Декодирование циклического кода

Синдромы

Синдромные полиномы

- Синдром – это вектор длиной $n - k$, равный произведению принятой последовательности на проверочную матрицу.

- $\mathbf{s} = \mathbf{y}\mathbf{H}^T \longrightarrow$ - вектор

Полином

$$s(x) = s_v x^v + s_{v-1} x^{v-1} + \ldots + s_1 x + s_0$$

$\mathbf{s} = (s_v, s_{v-1}, \ldots, s_0)$

Синдром

- 1 Синдром можно определить как многочлен $s(x)$ степени $(n - k)$, являющийся остатком от деления принятой последовательности на порождающий многочлен

$$s(x) \equiv rem\{y(x) / g(x)\} \bmod g(x)$$

- Поскольку все кодовые слова делятся на $g(x)$, то $s(x)$, не зависит от переданного слова, а зависит лишь от комбинации ошибок.

Синдром

- 2. Второй вид синдрома может быть введен в случае, если порождающий многочлен является произведением двух или большего числа неприводимых сомножителей. Предположим, что

$$\boxed{g(x) = g_1(x) g_2(x) \ldots g_j(x)}$$

Тогда

$$\boxed{\begin{aligned} s_1(x) &\equiv y(x) \bmod g_1(x), \\ s_2(x) &\equiv y(x) \bmod g_2(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_j(x) &\equiv y(x) \bmod g_j(x). \end{aligned}}$$

Связаны с синдромом $s(x)$ через китайскую теорему об остатках

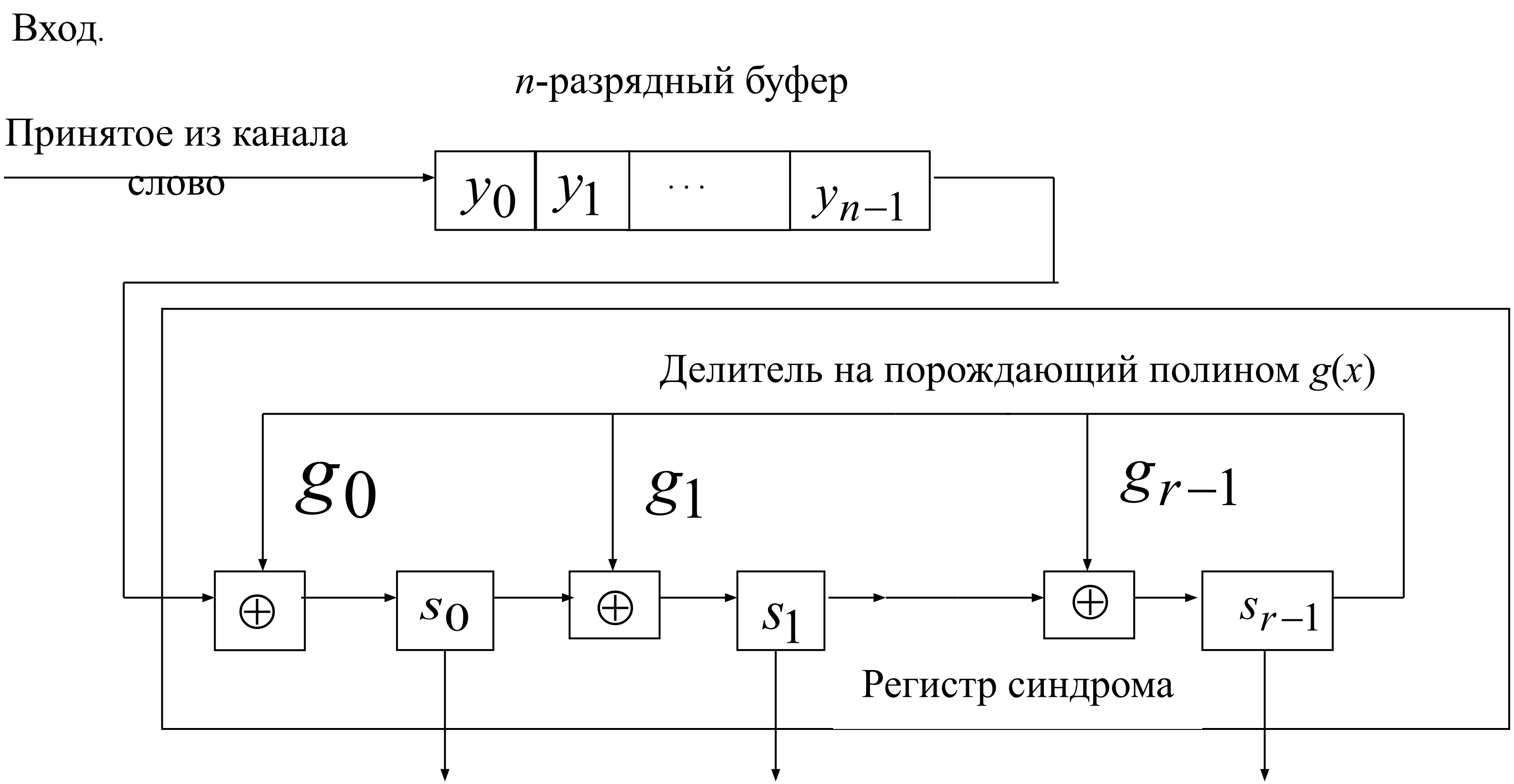
Синдром

- 3. Третья форма синдрома состоит в том, чтобы определить векторы форм синдромов $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$,… в виде

$$\mathbf{s}_1 = y(\beta_1), \quad \mathbf{s}_2 = y(\beta_2), \ldots$$

- где β_1 – корень $g_1(x)$; β_2 – корень $g_2(x)$ и т. д.
- Эта форма синдрома соответствует проверочной матрице, задаваемой корнями (коды БЧХ, РС)

Вычислитель синдрома на РСОС



Компоненты синдрома $\mathbf{s} = (s_0, s_1, \ldots, s_{r-1})$

Пример

код Хэмминга (7,4) $g(x) = x^3+x^2+1$

Список информационных и кодовых слов

a	c
1111	1111111
1110	1110010
1101	1101000
1100	1100101
1011	1011100
1010	1010001
1001	1001011
1000	1000110
0111	0111001

Таблица соответствия

$$s(x) = \mathrm{mod}\left[e(x) / g(x)\right]$$

e	s
1000000	110
0100000	011
0010000	111
0001000	101
0000100	100
0000010	010
0000001	001

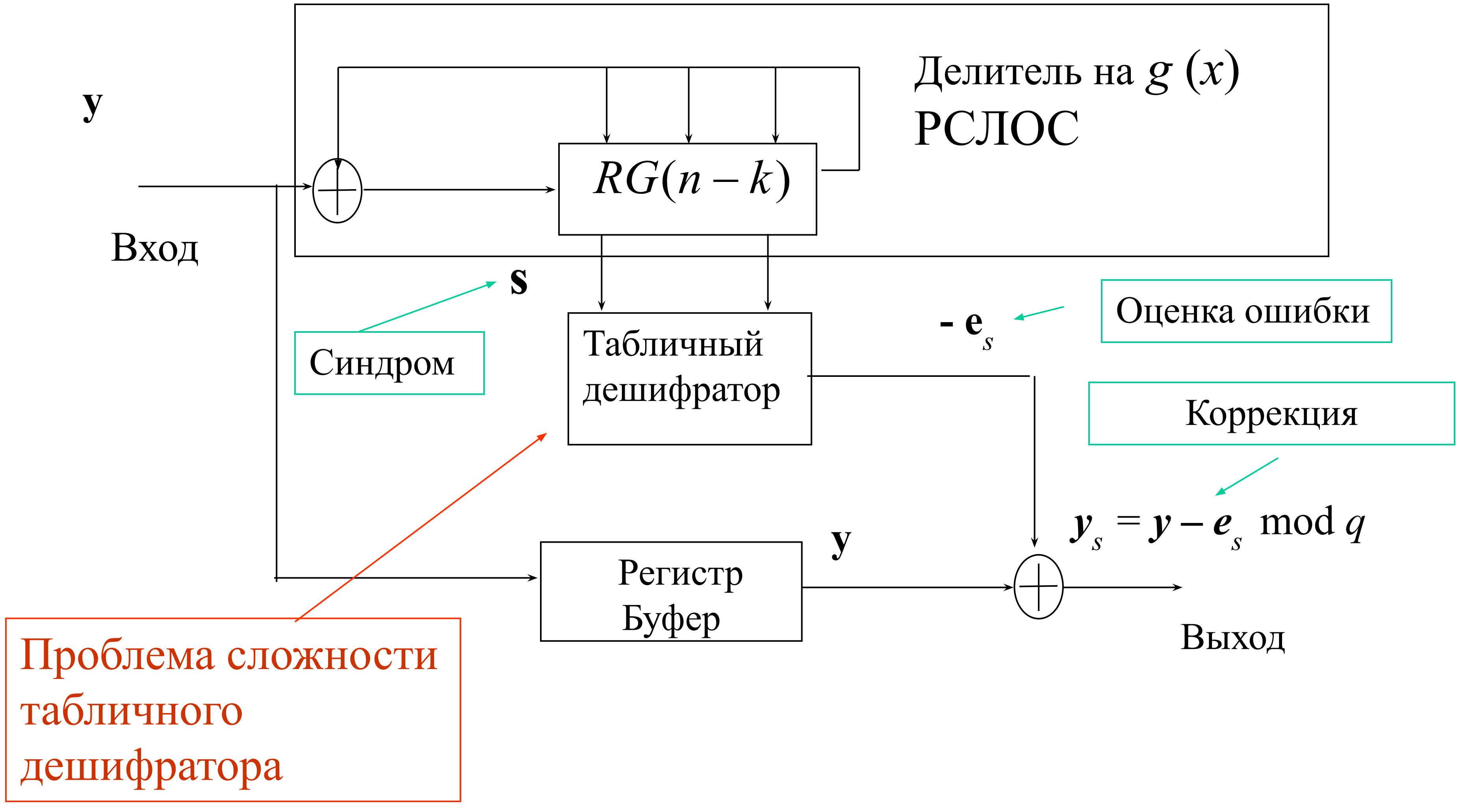
Декодирование

- $\mathbf{y} = 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1 \rightarrow y(x) = x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + 1$
- Вычисление синдрома
- $s(x) = \mathrm{rem}\{y(x)\ /\ g(x)\} =$
- $= \mathrm{rem}\{\ (x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + 1)/\ g(x) = x^3+x^2+1)\} = x^2 + 1$
- $s(x) = x^2 + 1 \rightarrow \mathbf{s} = 1\ 0\ 1$

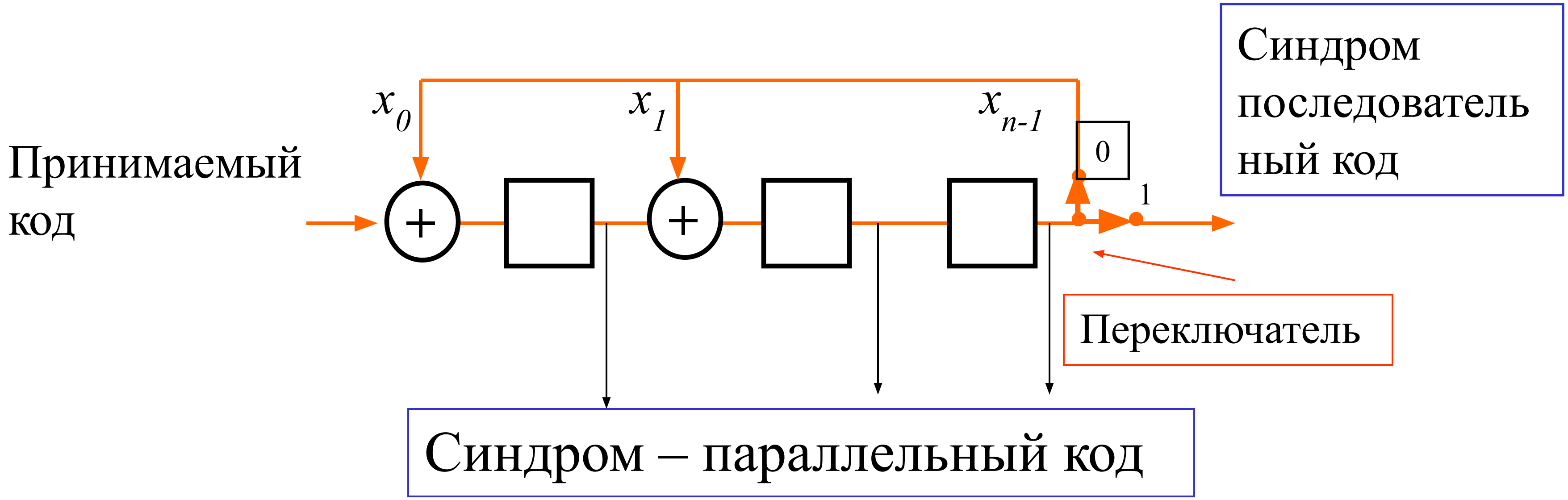
e	s
1000000	110
0100000	011
0010000	111
0001000	101
0000100	100
0000010	010
0000001	001

- Из таблицы соответствия находим
- $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{e}_s = 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0$
- Коррекция $\mathbf{y}_s = \mathbf{y} - \mathbf{e}_s \bmod 2 = 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ \ -\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1 =$
- $= \underline{1\ 1\ 0\ 0}\ 1\ 0\ 1;$
- **a = 1 1 0 0**

Схема декодера



Вычислитель синдрома $g(x) = x^3 + x + 1$



- Начальные состояния разрядов RG «0…0»
- Переключатель в позиции 0 – ОС замкнута
- Вычисление rem{ } - n тактов
- Результат 3 – битный синдром (n - k = 3):

- Переключатель в положении «1» - ОС разомкнута
- Считывание результата вычислений – последовательный код
- Схема делителя по форме Галуа

Теорема

- Пусть $s(x)$ полином синдрома принятого слова $r(x)$.
- Разделим $xs(x)$ на $g(x)$, что дает $s^{(1)}(x)$.
- Тогда $s^{(1)}(x)$ полиномом синдрома для $r^{(1)}(x)$ - циклического сдвига $r(x)$.

Пример

- Пусть $s(x)$ полином синдрома принятого слова $r(x)$.
- Разделим $xs(x)$ на $s^{(1)}(x)$.
- Тогда $s^{(1)}(x)$ пол ля ского сдвига $r(x)$.

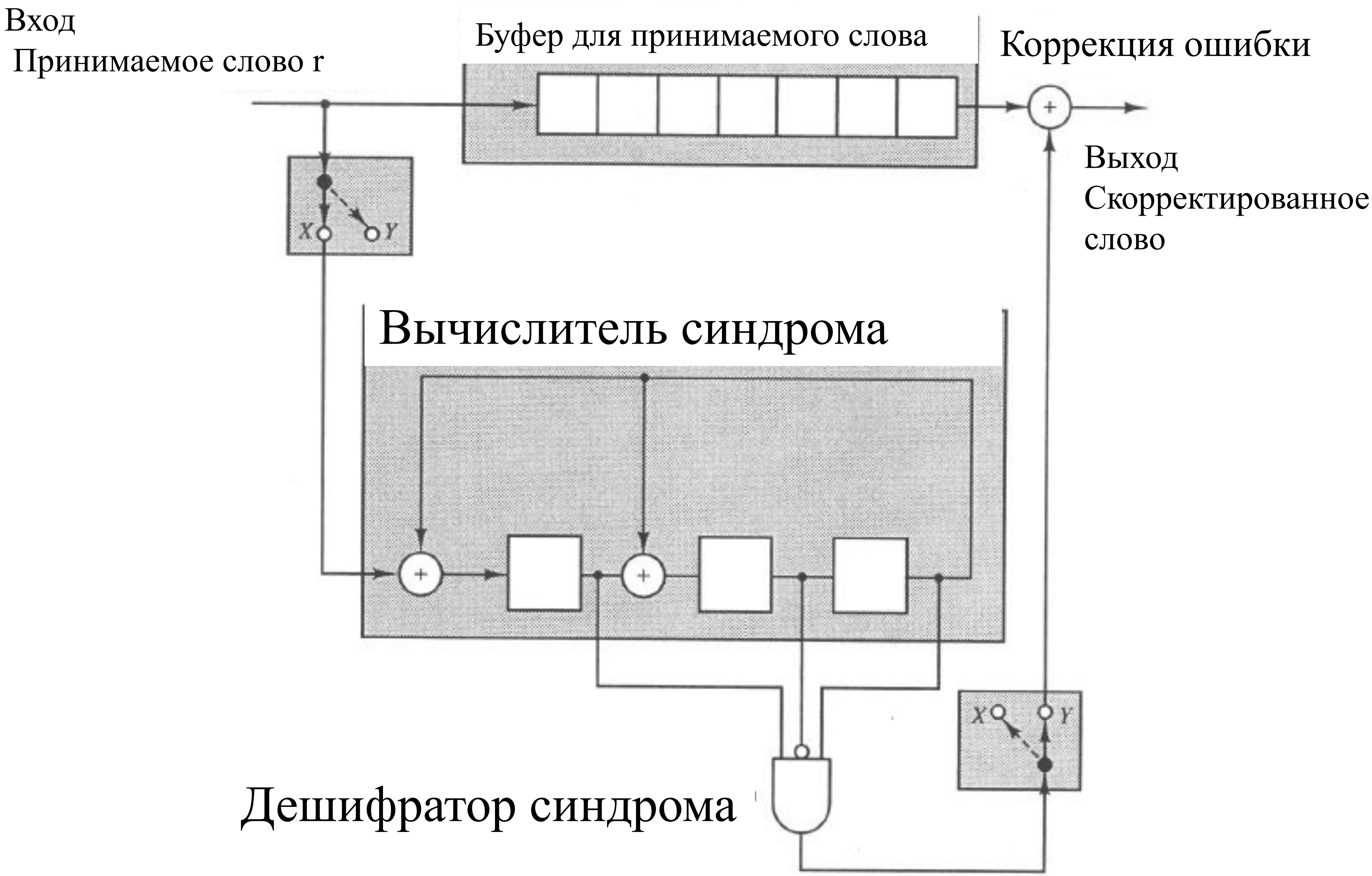
$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Пусть $s(x)$ полином синдрома принятого слова $r(x)$.
- Разделим $xs(x)$ на $g(x)$, что дает $s^{(1)}(x)$.
- Тогда $s^{(1)}(x)$ полиномом синдрома для $r^{(1)}(x)$ - циклического сдвига $r(x)$.

Образы ошибок	Полиномы ошибок	Синдром	Полином синдрома
0000000	0	000	0
1000000	1	100	1
0100000	x	010	x
0010000	x^2	001	x^2
0001000	x^3	110	1+x
0000100	x^4	011	$x+x^2$
0000010	x^5	111	$1+x+x^2$
0000001	x^6	101	$1+x^2$

Схема декодирования



Вопросы

- ?