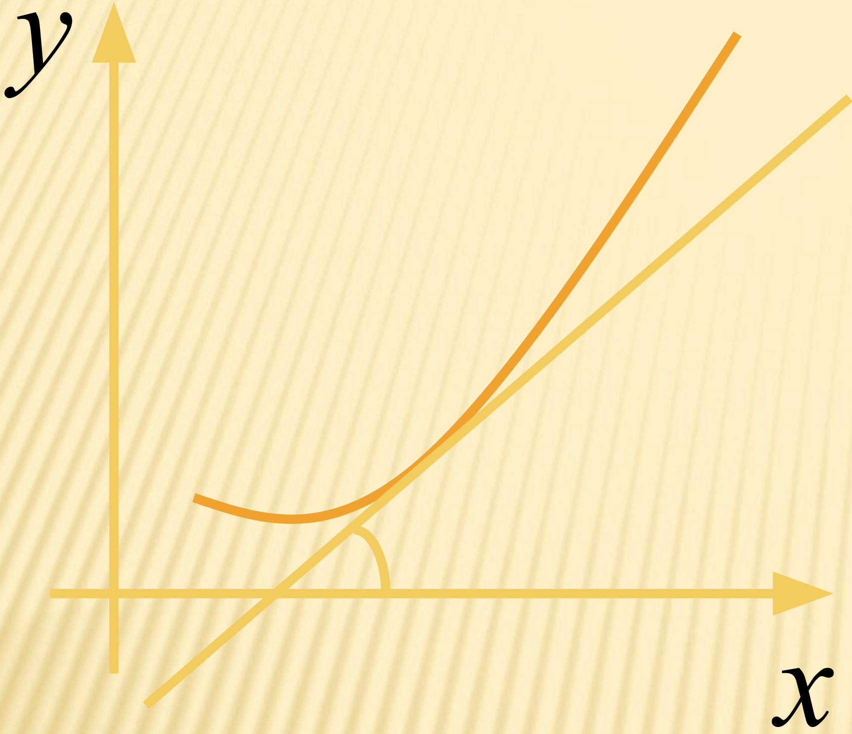
Если производная дифференцируемой функции положительна внутри некоторого промежутка Х, то функция возрастает на этом промежутке.

ТЕОРЕМА 2.
(достаточное условие убывания функции)

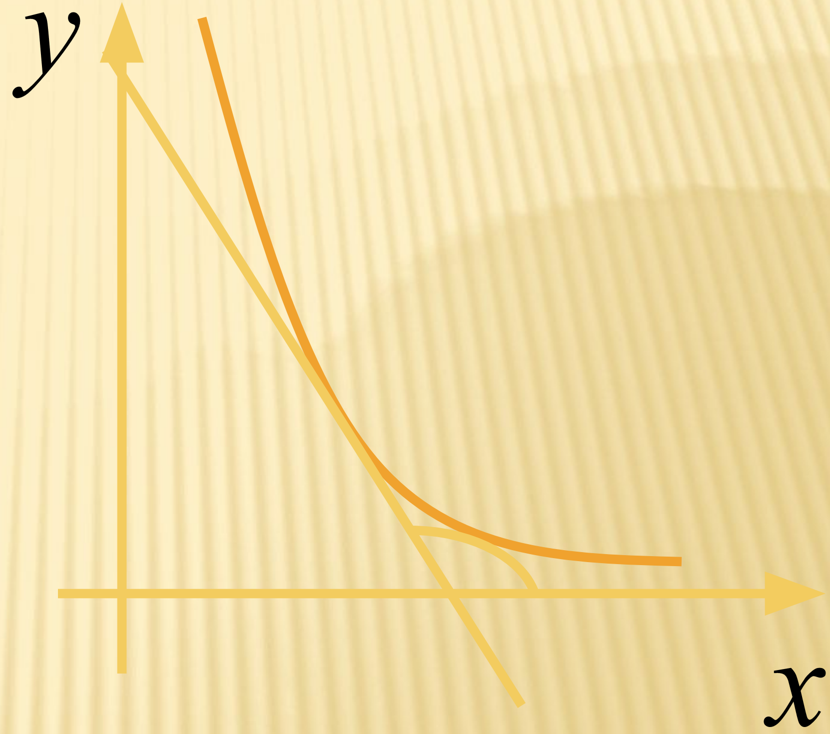
Если производная дифференцируемой функции отрицательна внутри некоторого промежутка Х, то она убывает на этом промежутке.

Геометрическая интерпретация

Если касательные к кривой на некотором промежутке направлены под острыми углами к оси х, то функция возрастает. если они направлены под тупыми углами, то функция убывает.



Функция возрастает



Функция убывает

Пример.

Найти интервалы монотонности функции

$$y = x^2 - 4x + 3$$

Решение:

Найдем производную этой функции:

$$y' = (x^2 - 4x + 3)' = 2x - 4$$

Исследуем знак этой производной:

$$y' = 2x - 4 > 0 \quad при \quad x > 2$$

$$y' = 2x - 4 < 0 \quad при \quad x < 2$$

Следовательно, функция будет возрастать на промежутке $(2; +\infty)$

Функция будет убывать на промежутке $(-\infty; 2)$

ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ

Точка x_0 называется точкой <u>максимума</u> функции $f(x)$, если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство

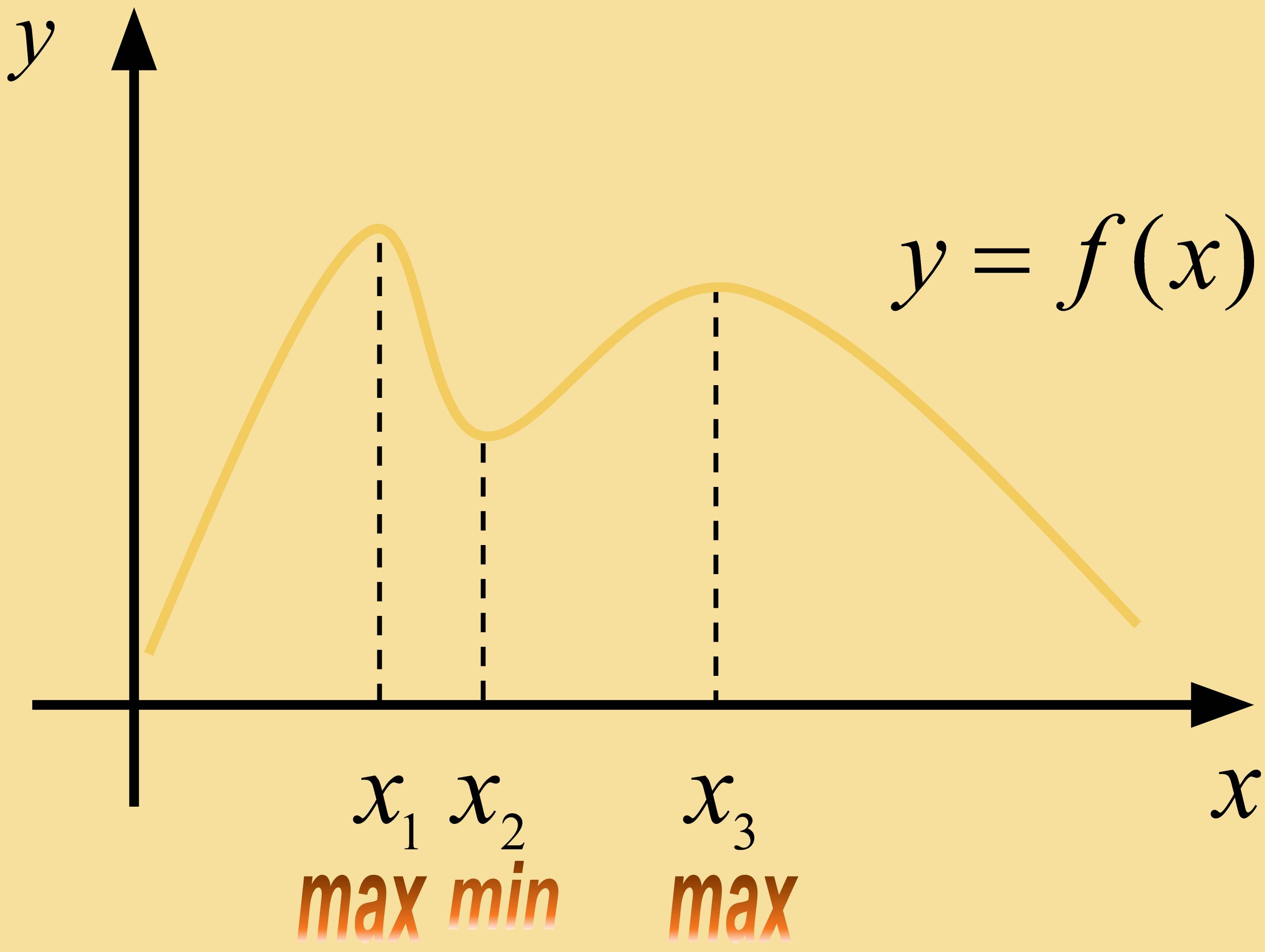
$$f(x) \le f(x_0)$$

Точка x_1 называется точкой __минимума__ функции f(x), если в некоторой окрестности точки x_1 выполняется неравенство

$$f(x) \geq f(x_1)$$

Значения функции в точках x_0 и x_1 называются соответственно __максимумом__ и __минимумом__ функции.

Максимум и минимум функции называется __экстремумом__ функции.



y
$y = f(x)$
x_1
x_2
x_3
x
max
min
max

На одном промежутке функция может иметь несколько экстремумов, причем может быть, что минимум в одной точке больше максимума в другой.

Максимум или минимум функции на некотором промежутке не являются в общем случае наибольшим и наименьшим значением функции.

Если в некоторой точке x_0 дифференцируемая функция $f(x)$ имеет экстремум, то в некоторой окрестности этой точки выполняется теорема Ферма и производная функции в этой точке равна нулю:

$$\boxed{f'(x_0) = 0}$$

необходимое условие экстремума:

Для того, чтобы функция y=f(x) имела экстремум в точке x_0, необходимо, чтобы ее производная в этой точке равнялась нулю или не существовала.

Точки, в которых выполняется необходимое условие экстремума, называются <u>критическими</u> или <u>стационарными</u>.

Т.об., если в какой-либо точке имеется экстремум, то эта точка является критической.

Но критическая точка не обязательно является точкой экстремума.

Примеры

Найти критические точки и экстремумы функций:

1

$$y = x^2$$

Решение:

Применим необходимое условие экстремума:

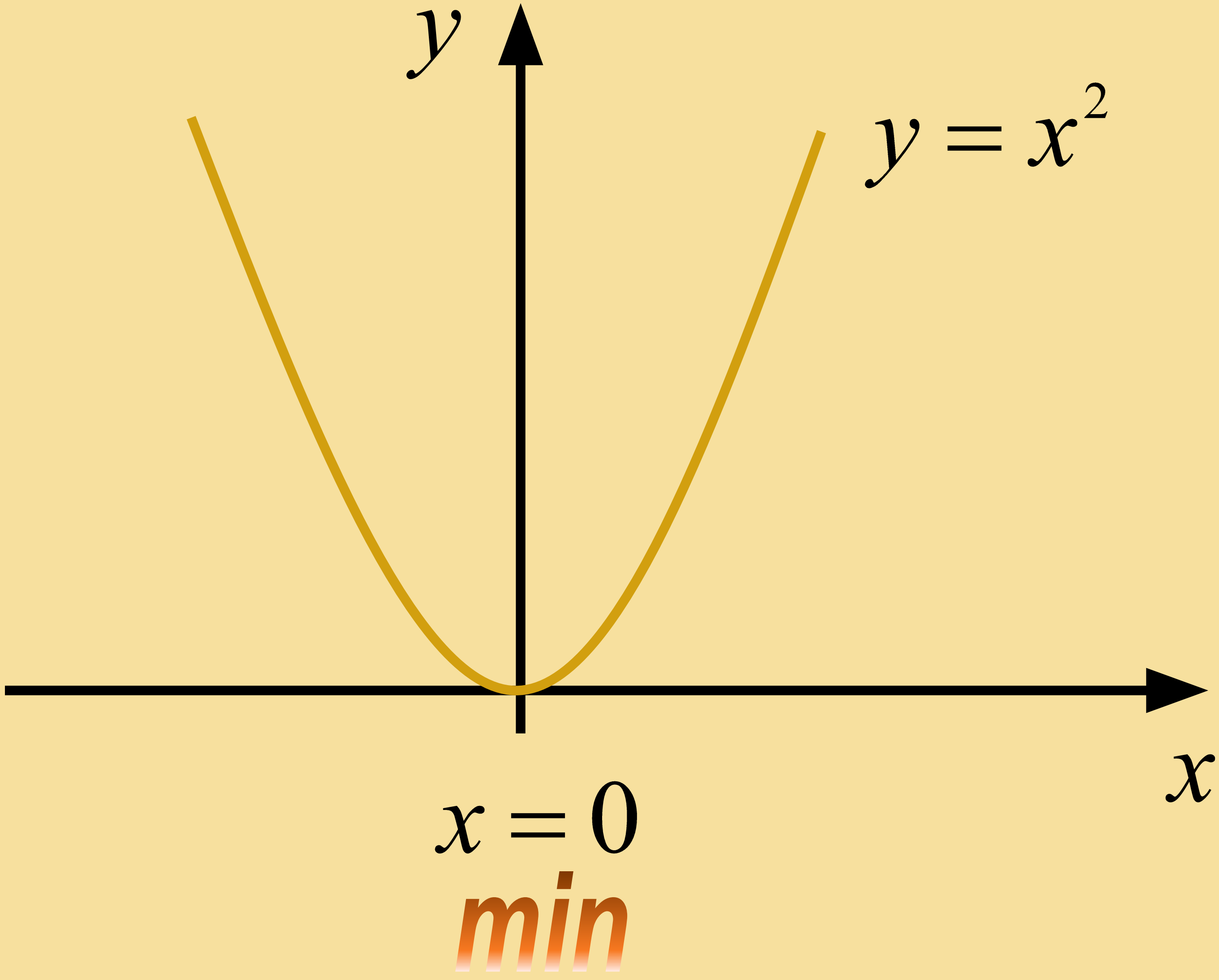
$$y' = (x^2)' = 2x$$

$$y' = 2x = 0 \quad при \quad x = 0$$

$$x = 0$$

- критическая точка

$$y = 0$$



y
$y = x^2$
x
$x = 0$
min

2

$$y = x^3 + 1$$

Решение:

Применим необходимое условие экстремума:

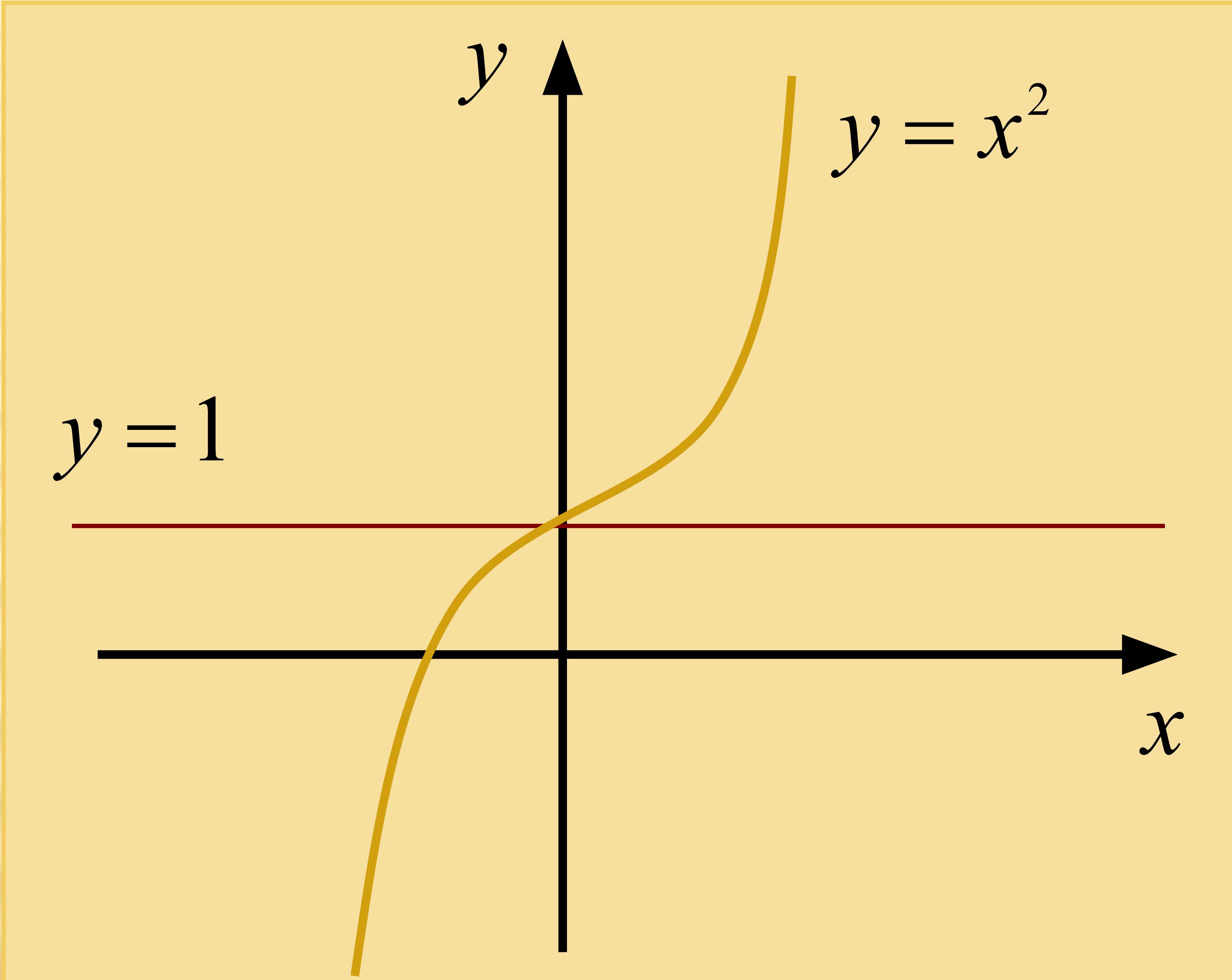
$$y' = (x^3 + 1)' = 3x^2$$

$$y' = 3x^2 = 0 \quad при \quad x = 0$$

$$x = 0$$

- критическая точка

$$y = 1$$


y
$y = x^2$
$y = 1$
x

первое достаточное условие экстремума

Если при переходе через точку x_0 производная дифференцируемой функции $y=f(x)$меняет знак с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума, а если с минуса на плюс, то x_0 есть точка минимума.

схема исследования функции на экстремум

1

Найти производную функции

$$y' = f'(x)$$

2

Найти критические точки функции, в которых производная равна нулю или не существует.

3

Исследовать знак производной слева и справа от каждой критической точки.

4

Найти экстремум функции.

Пример

Исследовать функцию на экстремум:

$$y = x(x-1)^3$$

Решение:

Применим схему исследования функции на экстремум:

1 **Находим производную функции:**

$$y' = (x(x-1)^3)' = (x-1)^3 + 3x\cdot(x-1)^2 =$$

$$= (x-1)^2(x-1+3x) = (x-1)^2(4x-1)$$

2

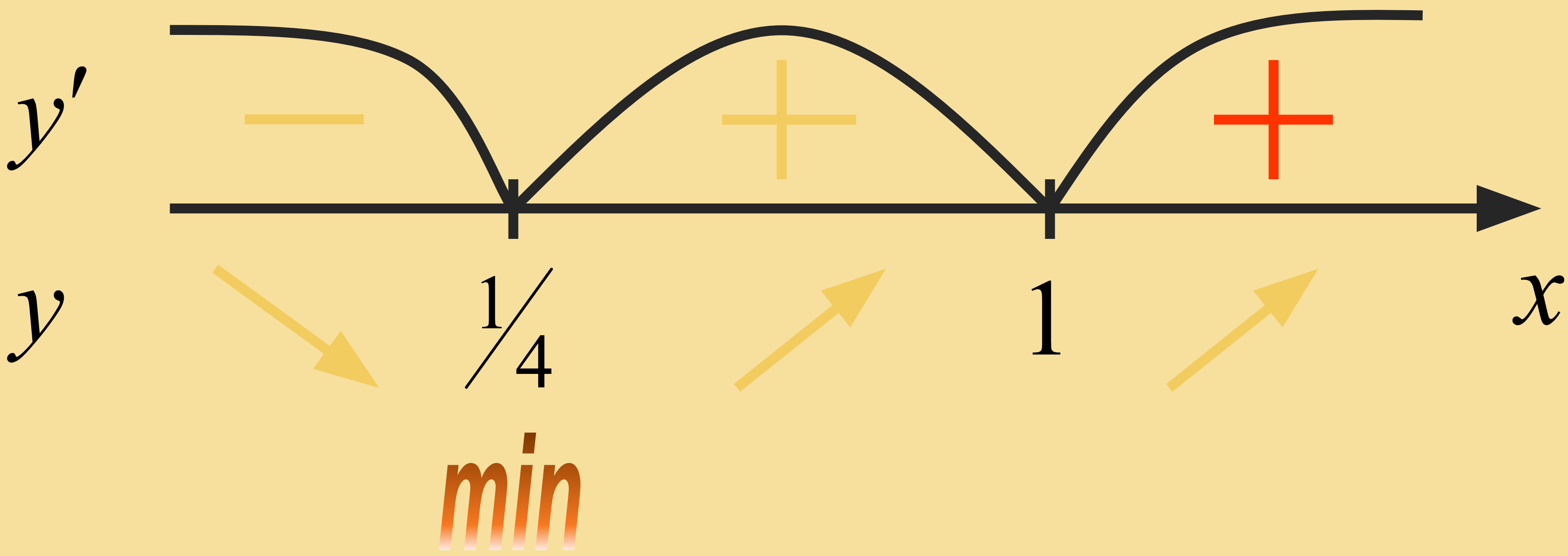
Находим критические точки:

$$(x-1)^2(4x-1)=0$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= \frac{1}{4} \end{aligned}\right\} \text{критические точки}$$

3

Исследуем знак производной слева и справа от каждой критической точки:



В точке *x=1* экстремума нет.

4

Находим экстремум функции:

$$f_{\min}\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{27}{256}$$

второе достаточное условие экстремума:

Если первая производная дифференцируемой функции $y=f(x)$ в точке x_0 равна нулю, а вторая производная в этой точке положительна, то x_0 есть точка минимума, а если вторая производная отрицательна, то x_0 есть точка максимума.

Схема исследования функции на экстремум в этом случае аналогична предыдущей, но третий пункт следует заменить на:

3

Найти вторую производную и определить ее знак в каждой критической точке.

Из второго достаточного условия следует, что если в критической точке вторая производная функции не равна нулю, то эта точка является точкой экстремума.

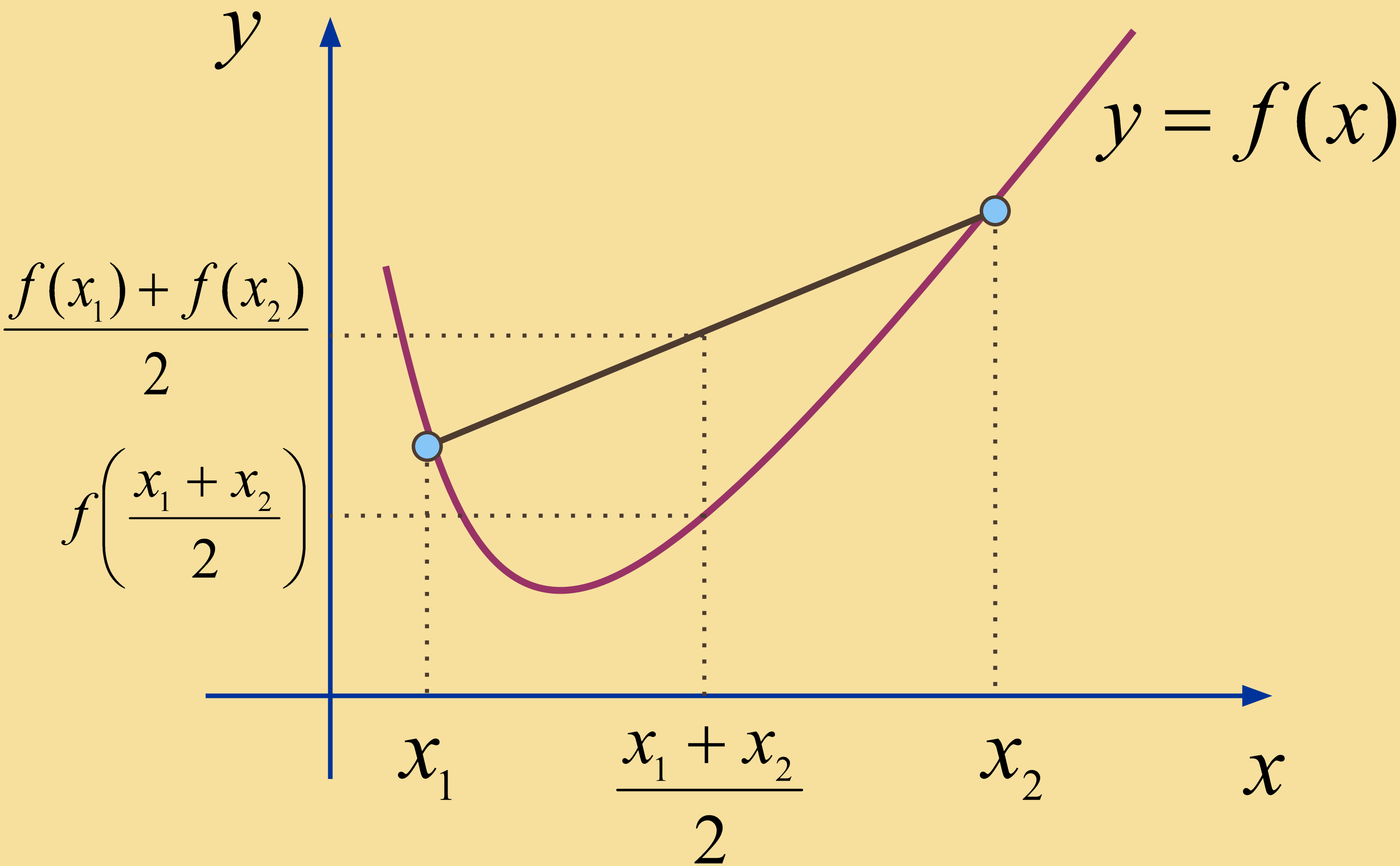
Обратное утверждение не верно: если в критической точке вторая производная функции равна нулю, то эта точка также может являться точкой экстремума.

В этом случае для исследования функции необходимо использовать первое достаточное условие экстремума.

Выпуклость функции. Точки перегиба.

Функция y=f(x) называется <u>выпуклой вниз (вогнутой)</u> на промежутке X, если для любых x_1, x_2 из этого промежутка выполняется неравенство:

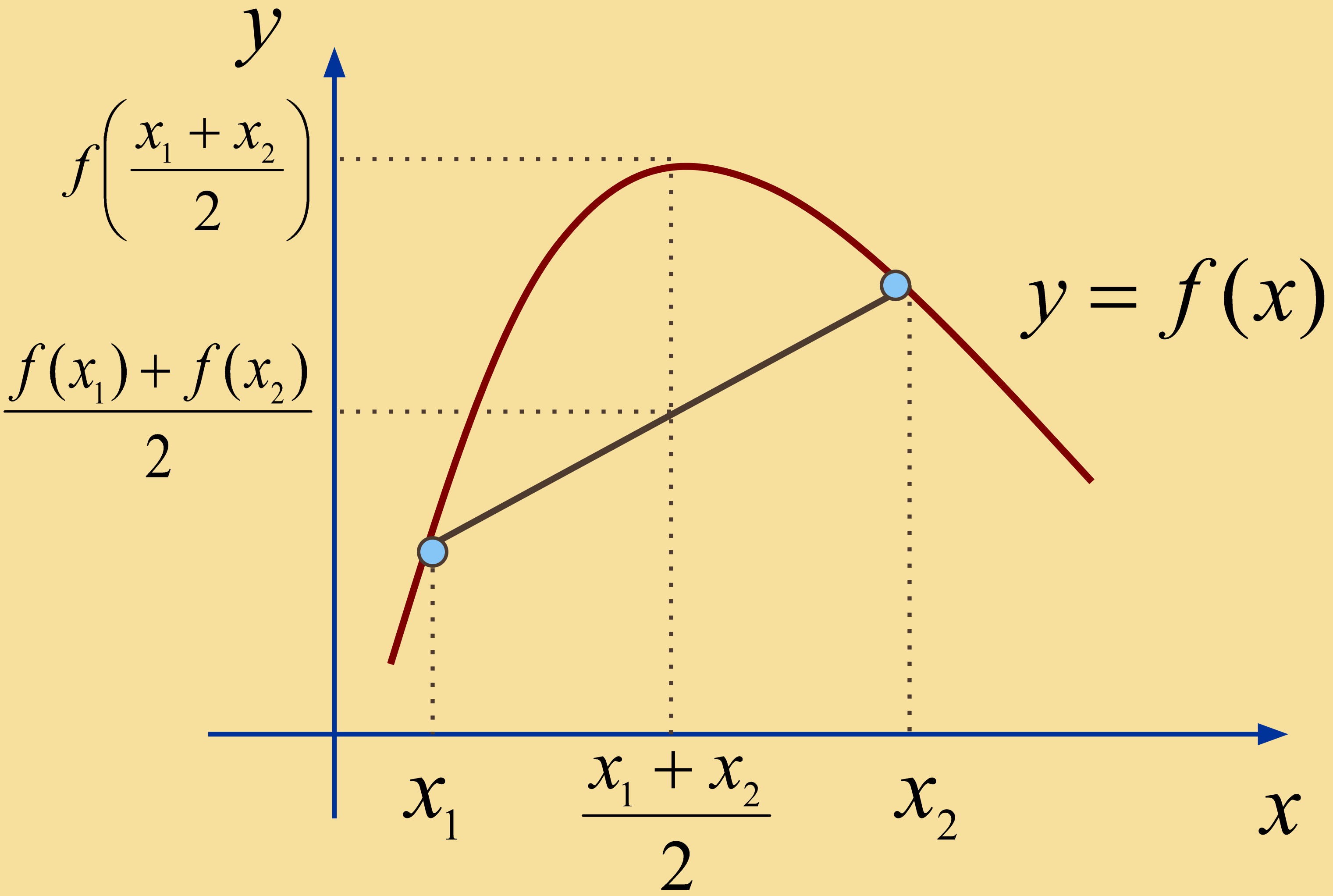
$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$



y
$y = f(x)$
$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$
$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$
x_1
$\frac{x_1+x_2}{2}$
x_2
x

Функция y=f(x) называется <u>выпуклой вверх</u> на промежутке X, если для любых x_1, x_2 из этого промежутка выполняется неравенство:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$



y
$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$
$y=f(x)$
$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$
x_1
$\frac{x_1+x_2}{2}$
x_2
x

ТЕОРЕМА 1.

Функция выпукла вверх (вниз) на промежутке X тогда и только тогда, когда ее первая производная на этом промежутке монотонно возрастает (убывает).

ТЕОРЕМА 2.
достаточное услови
выпуклости функци

Если вторая производная дифференцируемой функции положительна (отрицательна) на некотором промежутке X, то функция выпукла вниз (вверх) на этом промежутке.

<u>Точкой перегиба</u> графика непрерывной функции называется точка, разделяющая интервалы, на которых функция выпукла вверх и вниз.

Точка перегиба – это точка экстремума первой производной.

ТЕОРЕМА 3. необходимое услов перегиба

Вторая производная дифференцируемой функции в точке перегиба x_0 равна нулю:

$$\boxed{f''(x_0) = 0}$$

Теорема 4. достаточное услов перегиба

Если вторая производная дифференцируемой функции в точке x_0 меняет свой знак, то x_0 - точка перегиба ее графика.

схема исследования функци
выпуклость и точки перегиб

1

Найти вторую производную функции.

2

Найти точки, в которых вторая производная функции равна нулю или не существует.

3

Исследовать знак второй производной слева и справа от найденных точек и сделать вывод об интервалах выпуклости и точках перегиба.

4

Найти значения функции в точках перегиба.

Пример.

Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции

$$y = x \cdot (x-1)^3$$

Решение:

1 **Находим вторую производную:**

$$y' = \left(x\cdot(x-1)^3\right)' = (x-1)^3 + 3x\cdot(x-1)^2 =$$

$$= (x-1)^2\cdot(x-1+3x) = (x-1)^2\cdot(4x-1)$$

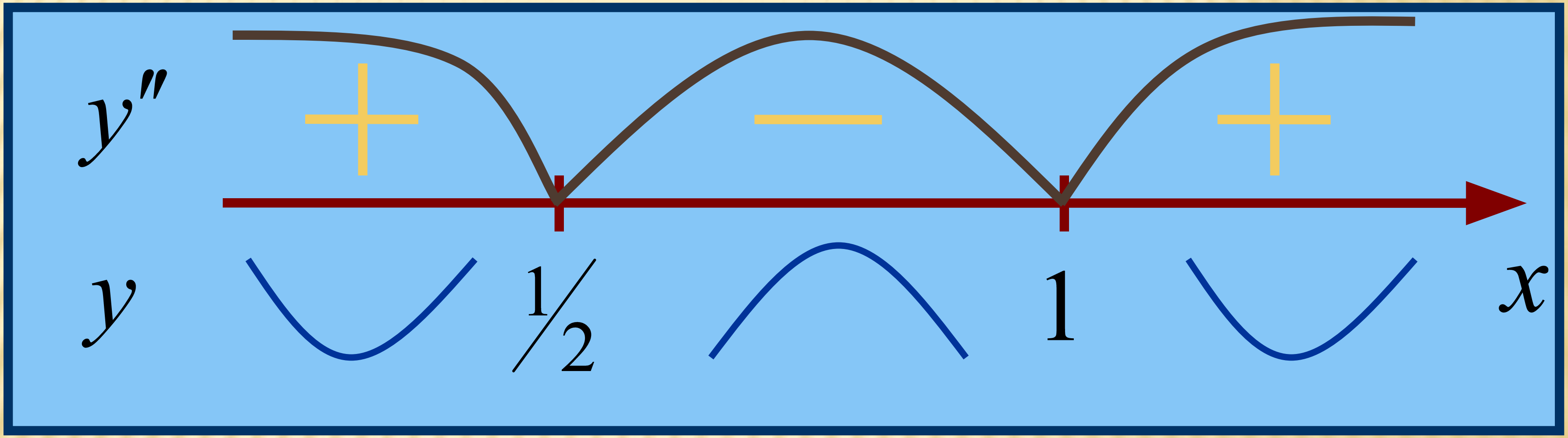
$$y'' = \left((x-1)^2\cdot(4x-1)\right)' = 2(x-1)\cdot(4x-1) + 4(x-1)^2 =$$

$$= (x-1)\cdot\left(8x-2+4x-4\right) = (x-1)\cdot\left(12x-6\right)$$

2 **Находим точки, в которых вторая производная обращается в нуль:** $y'' = (x-1)\cdot\left(12x-6\right) = 0$

$$x_1 = \frac{1}{2} \qquad x_2 = 1$$

3 **Исследуем знак второй производной слева и справа от каждой точки:**



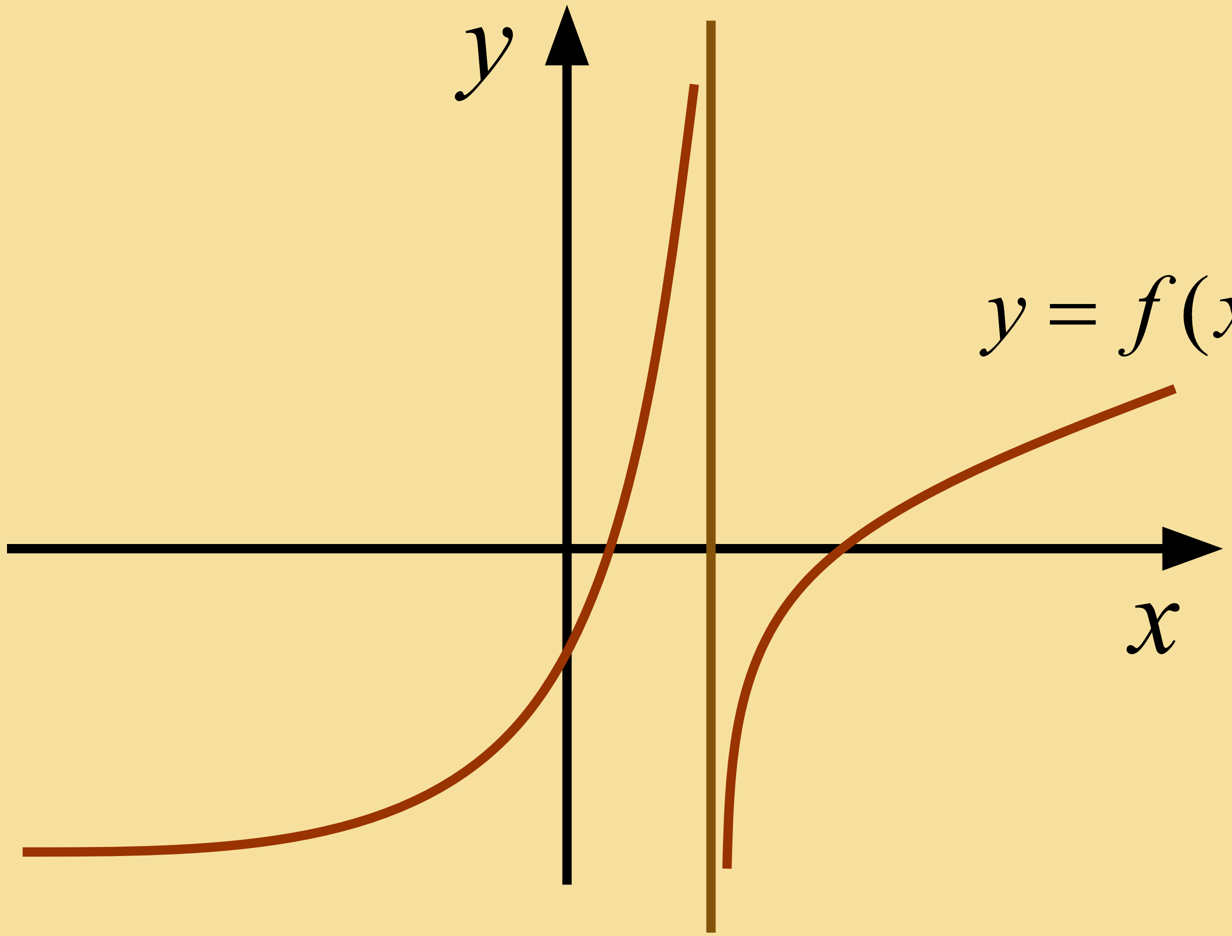
Точки x_1, x_2 являются точками перегиба.

4 **Находим значения функции в точках перегиба:**

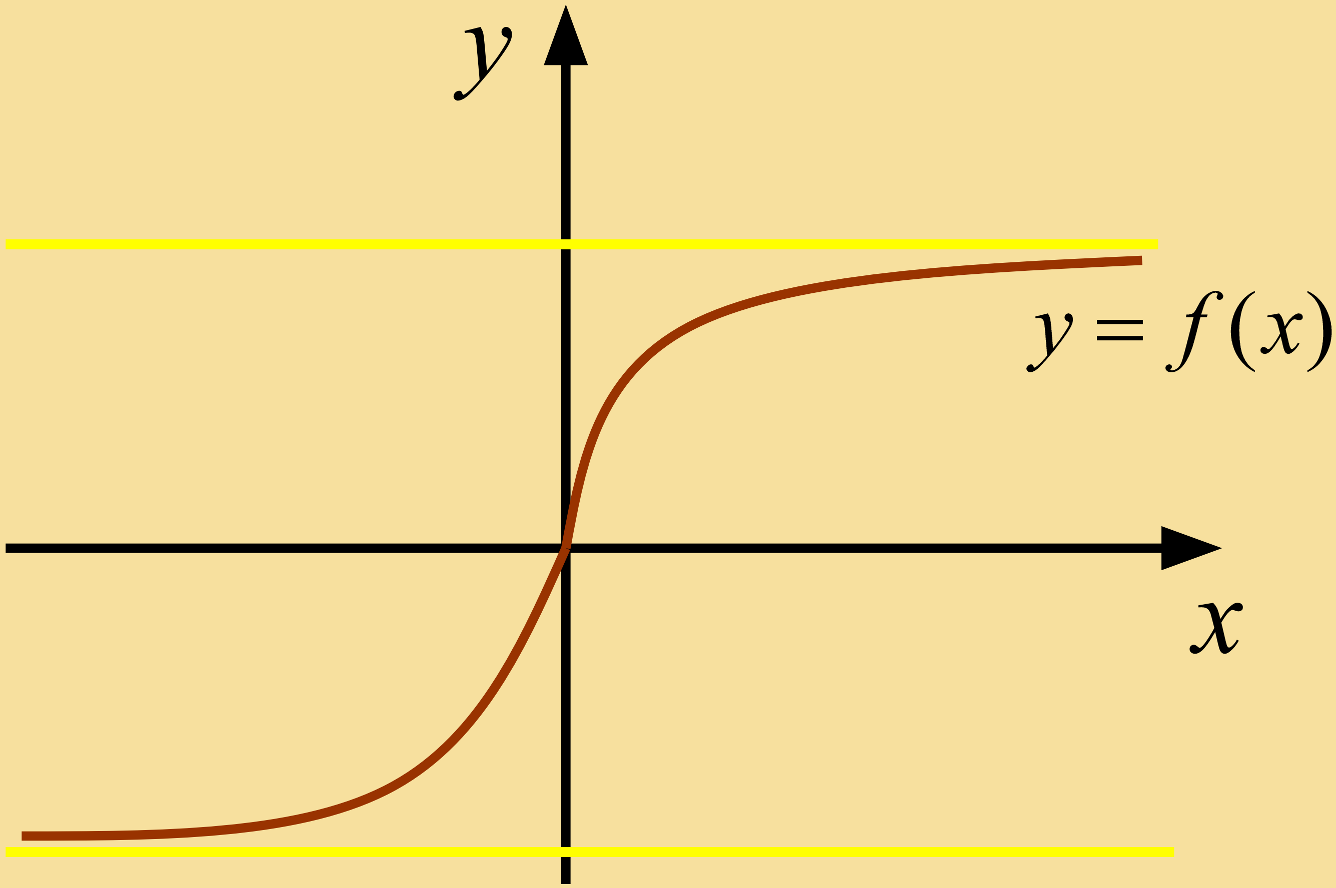
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{16} \qquad f(1) = 0$$

АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

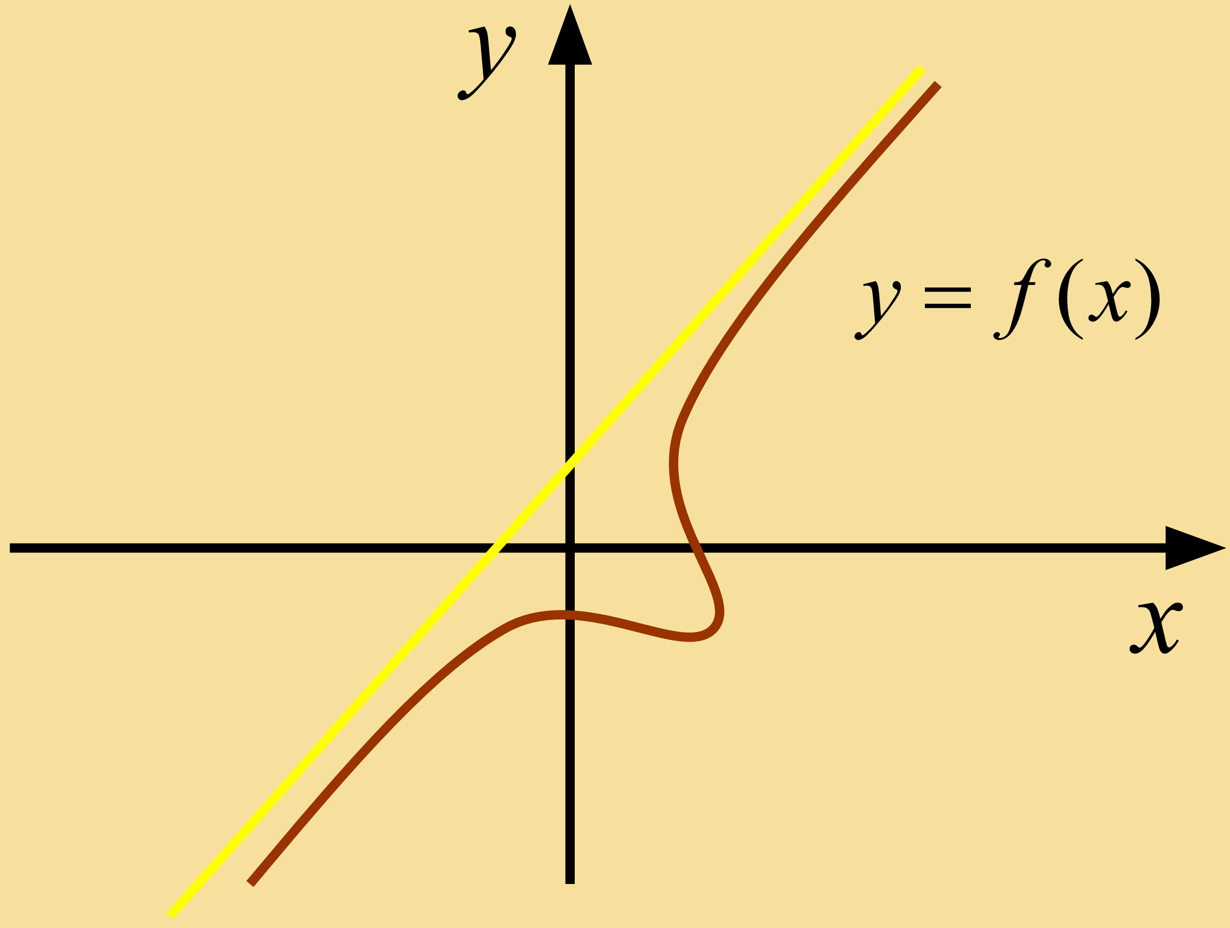
Асимптотой ***графика функции y=f(x) называется прямая, такая что расстояние от точки (x,f(x)) до этой прямой стремиться к нулю при неограниченном удалении точек графика от начала координат.***



вертикальная асимптота



горизонтальные асимптоты



наклонная асимптота

ТЕОРЕМА 1.

Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 (исключая, может быть, саму эту точку) и хотя бы один из пределов функции при

$$x \to x_0 - 0 \qquad (слева)$$

или

$$x \to x_0 + 0 \qquad (справа)$$

равен бесконечности, т.е.

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$$

или

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$$

Тогда прямая $x=x_0$ является <u>вертикальной асимптотой</u> графика функции $y=f(x)$.

Очевидно, что прямая *$x=x_0$* не может быть вертикальной асимптотой, если функция непрерывна в точке *x_0*, т.к. в этом случае

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Следовательно, вертикальные асимптоты *$x=x_0$* следует искать в точках разрыва функции *$y=f(x)$* или на концах ее области определения *(a,b)*, если *a* и *b* – конечные числа.

ТЕОРЕМА 2.

Пусть функция у=f(x) определена при достаточно больших х и существует конечный предел функции

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b$$

Тогда прямая у=b является <u>горизонтальной асимптотой</u> графика функции у=f(x).

ТЕОРЕМА 3.

Пусть функция y=f(x) определена при достаточно больших x и существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-k\cdot x\right)=b$$

*Тогда прямая y=kx+b является **наклонной асимптотой** графика функции y=f(x).*

Пример.

Найти асимптоты графика функции

$$y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$$

Решение:

1 Функция не имеет точек разрыва, следовательно вертикальных асимптот у нее нет.

2 Найдем горизонтальные асимптоты:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{x^2 + 1} = \infty$$

Предел равен бесконечности, следовательно горизонтальных асимптот нет.

3 Найдем наклонные асимптоты:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2+1}:x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=1 \Rightarrow k=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3-x}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x^2+1}=0$$

$$\Rightarrow b=0$$

Следовательно, прямая $y=x$

является наклонной асимптотой.

СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

1

Найти область определения функции.

2

Исследовать функцию на четность и периодичность.

3

Найти вертикальные асимптоты.

4

Исследовать поведение функции на бесконечности и найти горизонтальные или наклонные асимптоты.

5

Найти экстремумы и интервалы монотонности функции.

6

Найти интервалы выпуклости функции и точки перегиба.

7

Найти точки пересечения графика с осями координат и некоторые дополнительные точки, уточняющие график.

Пример.

Исследовать функцию и построить ее график

$$y = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}$$

Решение:

1 Находим область определения функции.

Функция определена при всех значениях *x*, кроме $x = \pm 1$

Следовательно, область определения функции будет объединение интервалов:

$$(-\infty;-1) \cup (-1;1) \cup (1;+\infty)$$

2 Исследуем функцию на четность и периодичность:

$$f(-x) = \frac{1+(-x)^2}{1-(-x)^2} = \frac{1+x^2}{1-x^2} = f(x)$$

Функция является четной, следовательно ее график будет симметричен относительно оси ординат.

Функция не периодична.

3 Находим вертикальные асимптоты.

Вертикальные асимптоты могут быть в точках разрыва функции x =1 и x = -1.

Сначала рассмотрим точку x =1.

Если хотя бы один из пределов при $x \to 1$

слева и справа равен бесконечности, то прямая x =1 является вертикальной асимптотой.

При $x \to 1$ слева $\lim\limits_{x \to 1-0} \dfrac{1+x^2}{1-x^2} = +\infty$

При $x \to 1$ справа $\lim\limits_{x \to 1+0} \dfrac{1+x^2}{1-x^2} = -\infty$

Следовательно, прямая x=1 является вертикальной асимптотой.

Аналогично можно проанализировать x=-1, но так как график функции симметричен относительно оси ординат, то прямая x=-1 также будет вертикальной асимптотой.

4 Исследуем поведение функции на бесконечности и найдем горизонтальные и наклонные асимптоты.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^2}{1-x^2}=-1 \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1+x^2}{1-x^2}=-1$$

Следовательно, y=-1 - горизонтальная асимптота.

Т.к.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+x^2}{x(1-x^2)}=\infty$$

то наклонных асимптот нет.

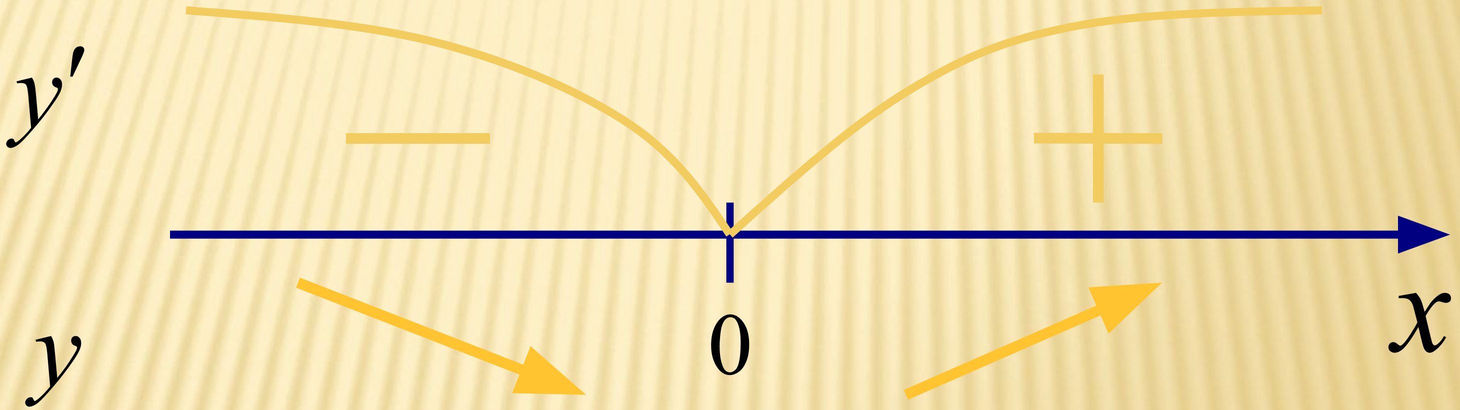
5 **Найдем интервалы монотонности и экстремумы функции.**

Для этого вычислим первую производную:

$$y'=\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)'=\frac{2x(1-x^2)-(-2x)(1+x^2)}{(1-x^2)^2}=$$

$$= \frac{2x - 2x^3 + 2x + 2x^3}{(1 - x^2)^2} = \frac{4x}{(1 - x^2)^2}$$

Исследуем знак производной при переходе через эту точку:



минимум

$$f_{\min}(0) = 1$$

Интервалы монотонности функции:

Функция убывает на: $(-\infty;-1)\cup(-1;0)$

Функция возрастает на: $(0;1)\cup(1;+\infty)$

6 **Найдем интервалы выпуклости и точки перегиба.**

Для этого вычислим вторую производную:

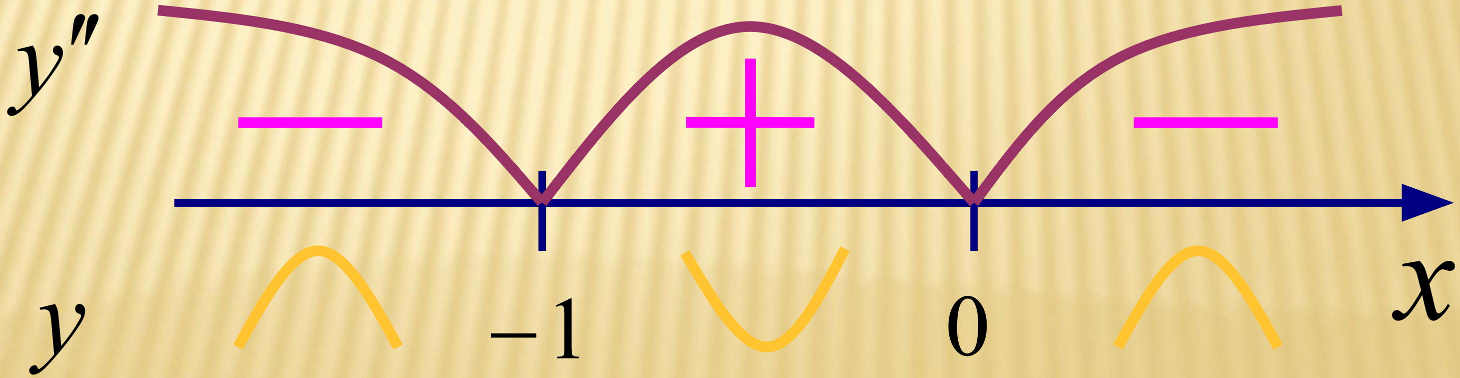
$$y''=\left(\frac{4x}{(1-x^2)^2}\right)'=\frac{(4x)'\cdot(1-x^2)^2-4x\cdot\left((1-x^2)^2\right)'}{(1-x^2)^4}=$$

$$=\frac{4\cdot(1-x^2)^2-4x\cdot 2(1-x^2)\cdot(-2x)}{(1-x^2)^4}=\frac{4-4x^2+16x^2}{(1-x^2)^3}=$$

$$= \frac{4(1+3x^2)}{(1-x^2)^3}$$

Точек, в которых вторая производная обращается в ноль, нет. Поэтому точек перегиба у графика нет.

Числитель всегда положителен, поэтому знак второй производной будет определяться знаменателем.



Интервалы выпуклости функции:

Функция выпукла вниз на: $(-1\,;1)$

Функция выпукла вверх на: $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$

7 **Найдем точки пересечения графика функции с осями координат:**

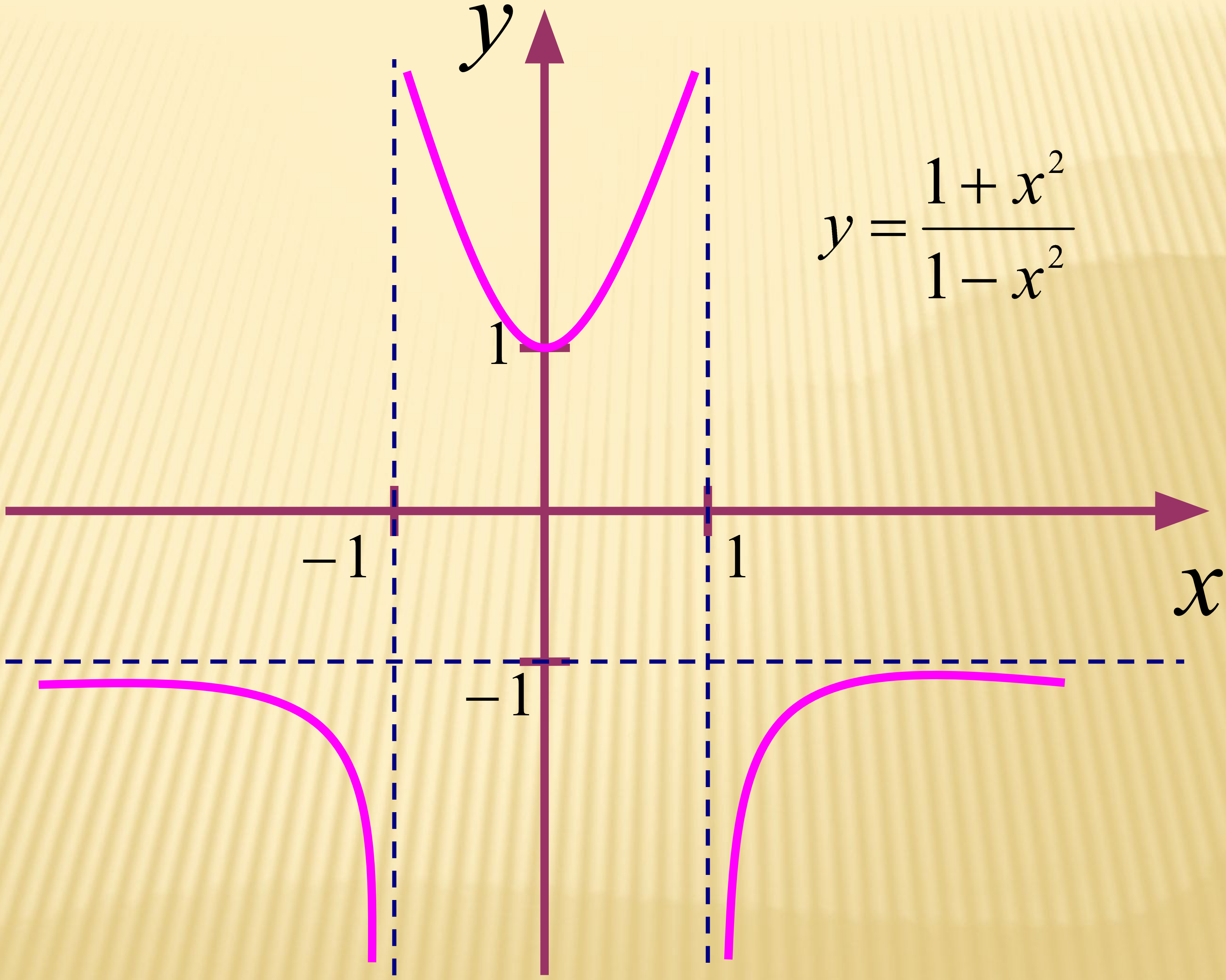
При $x=0$

$$y=\frac{1+0}{1-0}=1$$

(0,1) - точка пересечения с осью ординат.

Точек пересечения с осью абсцисс нет.

8 **Строим график функции:**



y
$y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$
1
-1
1
x
-1