Лекция. Дифференциальные Уравнения

Лектор : Сандаков Евгений Борисович – доцент кафедры №30 Высшей математики «НИЯУ МИФИ»

ОДУ. Лекция 30 сентября 2020 года

§ Определитель Вронского.

Опр.: Пусть заданы n-функций $\vec{\varphi}_1(t), \vec{\varphi}_2(t), \ldots, \vec{\varphi}_n(t)$. Тогда определитель

$$W(t) = W[\vec{\varphi}_1(t), \ldots, \vec{\varphi}_n(t)] = \det[\vec{\varphi}_1(t), \vec{\varphi}_2(t), \ldots, \vec{\varphi}_n(t)]$$

называется определителем Вронского системы функций $\vec{\varphi}_1(t), \vec{\varphi}_2(t), \ldots, \vec{\varphi}_n(t)$.

Теорема: Пусть дана система

$$\vec{y}\,'(t) = A(t)\vec{y}(t) \qquad (1_0)$$

Тогда: 1) если $\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \ldots, \vec{y}_n(t)$ — решения системы (1_0) и $\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \ldots, \vec{y}_n(t)$ линейно независимы, то для $\forall t \in \langle a; b\rangle$ $W(t) \neq 0$.

2) если $\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \ldots, \vec{y}_n(t)$ — решения системы (1_0) и $\exists t_0 \in \langle a; b\rangle : W(t_0) \neq 0$, то $\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \ldots, \vec{y}_n(t)$ линейно независимы и $W(t) \neq 0$ для $\forall t \in \langle a; b\rangle$.

3) Если $\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \ldots, \vec{y}_n(t)$ линейно зависимы, то $W(t) = 0$ для $\forall t \in \langle a; b\rangle$

4) Если $\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \ldots, \vec{y}_n(t)$ — решения системы (1_0) и $\exists t_0 \in \langle a; b\rangle : W(t_0) = 0$,

то $\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \ldots, \vec{y}_n(t)$ линейно зависимы и $W(t) \equiv 0$ (т.е $W(t)=0$ для $\forall t \in \langle a, b \rangle$)

Док-во. 1) следует из свойства 1) фундаментальной матрицы системы (1o)

2) Докажем это утверждение методом „от противного".

Пусть $\exists\, t_0 \in \langle a; b \rangle : W(t_0) \neq 0$ и $\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \ldots, \vec{y}_n(t)$ линейно зависимы.

Тогда существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n : \alpha_i \in R$ $\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \neq 0\right)$ и такие что

$$\alpha_1 \vec{y}_1(t) + \alpha_2 \vec{y}_2(t) + \ldots + \alpha_n \vec{y}_n(t) = \vec{0} \text{ для } \forall t \in \langle a, b \rangle$$

Возьмём $t = t_0 \in \langle a; b \rangle$, тогда получим

$$\vec{y}_1(t_0) + \vec{y}_2(t_0) + \ldots + \alpha_n \vec{y}_n(t_0) = \vec{0} : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \neq 0$$

Из этого равенство следует, что $\vec{y}_1(t_0), \vec{y}_2(t_0), \ldots, \vec{y}_n(t_0)$ – линейно зависимы. Отсюда следует, что $W(t_0)=0$, что противоречит предположению, что $W(t_0) \neq 0$. Полученное противоречие и доказывает утверждение.

3) следует из линейной алгебры.

4) Доказать самим методом „от противного" #

§ Формула Лиувилля

Теорема (формула Лиувилля)

Пусть $\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \ldots, \vec{y}_n(t)$ — решения системы (1₀). Тогда для определителя Вронского этой системы справедлива формула

$$W[\vec{y}_1(t), \ldots, \vec{y}_n(t)] = W(t) = W(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t} Sp A(\tau)\, d\tau\right),$$

где $Sp A(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}(t)$ — след матрицы $A(t)$.

Док-во.

Рассмотрим $W(t) = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}$ — определитель Вронского

системы $\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \ldots, \vec{y}_n(t)$ решений системы (1₀)

Возьмем производную $\frac{dW(t)}{dt}$ от определителя Вронского $W(t)$ системы решений $\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \ldots, \vec{y}_n(t)$ системы (1₀)

Как известно, производная от определителя вычисляется по формуле

$$\frac{dW}{dt}=\begin{vmatrix} y'_{11} & y'_{12} & \cdots & y'_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y'_{21} & y'_{22} & \cdots & y'_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+$$

$$\cdots+\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y'_{n1} & y'_{n2} & \cdots & y'_{nn} \end{vmatrix} \qquad (*)$$

Из системы (1) следует, что

$$y'_{ki}=\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\, y_{ij} \qquad (**)$$

Подставляя (**) в (*), получим в силу свойств определителя, что

$$\frac{dW}{dt}=\begin{vmatrix} a_{11}y_{11} & a_{11}y_{12} & \cdots & a_{11}y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ a_{22}y_{21} & a_{22}y_{22} & \cdots & a_{22}y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}+$$

$$+\cdots+\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nn}y_{n1} & a_{nn}y_{n2} & \cdots & a_{nn}y_{nn} \end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}\cdot W(t)+a_{22}W(t)+\cdots+a_{nn}W(t)=$$

$= Sp\, A(t) \cdot W(t).$

Следовательно, для определителя Вронского $W(t)$ получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dW}{dt} = Sp\, A(t)$$

Следовательно, $W(t) = C \exp\left(\int_{t_0}^{t} Sp\, A(\tau)\, d\tau\right)$, где

$C = W(t_0)$ #

<u>Следствие (из теоремы об определителе Вронского)</u>

1) Решения $\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \dots, \vec{y}_n(t)$ системы (1o) линейно независимы тогда и только тогда, когда $W(t) \neq 0$ для $\forall\, t \in \langle a; b \rangle$

2) Решения $\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \dots, \vec{y}_n(t)$ системы (1o) линейно независимы тогда и только тогда, когда $\exists\, t_0 \in \langle a; b \rangle$ такое, что $W(t_0) \neq 0$

3) решения $\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \dots, \vec{y}_n(t)$ системы (1o) линейно зависимы тогда и только тогда, когда $\exists\, t_0 \in \langle a; b \rangle$ такое, что $W(t_0) = 0$ и тогда $W(t) = 0$ для $\forall\, t \in \langle a; b \rangle$.

Замечание. Если $\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \ldots, \vec{y}_n(t)$ не являются решениями системы (1о), то Теорема Вронского неверна.

Пример. $\vec{y}_1(t) = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{y}_2(t) = \begin{bmatrix} t^2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t)$ – линейно независимы и $W(t) \equiv 0$.

§ Неоднородные системы.

Неоднородная линейная система ОДУ имеет вид

$$\vec{y}\,'(t) = A(t)\vec{y}(t) + \vec{f}(t) \qquad (1)$$

Теорема (об общем решении системы (1))

Общее решение неоднородной системы (1) $\vec{y}_{он}$ имеет вид

$$\vec{y}_{он} = \vec{y}_{оо} + \vec{y}_{чн} \qquad (*)$$

где $\vec{y}_{оо}$ – общее решение соответствующей однородной системы (1о) $(\vec{y}\,' = A(t)\vec{y}$ (1о)), а $\vec{y}_{чн}$ – частное решение неоднородной системы (1) или, если $\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \ldots, \vec{y}_n(t)$ – ФСР системы (1о), то

$$\vec{y}_{он} = \sum_{k=1}^{n} C_k \vec{y}_k(t) + \vec{y}_{чн}(t) \quad (*)$$

где $C_1, C_2, \dots, C_n$ – произвольные постоянные.

Док-во. 1) При любых $C_1, C_2, \dots, C_n$ выражение $(*)$ является решением уравнения (1). Действительно,

$$\vec{y}\,'_{он} = \vec{y}\,'_{оо} + \vec{y}\,'_{чн} = A\vec{y}_{оо} + A\vec{y}_{чн} + \vec{f} =$$

$$= A(\vec{y}_{оо} + \vec{y}_{чн}) + \vec{f} = A\vec{y}_{он} + \vec{f}$$

Следовательно $\vec{y}_{он}$ – решение уравнения (1)

2) Если $\vec{y}(t)$ – произвольное решение уравнения (1), а $\vec{y}_{чн}$ – частное решение уравнения (1), то обозначив через $\vec{z}(t) = \vec{y}(t) - \vec{y}_{чн}$ получим для $\vec{z}(t)$

$$\vec{z}\,'(t) = \vec{y}\,'(t) - \vec{y}\,'_{чн}(t) = A\vec{y} + \vec{f} - A\vec{y}_{чн} - \vec{f} =$$

$$= A(\vec{y} - \vec{y}_{чн}) = A\vec{z}.$$

Следовательно, $\vec{z}(t)$ есть решение системы (1_0) (то есть $\vec{z}(t) \in H$). Тогда $\vec{z}(t)$ можно разложить по базису H (то есть по ФСР $\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \dots, \vec{y}_n(t)$). Следовательно, существуют числа $C_1, C_2, \dots, C_n$ такие что

$\vec{y} - \vec{y}_{чн} = \sum_{k=1}^{n} C_k \vec{y}_k$. Следовательно,

$$\vec{y} = \sum_{k=1}^{n} C_k \vec{y}_k + \vec{y}_{чн} = \vec{y}_{оо} + \vec{y}_{чн} \quad \#$$

§ Решение неоднородной системы методом вариации постоянных

Теорема Если $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n$ — ФСР системы (1о), то общее решение неоднородной системы (1) может быть найдено по формуле

$$\vec{y}(t) = Y(t)\left[\int_{t_0}^{t} Y^{-1}(\tau)\vec{f}(\tau)d\tau + \vec{C}\right] \quad (*)$$

где $Y(t)$ — фундаментальная матрица системы (1о), $Y^{-1}(t)$ — обратная матрица по отношению к $Y(t)$.

Док-во: 1-ый шаг Из свойства 3) фундаментальной матрицы следует, что

$$\vec{y}_{оо}(t) = Y(t)\vec{C} \quad (**)$$

где $\vec{C}$ — постоянный вектор-столбец.

2-ой шаг Будем искать решение системы (1) в виде

$$\vec{y}(t) = Y(t) \cdot \vec{C}(t) \quad (A)$$

где вектор столбец $\vec{C}(t)$ подберем так, чтобы при подстановке (A) в (1) получим тождество.

Дифференцируя (A), получим

$$\vec{y}'(t) = Y'(t)\vec{C}(t) + Y(t)\cdot\vec{C}'(t)$$

Подставляя это в (1), получим

$$Y(t)\vec{C}'(t) + Y'(t)\vec{C}(t) = AY(t)\vec{C}(t) + \vec{f} \quad (***)$$

В силу свойства 2) фундаментальной матрицы $Y(t)$ является решением уравнения (1o), то есть $Y'(t) = AY(t)$.

Тогда из (***) следует, что

$$Y(t)\vec{C}'(t) = \vec{f} \qquad (B)$$

Так как $Y^{-1}(t)$ всегда существует (св-во 1) фундаментальной матрицы), то из (B) следует, что $\vec{C}'(t) = Y^{-1}(t)\vec{f}$

Отсюда находим $\vec{C}(t) = \int\limits_{t_0}^{t}[Y^{-1}(\tau)\vec{f}(\tau)]d\tau + \vec{C_0}$

Подставляя найденное $\vec{C}(t)$ в (A) получим утверждение теоремы #.

При решении системы (1) на практике поступают <u>иначе</u>.

Равенство (B) можно записать в виде:

$$\begin{cases} y_{11}C_1' + y_{12}C_2' + \dots + y_{1n}C_n' = f_1 \\ y_{21}C_1' + y_{22}C_2' + \dots + y_{2n}C_n' = f_2 \\ \dots \\ y_{n1}C_1' + y_{n2}C_2' + \dots + y_{nn}C_n' = f_n \end{cases}$$

Так как $W(t) \neq 0$, то по теореме Крамера существует единственное решение

$$C_k'(t) = \frac{D_k(t)}{W(t)}, \quad k = \overline{1,n},$$

где $D_k(t) = \det[\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_{k-1}, \vec{f}, \vec{y}_{k+1}, \dots, \vec{y}_n]$

§ Линейные системы с комплексными коэффициентами

$$\vec{z}\,'(t) = A(t)\vec{z}(t) + \vec{f}(t) \quad (1)$$

Будем считать, что $\vec{z} = \vec{u} + i\vec{v}$

$A = [a_{kj}]$, где $a_{kj} = \alpha_{kj} + i\beta_{kj}$ для $\forall k, j = \overline{1,n}$

и $\vec{f}(t) = \vec{F}(t) + i\vec{G}(t)$

где $\vec{u}, \vec{v}$ — неизвестные вещественные функции, а $\vec{F}(t), \vec{G}(t), \alpha_{kj}, \beta_{kj}$ — заданные вещественные функции.

Систему (1) запишем в виде

$$z_k'(t) = a_{k1}z_1 + a_{k2}z_2 + \dots + a_{kn}z_n + f_k(t)$$

где $k = \overline{1,n}$

или

$$u_k' + i v_k' = (\alpha_{k1} + i\beta_{k1})(u_1 + i v_1) + (\alpha_{k2} + i\beta_{k2})(u_2 + i v_2) + \dots$$
$$+ \dots + (\alpha_{kn} + i\beta_{kn})(u_n + i v_n) + F_k + i G_k, \quad k = \overline{1,n}$$

Приравнивая в этом равенстве вещественные и мнимые части, получим:

$$\begin{cases} u_k' = (\alpha_{k1}u_1 - \beta_{k1}v_1) + \dots + (\alpha_{kn}u_n - \beta_{kn}v_n) + F_k \\ v_k' = (\alpha_{k1}v_1 + \beta_{k1}u_1) + \dots + (\alpha_{kn}v_n + \beta_{kn}u_n) + G_k \end{cases}, \quad k = \overline{1,n} \quad (*)$$

Таким образом, мы получили систему $2n$ уравнений с $2n$ неизвестными вещественными функциями (все коэффициенты вещественные)

<u>Вывод</u>: От любой комплексной системы с n-неизвестными функциями можно перейти к вещественной системе с $2n$ — неизвестными вещественными функциями.

<u>Следствие</u>. Пусть в системе (1) $\vec{f} \equiv \vec{\theta}$ и $A(t)$ — вещественная матрица. Тогда если $\vec{z}(t) = \vec{u}(t) + i\vec{v}(t)$ — комплексное решение системы $\vec{z}'(t) = A(t)\vec{z}(t)$ — (1_0), то $\vec{u} = \operatorname{Re}\vec{z}$ и $\vec{v} = \operatorname{Im}\vec{z}(t)$ также являются решением системы (1_0)

<u>Док-во</u>: следует из равенств $(*)$ #

§ Принцип суперпозиции.

Утверждение. Пусть $\mathcal{L}\vec{y} = \vec{y}\,' - A\vec{y}$.
Тогда если $\vec{y}_1$ есть решение системы $\mathcal{L}\vec{y}_1 = \vec{f}_1$, а $\vec{y}_2$ есть решение системы $\mathcal{L}\vec{y}_2 = \vec{f}_2$, то $\vec{y} = \vec{y}_1 + \vec{y}_2$ есть решение уравнения $\mathcal{L}\vec{y} = \vec{f}$, где $\vec{f} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2$

Док-во: $\mathcal{L}\vec{y} = (\vec{y}_1 + \vec{y}_2)' - A(\vec{y}_1 + \vec{y}_2) =$
$= \vec{y}_1\,' + \vec{y}_2\,' - A\vec{y}_1 - A\vec{y}_2 = (\vec{y}_1\,' - A\vec{y}_1) + (\vec{y}_2\,' - A\vec{y}_2) =$
$= \mathcal{L}\vec{y}_1 + \mathcal{L}\vec{y}_2 = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 = \vec{f}$ #

§ Линейные системы с постоянными коэффициентами.