Задача коммивояжёра

Имеется *n* городов, между которыми существует определённая сеть дорог. Коммивояжер, выходя из некоторого города, должен обойти все остальные города, побывав в каждом из них по одному разу, и вернуться в исходный город. При этом пройденное коммивояжёром расстояние должно быть минимально. Расстояния между городами задаются матрицей

$C = | c_{ij} |_{nxn}$, у которой элемент $c_{ij} \geq 0$ равен длине дороги, непосредственно соединяющей *i*-ый и *j*-ый города, и равен ∞ при отсутствии дороги, связывающей непосредственно *i*-ый и *j*-ый города. Кроме этого $c_{ii} = \infty$, для запрещения коммивояжёру возвращаться сразу же в город.

Для графа $G = (V, E)$ гамильтоновым называется цикл, содержащий все вершины графа. Если построить граф, вершины которого соответствуют городам, а дуги (рёбра) непосредственно связывающим города дорогам, то приписав дугам длины, совпадающие с длинами дорог, мы получим задачу нахождения гамильтонова цикла минимальной длины. Введём для дуг графа *G* в рассмотрение переменные

$$x_e = \begin{cases} 1, e \text{ âêëþ÷åíà â ãàìèëüòîíîâ öèêë}, \\ 0, \text{ â ïðîòèâíîì ñëó÷àå.} \end{cases}$$

Тогда задачу коммивояжёра можно сформулировать в виде задачи линейного булевого программирования:

$$\sum_{e \in E} c_e x_e \to \min$$

$$\sum_{e \in \vartheta} x_e = n, \forall \text{ ãàìèëüòîíîâà öèêëà } \vartheta,$$

$$\sum_{e \in \vartheta} x_e \leq |\vartheta| - 1, \forall \text{ íå ãàìèëüòîíîâà öèêëà } \vartheta.$$

Метод ветвей и границ - общий метод для нахождения решений задач дискретной и комбинаторной оптимизации. Метод является алгоритмом перебора с отсевом подмножеств допустимых решений, не содержащих оптимальных решений. Опишем идею метода на примере поиска минимума функции $f(x)$ на конечном множестве допустимых значений Ω. Метод ветвей и границ основан на трёх процедурах: *ветвление, нахождение оценок* (границ), *отсев вариантов*.

Ветвление состоит в разбиении по некоторому правилу *A* множества допустимых решений на подмножества

$$\Omega_i, i=\overline{1,k} : \Omega = \bigcup_{i=1}^{k} \Omega_i, \Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing, i \neq j.$$

Процедура нахождения оценок заключается в поиске по некоторому правилу *B* нижних границ для минимальных значений функции $f(x)$ на $\Omega_i, i=\overline{1,k}$. Пусть полученные нижние границы $\gamma, \gamma_i, i=\overline{1,k}$. Очевидно, $\gamma \le \gamma_i, i=\overline{1,k}$.

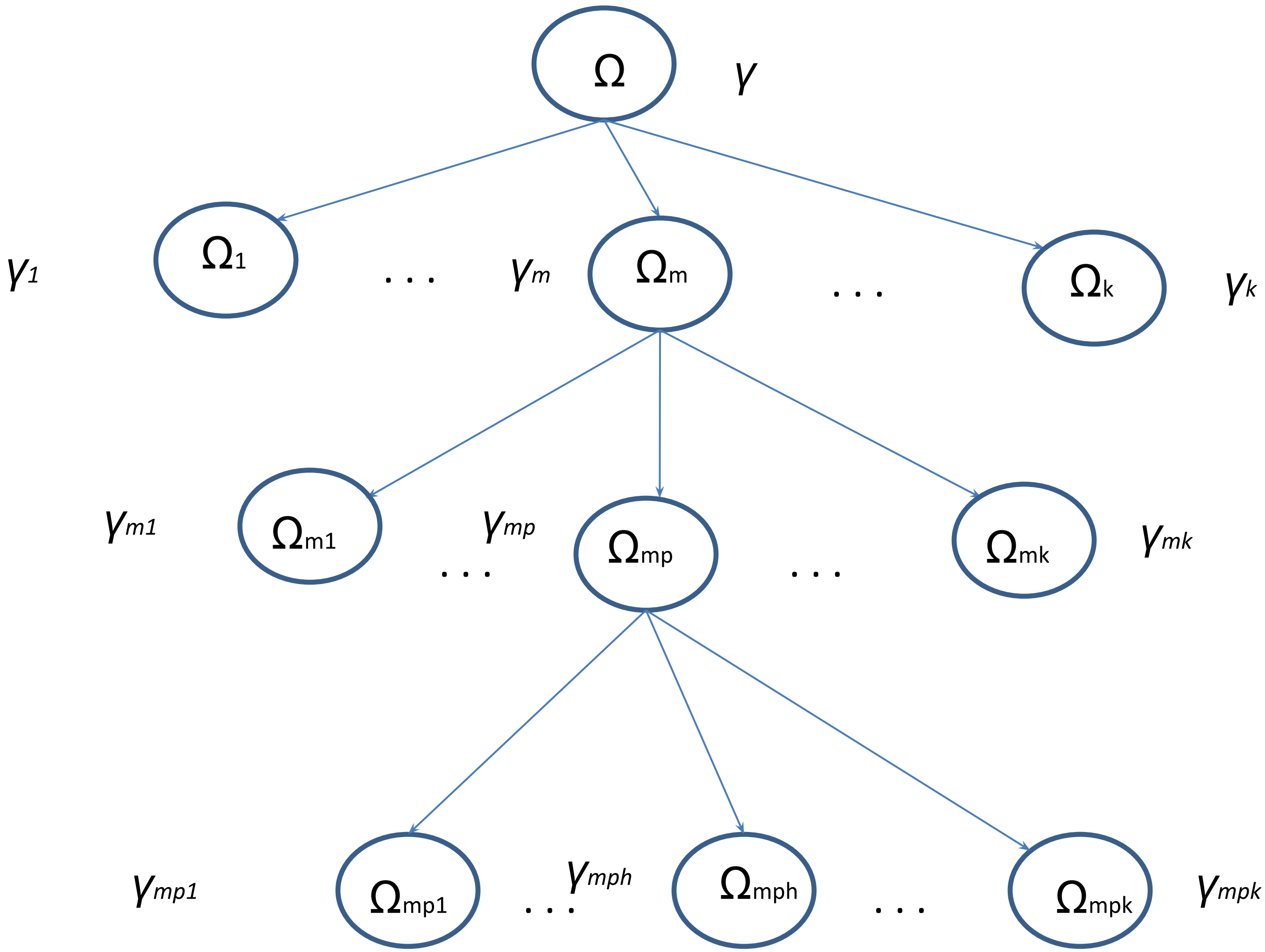
Из полученных подмножеств $\Omega_i, i=\overline{1,k}$, выбираем подмножество Ω_m, у которого $\gamma_m = \min_{i=\overline{1,k}} \gamma_i$. По правилу *A* разбиваем Ω_m на подмножества

$$\Omega_{mj}, j=\overline{1,k} : \Omega_m = \bigcup_{j=1}^{k} \Omega_{mj}, \Omega_{mi} \cap \Omega_{mj} = \varnothing, i \neq j,$$

и вычисляем по правилу *B* нижние границы для минимальных значений функции $f(x)$ на $\Omega_{mj}, j=\overline{1,k}$.

Задача коммивояжёра

Общая схема метода ветвей и границ



Алгоритм Литтла является реализацией метода ветвей и границ для задачи коммивояжёра. Правило ветвления состоит в разбиении множества рассматриваемых гамильтоновых циклов на два подмножества, одно из которых состоит из циклов, содержащих выбранную дугу *e*, а другое из циклов, не содержащих этой дуги. Дуга *e* выбирается среди дуг минимальной длины по условию, что запрет на использование этой дуги должен приводить к максимальному увеличению длины гамильтонова цикла. Правило вычисления нижних границ основано на процедуре приведения матриц расстояний, соответствующих вновь полученным висячим вершинам дерева поиска.

Опишем алгоритм Литтла.

Шаг 1. Приведение матрицы расстояний. Находим в каждой *i*-ой строке матрицы минимальный элемент α_i и вычитаем его из всех элементов этой строки. В полученной матрице в каждом *j*-ом столбце находим минимальный элемент β_j и вычитаем его из всех элементов данного столбца. После проделанных операций получим матрицу *C'*, каждая строка и каждый столбец которой содержит, по крайней мере, один нуль.

Шаг 2. Вычисляем сумму приводящих констант $\gamma = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j$. Очевидно, что γ является нижней границей для всего множества решений , которое берется в качестве корня дерева поиска и текущего множества решений.

Шаг 3. Для каждого нулевого элемента $c'_{ij} = 0$ матрицы *C'* находим штраф за неиспользование $\theta_{ij} = \min_{k \neq j} c'_{ik} + \min_{s \neq i} c'_{sj}$ (сумма минимальных элементов в строке и столбце, на пересечении которых стоит нуль, без учёта самого нулевого элемента).

Шаг 4. Выбираем нулевой элемент с максимальным штрафом

$$\theta_{ij} = \max_{c'_{sk}=0} \theta_{sk}.$$

Разбиваем текущее множество всех гамильтоновых циклов на два подмножества: Ω_1 - “не включающие дугу (i,j)” и Ω_2 – “включающие дугу (i,j)”. Присоединяем соответсвующие вершины к дереву поиска.

Шаг 5. Вычисляем нижнюю границу $\gamma_1 = \gamma + \theta_{ij}$ для гамильтоновых циклов подмножества Ω_1. Строим соответсвующую Ω_1 матрицу расстояний C'_1. Для этого значение элемента c'_{ij} заменяем на ∞ и приводим полученную матрицу (неприведенными могут быть только i-ая строка и j-ый столбец, поэтому сумма приводящих констант равна θ_{ij}) .

Шаг 6. Вычисляем нижнюю границу для гамильтоновых циклов подмножества Ω_2. Для этого удаляем из матрицы i-ю строку и j-й столбец, сохраняя исходную нумерацию для оставшихся строк и столбцов, и заменяем на ∞ значение элементов, соответствующих дугам, использование каждой из которых с уже включёнными в гамильтонов цикл дугами, приводит к образованию цикла с числом дуг меньше n. Приводим полученную матрицу, обозначаем её C'_2 и добавляем сумму приводящих констант к нижней границе γ множества решений . Получаем нижнюю границу γ_2 .

Шаг 7. Если в результате шага 6 получаем матрицу C'_2 порядка два и её нижняя граница не превышает границ висячих вершин дерева поиска, то процесс заканчивается, решение найдено, переходим к шагу 11. В противном случае переходим к шагу 8.

Шаг 8. Среди висячих вершин построенного дерева поиска выбираем вершину с наименьшей границей (если таких вершин несколько, выбираем любую из них).

Шаг 9. Если выбранная на шаге 8 вершина соответствует свойству “включающие дугу (i,j)”, то соответствующую ей матрицу расстояний C'_2, полученную на шаге 6, берём за C' и переходим к шагу 3. В противном случае переходим к шагу 10.

Шаг 10. Выбранная на шаге 8 вершина соответствует свойству “не включающие дугу (i,j)”). Соответствующую ей матрицу расстояний C'_1, полученную на шаге 5, берём за C' и переходим к шагу 3.

Шаг 11. Строим гамильтонов цикл минимальной длины. Для этого включаем в гамильтонов цикл дуги соответствующие нулевым элементам 2x2-матрицы расстояний C'_2, полученной на шаге 7. Далее двигаемся от висячей вершины к корню дерева поиска по единственному обратному пути. При прохождении обратной дуги дерева поиска, соответствующей переходу от множества решений к его подмножеству по свойству “ включающие дугу (i,j)”, дугу (i,j) включаем в гамильтонов цикл.

Пример. Решить задачу коммивояжёра со следующей матрицей расстояний C

∞	5	2	4	5
3	∞	3	5	8
4	2	∞	3	7
3	5	3	∞	2
1	4	2	5	∞

Приводим матрицу по строкам: $\alpha_1=2$, $\alpha_2=3$, $\alpha_3=2$, $\alpha_4=2$, $\alpha_5=1$.

∞	3	0	2	3
0	∞	0	2	5
2	0	∞	1	5
1	3	1	∞	0
0	3	1	4	∞

Приводим матрицу по столбцам: $\beta_1=0$, $\beta_2=0$, $\beta_3=0$, $\beta_4=1$, $\beta_5=0$.

∞	3	0	1	3
0	∞	0	1	5
2	0	∞	0	5
1	3	1	∞	0
0	3	1	3	∞

Текущая нижняя граница $\gamma = 11$.

Находим штрафы для нулевых элементов: $\theta_{13} = 1$, $\theta_{21} = 0$, $\theta_{23} = 0$, $\theta_{32} = 3$, $\theta_{34} = 1$, $\theta_{45} = 4$, $\theta_{51} = 1$. Максимальный штраф $\theta_{45} = 4$.

Разбиваем множество всех гамильтоновых циклов на два подмножества Ω_1 - “не включающие дугу (4,5)” и Ω_2 - “включающие дугу (4,5)”. Для первого подмножества нижняя граница $\gamma_1 = 15$, а соответствующую матрицу расстояний C'_1 получим из матрицы C', положив $c'_{45} = \infty$ и приведя результат.

$$\begin{vmatrix} \infty & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \infty & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & \infty & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & \infty & \infty \\ 0 & 3 & 1 & 3 & \infty \end{vmatrix}$$

Для второго подмножества матрица расстояний C'_2 получается из C' удалением 4-ой строки и пятого столбца, причём для запрещения образования цикла 4->5->4 , полагаем $c'_{54} = \infty$, полученный результат приводим.

	1	2	3	4
1	∞	3	0	1
2	0	∞	0	1
3	2	0	∞	0
5	0	3	1	∞

Сумма приводящих констант равна 0, следовательно, $\gamma_2 = 11$.

Минимальную нижнюю границу имеет множество Ω_2 . Поэтому в матрице C'_2 вычисляем штрафы для нулевых элементов: $\theta_{13} = 1$, $\theta_{21} = 0$, $\theta_{23} = 0$, $\theta_{32} = 3$, $\theta_{34} = 1$, $\theta_{51} = 1$. Максимальный штраф $\theta_{32} = 3$. Разбиваем множество Ω_2 на два подмножества Ω_{21} - "не включающие дугу (3,2)" и Ω_{22} - "включающие дугу (3,2)". Для подмножества Ω_{21} нижняя граница $\gamma_{21} = 14$. Матрицу расстояний C'_{21} получим из матрицы C'_2 , положив $c'_{32} = \infty$ и проведя процедуру приведения.

$$\begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & \infty & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & \infty & 0 & 1 \\ 3 & 2 & \infty & \infty & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & \infty \end{array}$$

Для подмножества Ω_{22} матрицу расстояний C'_{22} получаем из C'_2 , удаляя третью строку и второй столбец, затем для запрещения образования цикла 3->2->3 , полагаем $c'_{23} = \infty$, полученный результат приводим.

$$\begin{array}{c|ccc|} & 1 & 3 & 4 \\ 1 & \infty & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \infty & 0 \\ 5 & 0 & 1 & \infty \end{array}$$

Сумма приводящих констант равна 1, следовательно, $\gamma_{22} = 12$.

В дереве поиска висячие вершины соответсвуют подмножествам Ω_1, Ω_{21} , Ω_{22} . Минимальную нижнюю границу имеет множество Ω_{22} . Поэтому в матрице C'_{22} вычисляем штрафы для нулевых элементов: $\theta_{13} = 1$, $\theta_{14} = 0$, $\theta_{21} = 0$, $\theta_{24} = 0$, $\theta_{51} = 1$. В результате сравнения мы получили два одинаковых максимальных штрафа равных 1.

Возьмём $\theta_{13} = 1$. Разбиваем множество Ω_{22} на два подмножества Ω_{221} - “не включающие дугу (1,3)” и Ω_{222} - “включающие дугу (1,3)”. Для подмножества Ω_{221} нижняя граница $\gamma_{221} = 13$. Матрицу расстояний C'_{221} получим из матрицы C'_{22} , положив $c'_{13} = \infty$ и проведя процедуру приведения.

	1	3	4
1	∞	∞	0
2	0	∞	0
5	0	0	∞

Для подмножества Ω_{222} матрицу расстояний C'_{222} получаем из C'_{22} , удаляя первую строку и третий столбец, затем для запрещения образования цикла 1->3->2->1 , полагаем $c'_{21} = \infty$, полученный результат приводим. Сумма приводящих констант равна 0, следовательно,

$\gamma_{222} = 12$.

	1	4
2	∞	0
5	0	∞

В дереве поиска висячие вершины соответсвуют подмножествам Ω_1, Ω_{21} , Ω_{221} , Ω_{222} . Минимальную нижнюю границу имеет множество Ω_{222} . Соответсвующая матрица C'_{222} имеет размерность 2x2. Следовательно, решение найдено.

Переходим к постоению гамильтонового цикла. Включаем в гамильтонов цикл дуги (2,4), (5,1), как соответствующие нулевым элементам матрицы C'_{222} . Затем, двигаясь по дереву поиска к корню, включаем дуги (1,3), (3,2), 4,5). Дерево поиска приведено на рисунке