Механика деформируемого твердого тела

https://vk.com/mehss

Литература

1. *Садовский Б.Н., Прядко И.Н.*

   Динамика (часть 2). Конспекты лекций.

2. *Маркеев А.П. Теоретическая механика.*

   Москва: ЧеРо, 1999.

3. *Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики: в 2–х ч.*

   М.: Наука, 1965.

(см. http://vk.com/t_meh)

§ 16. Осевые кинетические моменты системы материальных точек

Рассмотрим систему матер. точек $\Sigma_A = \{A_1, \dots, A_n\}$, m_k – масса т. A_k, $r_k = r_{OA_k} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix}$ – координатный вектор т. A_k относит. инерц-й ДСО S, $v_k = \dot{r}_k$.

Тогда $M = \sum_{k=1}^{n} M_k = \sum_{k=1}^{n} r_k \times m_k v_k$ – кинетический момент системы Σ_A; M – элемент R^3 (зависящий от времени t), т.е. $M = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}$. Координаты M_x, M_y, M_z называются

осевыми кинетическими моментами системы Σ_A.

Выразим M_z через цилиндрич-е коорд-ты.

1) Сначала рассмотрим M_z для одной т. $A(x,y,z)$:

$M = M_A = r \times m v$, где $r = r_{OA}$, $v = \dot{r}$;

$M_z = \langle M, e_z \rangle$, где $e_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

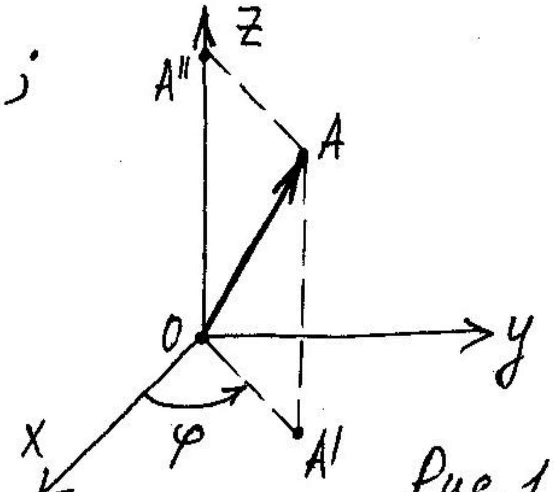


Рис. 1

Цилиндрич. коорд-ты: (ρ, φ, z), $\rho = |OA'|$,

$\varphi = (\widehat{Ox, OA'})_H$, A' – проекция A на Oxy;

$e_\rho = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$\varphi = \varphi(t)$ – зависит от времени t; $r = r_{OA} = r_{OA'} + r_{OA''} =$

$= \rho \cdot e_\rho + z \cdot e_z$

Тогда (см. рис. 1 и 2).

$v = \dot{r} = \dot{\rho} e_\rho + \rho \cdot \dot{e}_\rho + \dot{z} \overset{\text{const}}{\overset{\parallel}{\dot{e}_z}} =$

$= \dot{\rho} e_\rho + \rho\dot{\varphi} \cdot e_\varphi + \dot{z} e_z$;

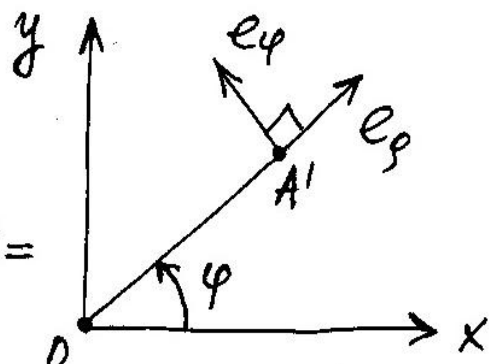
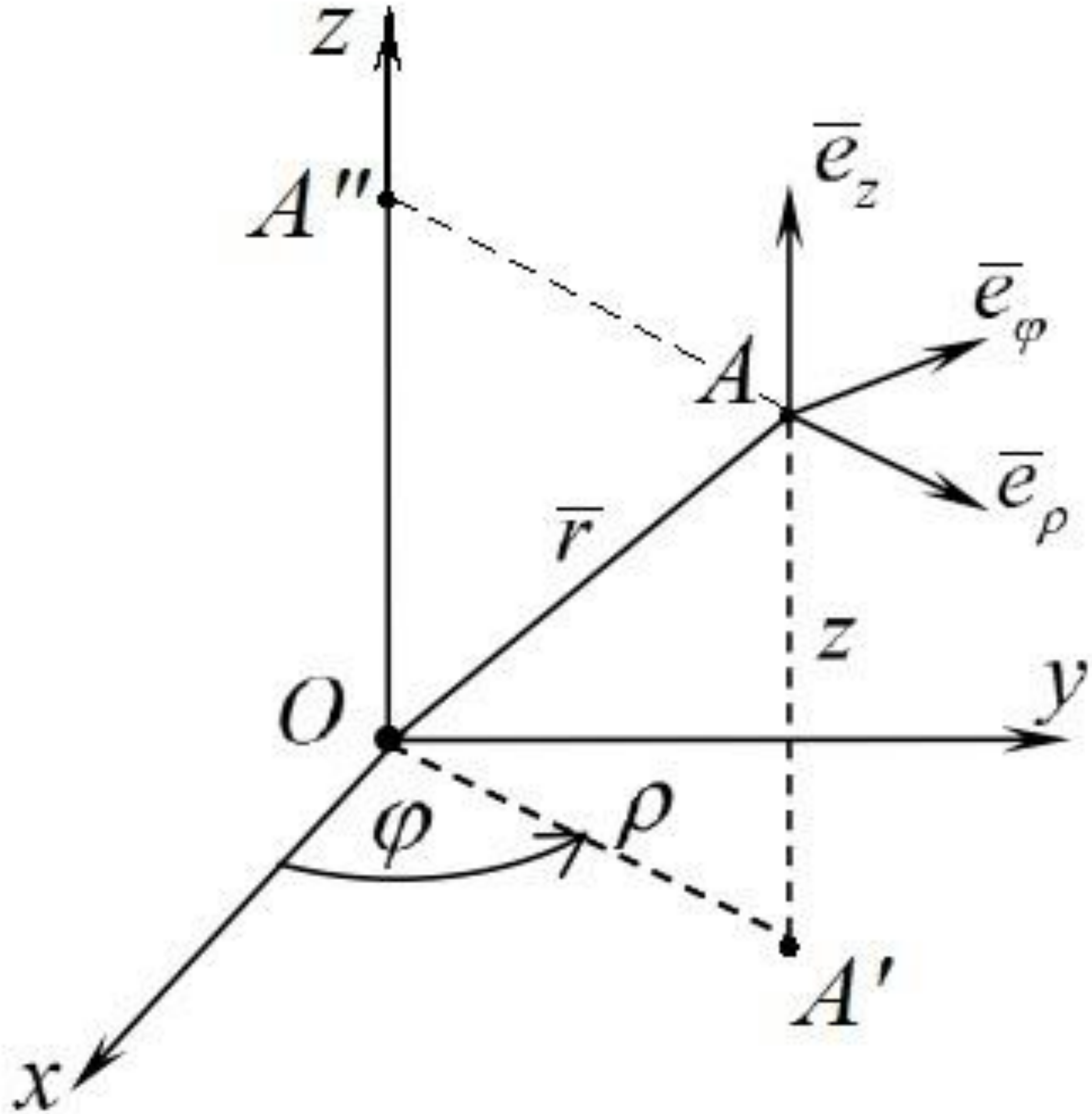


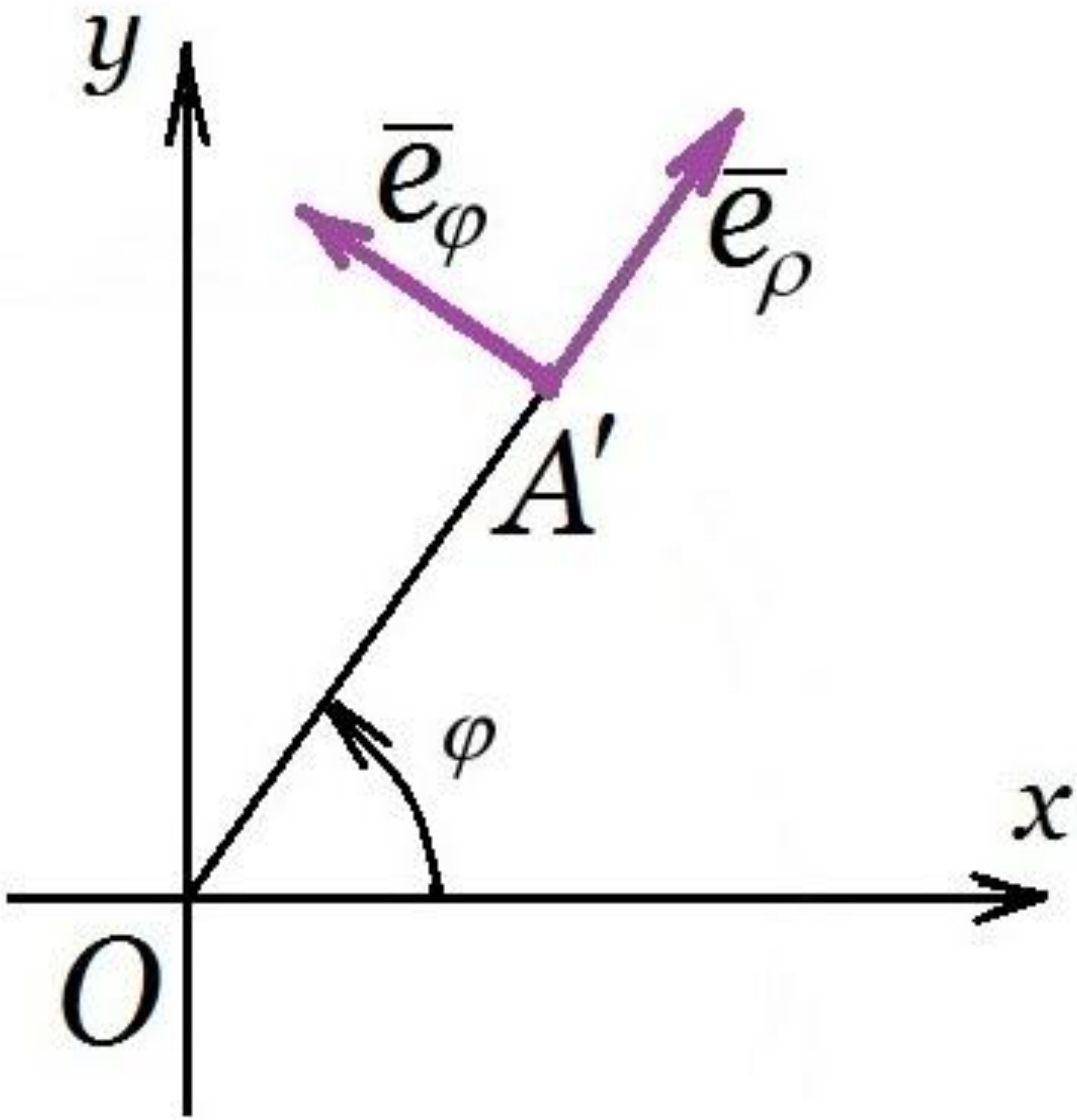
Рис. 2

$r \times v = (\rho \cdot e_\rho + z \cdot e_z) \times (\dot{\rho} e_\rho + \rho\dot{\varphi} \cdot e_\varphi + \dot{z} \cdot e_z) =$

$= \rho^2 \dot{\varphi} \cdot e_z - \rho \dot{z} \cdot e_\varphi + \dot{\rho} z \cdot e_\varphi - z \rho \dot{\varphi} \cdot e_\rho$



z
A''
$\bar{e}_z$
$\bar{e}_\varphi$
A
$\bar{e}_\rho$
$\bar{r}$
z
y
O
φ
ρ
A'
x



y
$\bar{e}_\varphi$
$\bar{e}_\rho$
A′
φ
x
O

Тогда (см. рис. 1 и 2).

$$v = \dot r = \dot\rho e_\rho + \rho\cdot\dot e_\rho + \dot z \overset{\overset{\text{const}}{\parallel}}{e_z} =$$

$$= \dot\rho e_\rho + \rho\dot\varphi\cdot e_\varphi + \dot z e_z \,;$$

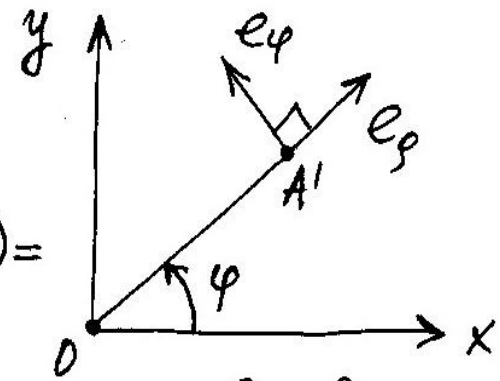


Рис. 2

$$r \times v = (\rho\cdot e_\rho + z\cdot e_z) \times (\dot\rho e_\rho + \rho\dot\varphi\cdot e_\varphi + \dot z\cdot e_z) =$$

$$= \rho^2\dot\varphi\cdot e_z - \rho\dot z\cdot e_\varphi + \dot\rho z\cdot e_\varphi - z\rho\dot\varphi\cdot e_\rho$$

(с учетом того, что $e_\rho \times e_\rho = 0$, $e_\rho \times e_\varphi = e_z$, $e_\rho \times e_z = -e_\varphi$, $e_\varphi \times e_z = e_\rho$). След-но, $M_z = \langle M, e_z\rangle = m\langle r\times v, e_z\rangle =$

$= m\rho^2\dot\varphi\,\langle e_z, e_z\rangle = m\rho^2\dot\varphi$ (т.к. $e_\rho \perp e_z$, $e_\varphi \perp e_z$).

Итак, получили: $\boxed{M_z = m\rho^2\dot\varphi}$ (1)

2) Рассмотрим M_z для системы точек Σ_A:

$$\boxed{M_z = \sum_{k=1}^{n} (M_k)_z = \sum_{k=1}^{n} m_k \rho_k^2 \dot{\varphi}_k} \quad (2)$$

$\rho_k = |OA'_k|$

A'_k – проекция A_k на Oxy

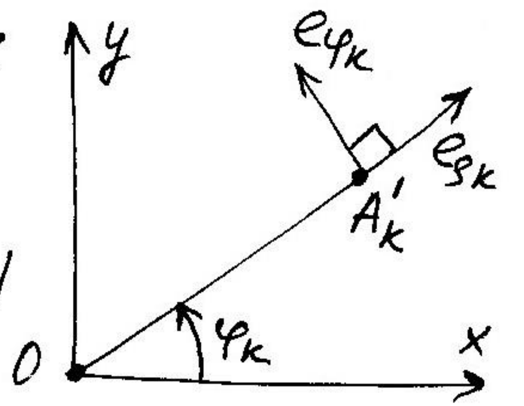


Рис. 3

3) Рассмотрим скорость изменения момента M_z:

$$\dot{M}_z(t) = \frac{d}{dt}\langle M(t), \underset{\text{const}}{\overset{}{e_z}} \rangle = \langle \dot{M}(t), e_z \rangle =$$

$$= \langle \underbrace{\sum_{k=1}^{n} r_k \times F_k^e}_{\substack{\text{сумма моментов всех} \\ \text{внешних сил системы } \Sigma_A \text{ (th)}}}, e_z \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle \underset{a}{r_k} \times \underset{b}{F_k^e}, \underset{c}{e_z} \rangle =$$

Смешанное произвед-е: $\langle a \times b, c \rangle = (a, b, c) \overset{\text{(не изменяется при циклической перест-ке)}}{=} (c, a, b) =$

$= \langle c \times a, b \rangle.$

3) Рассмотрим скорость изменения момента M_z:

$$\underline{\dot{M}_z(t)} = \frac{d}{dt}\langle M(t), \underset{\substack{\| \\ \text{const}}}{e_z} \rangle = \langle \dot{M}(t), e_z \rangle =$$

$$= \langle \underbrace{\sum_{k=1}^{n} r_k \times F_k^e}_{\substack{\text{сумма моментов всех} \\ \text{внешних сил системы } \Sigma_A \ (\underline{\underline{th}})}}, e_z \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle \underset{a}{r_k} \times \underset{b}{F_k^e}, \underset{c}{e_z} \rangle \circledequal$$

Смешанное произвед-е: $\langle a \times b, c \rangle = (a, b, c) \overset{\text{(не изменится при циклической перест-ке)}}{=} (c, a, b) =$

$$= \langle c \times a, b \rangle.$$

$$\circledequal \sum_{k=1}^{n} \langle \underset{c}{e_z} \times \underset{a}{r_k}, \underset{b}{F_k^e} \rangle = \underline{\sum_{k=1}^{n} \rho_k \langle e_{\varphi_k}, F_k^e \rangle}$$

$$\left(e_z \times r_k = e_z \times (\rho_k e_{\rho_k} + z_k e_z) = \rho_k (e_z \times e_{\rho_k}) = \rho_k \cdot e_{\varphi_k} \right)$$

Итак, мы получили след-ю формулу:

$$\boxed{\dot{M}_z = \sum_{k=1}^{n} \rho_k \langle e_{\varphi_k}, F_k^e \rangle} \quad (3)$$

Итак, мы получили след-ю формулу:

$$\boxed{\dot{M}_z = \sum_{k=1}^{n} \rho_k \langle e_{\varphi_k}, F_k^e \rangle} \quad (3)$$

Заметим, что вектор $\mu_k = r_k \times F_k^e$ – момент силы F_k^e относительно центра O (начала координат);

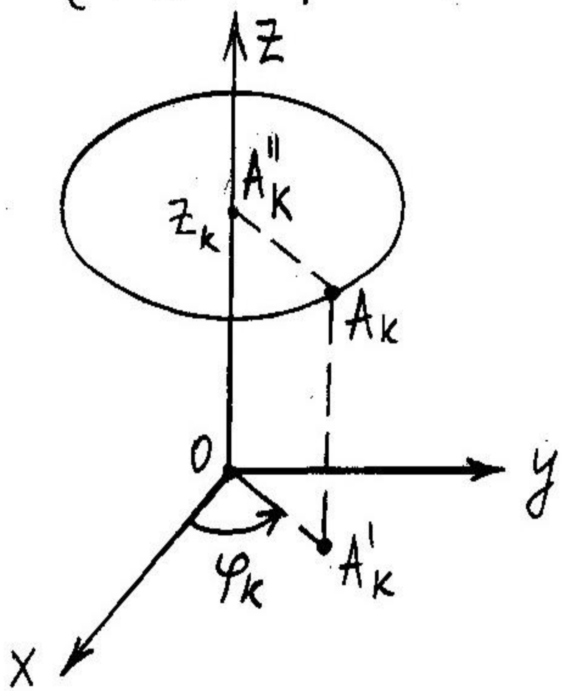
$\mu_k = \begin{pmatrix} (\mu_k)_x \\ (\mu_k)_y \\ (\mu_k)_z \end{pmatrix}$, $(\mu_k)_z = \langle \mu_k, e_z \rangle = \langle r_k \times F_k^e, e_z \rangle$ – момент силы F_k^e относительно оси Oz.

Мы доказали след-ю теорему.

<u>Теорема</u>. Скорость изменения осевого кинетического момента M_z равна сумме моментов всех внешних сил системы относительно оси Oz.

§ 17. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Рассмотрим твердое тело T — неизменяемую систему матер. точек $\{A_1, \dots, A_n\}$. Пусть тело T вращается вокруг оси Oz некоторой инерциальной системы отсчёта, т.е. для $\forall$т. $A_k \in T$ $z_k(t) = const$ и $|OA'_k| = const$ (A'_k — проекция A_k на Oxy). Точка A_k движется по

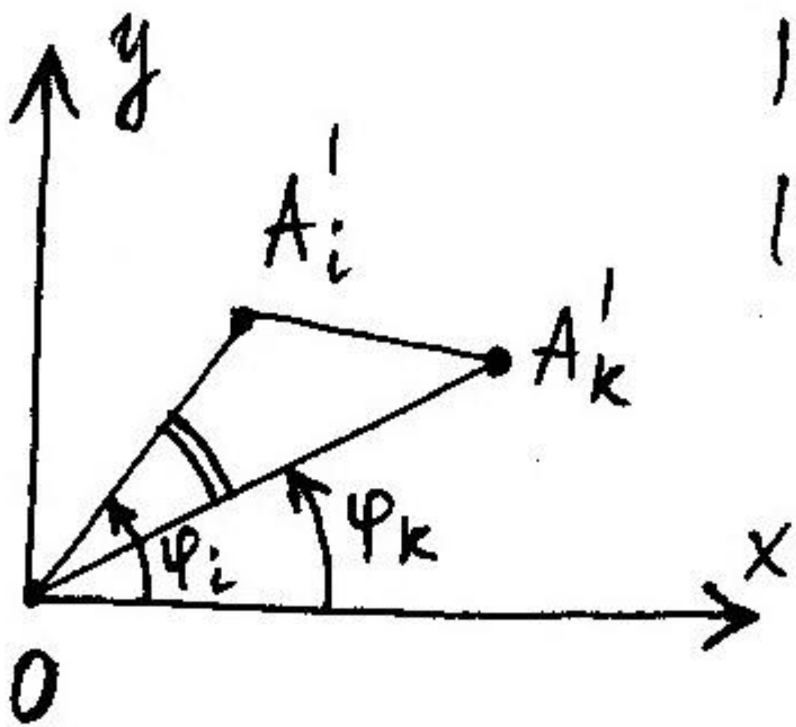


окружности радиуса $\rho_k = |OA'_k|$ с центром в т. $A''_k(0, 0, z_k)$, лежащей в плоскости $z = z_k$ ($\parallel$-й Oxy).

<u>Угловая скорость тела T</u>

$\omega(t) = \omega_k(t) = \dot{\varphi}_k(t)$ не зависит от выбора точки $A_k \in T$

(для $\forall$-х точек $A_i, A_k \in T$ $\varphi_i - \varphi_k = const \Rightarrow \dot{\varphi}_i = \dot{\varphi}_k$)



$$|OA_i'| = \rho_i = const,$$

$$|OA_k'| = \rho_k = const,$$

$$|A_iA_k| = const$$

$$\Downarrow$$

$$|A_i'A_k'| = const$$

След-но, угол $\varphi_i - \varphi_k = const.$

Рассмотрим осевой кинетический момент тв. тела 'T':

$$\boxed{M_z = \sum_{k=1}^{n} \rho_k^2 m_k \dot{\varphi}_k = \sum_{k=1}^{n} \rho_k^2 m_k \omega = \omega \sum_{k=1}^{n} m_k \rho_k^2} \quad (1)$$

(причём $\rho_k = const \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} m_k \rho_k^2 = const$; $\omega = \omega(t)$ – зависит от времени).

Постоянная величина $\boxed{\sum_{k=1}^{n} m_k \rho_k^2 \overset{\text{обозн.}}{=\!=} I_z}$ (2) называется

<u>моментом инерции твердого тела</u> T относительно оси Oz.

Из (1) и (2) $\Rightarrow$ $M_z = \omega \cdot I_z$ $\Rightarrow$ $\boxed{\dot{M}_z(t) = \dot{\omega}(t) \cdot \underset{const}{I_z}}$

Формула (3) из § 16: $\boxed{\dot{M}_z = \sum_{k=1}^{n} \rho_k \langle e_{\varphi k}, F_k^e \rangle}$

След-но, $\boxed{\dot{\omega} I_z = \sum_{k=1}^{n} \rho_k \langle e_{\varphi k}, F_k^e \rangle}$ (3)

Итак, мы доказали след-ю теорему.

<u>Теорема</u>. При вращении твердого тела вокруг оси Oz произведение углового ускорения тела на момент инерции тела относительно Oz равно сумме моментов всех внешних сил тв. тела относительно Oz.

Пример

Фигурист совершает вращение сначала с поднятыми руками, затем с опущенными. Как при этом изменяется его угловая скорость ? Трением и сопротивлением воздуха пренебрегаем.

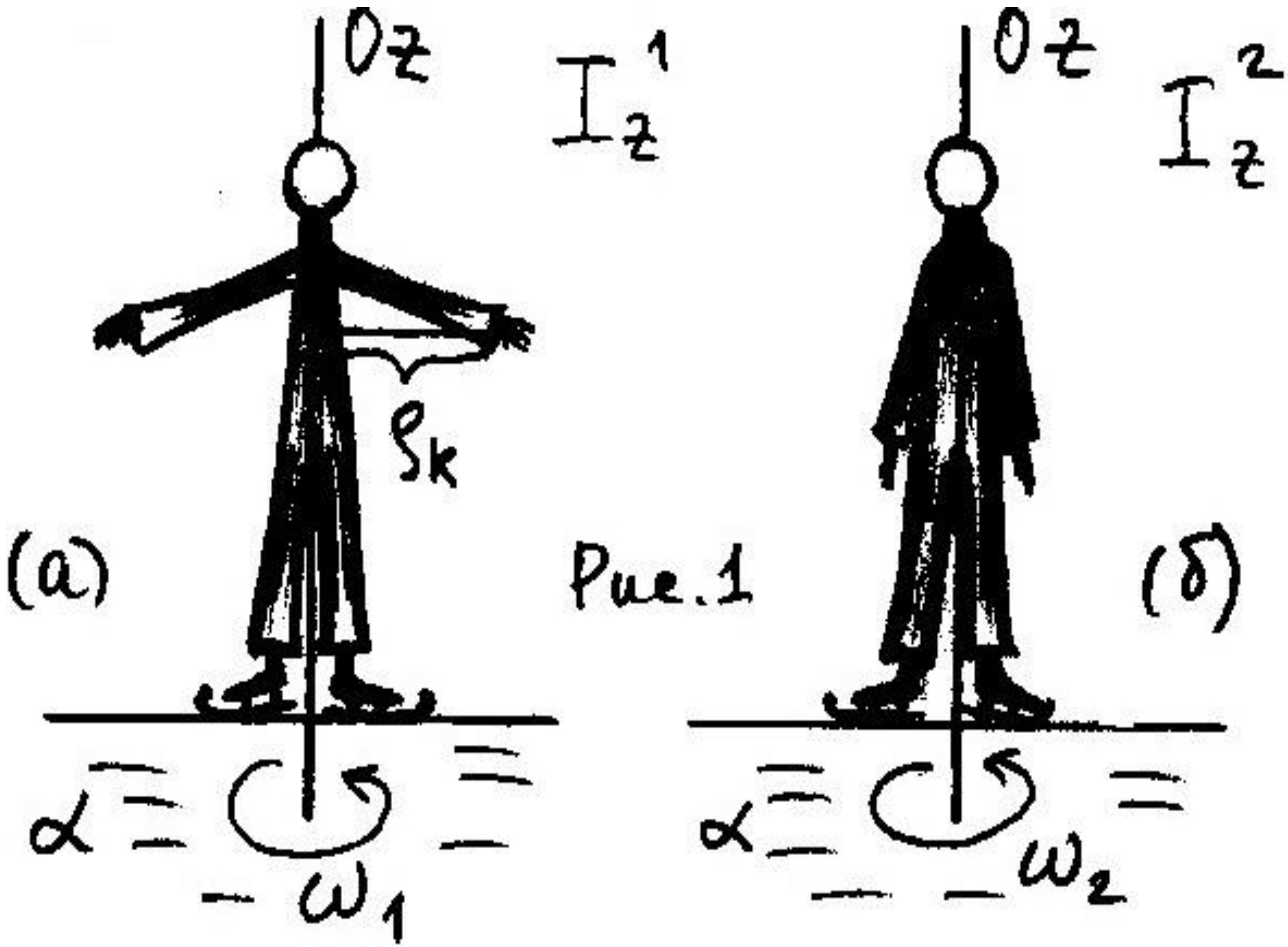


Рис.1

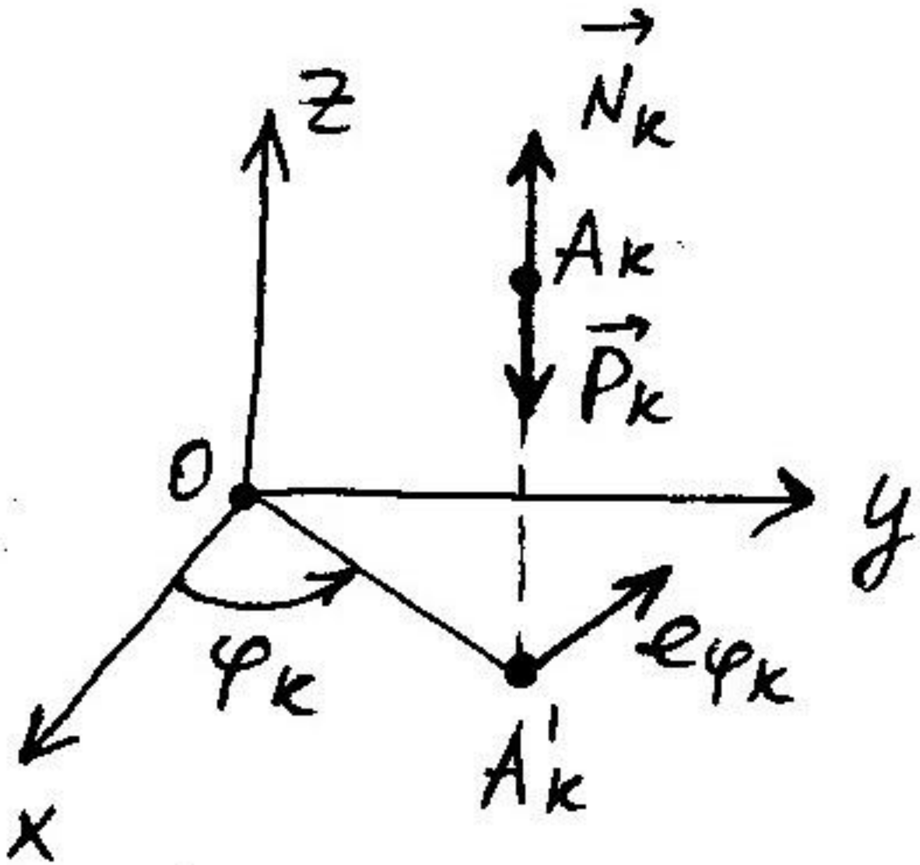
Как соотносятся ω_1 и ω_2?

Ось вращения $Oz \perp \alpha$ – плоскости льда.

Тело фигуристa – система матер. точек (молекул).

Скорость изменения осевого кинетич. момента M_z данной системы:

$$\dot{M}_z = \sum_{k=1}^{n} \rho_k \langle e_{\varphi k}, F_k^e \rangle \quad (\text{см. } §16).$$



$Oxy = \alpha$

$\rho_k = |OA'_k|$

Рис. 2

Пусть $Oxy = \alpha$.

На каждую точку A_k тела д-ют две внешние силы: сила тяжести $\vec{P}_k$ и реакция опоры $\vec{N}_k$, являющиеся вертикальными. След-но, $\forall k$

$\vec{F}_k^e = \vec{P}_k + \vec{N}_k \perp Oxy$.

Вектор $\vec{e}_{\varphi_k} \parallel Oxy \Rightarrow \vec{F}_k^e \perp \vec{e}_{\varphi_k}$ (см. рис. 2) $\Rightarrow \langle \vec{e}_{\varphi_k}, \vec{F}_k^e \rangle = 0$ $\forall k$.

След-но, $\dot{M}_z = 0 \Rightarrow \boxed{M_z = const}$ (в течение того промежутка времени, когда фигурист вращается)

<u>Случай 1</u> (<u>руки подняты</u>) Будем рассм-ть тело фигуриста как твердое тело. Имеем: $\boxed{M_z = \omega_1 \cdot I_z^1}$, $I_z^1 = const$ — момент инерции тв. тела.

<u>Случай 2</u> (<u>руки опущены</u>) Тело фигуриста — другое твердое тело, I_z^2 — его момент инерции, $I_z^2 \neq I_z^1$, $I_z^2 = const$.

В этом случае также $\boxed{M_z = \omega_2 I_z^2}$

Т.к. M_z не изменяется (не зависит от положения рук), то

$\boxed{\omega_1 I_z^1 = \omega_2 I_z^2}$ (*) Т.к. $I_z \overset{\text{опр.}}{=} \sum_{k=1}^{n} \rho_k^2 m_k$, то $\boxed{I_z^1 > I_z^2}$

(для рук ρ_k в первом случае больше).

Тогда $\boxed{\omega_1 < \omega_2}$

Моменты инерции твердого тела с точки зрения МСС.

Если тв. тело рассматривается как сплошная среда, то его моменты инерции вычисляются по след-м формулам:

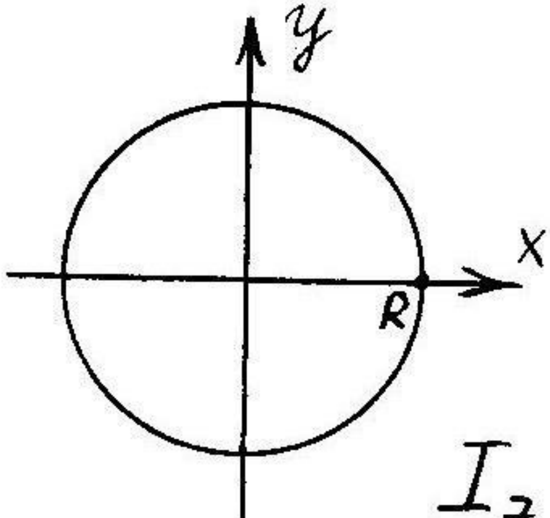
$$I_x = \iiint\limits_{(V)} (y^2+z^2)\,\rho(x,y,z)\,dV,$$

$$I_y = \iiint\limits_{(V)} (x^2+z^2)\,\rho\,dV, \quad I_z = \iiint\limits_{(V)} (x^2+y^2)\,\rho\,dV,$$

где $\rho(x,y,z)$ — плотность вещества.

Задачи

N1. Найти моменты инерции однородного тонкого круглого диска радиуса R.



Масса равномерно распределена по площади диска; $\tilde{\rho}(x,y) = const$.

$$\underline{I_z} = \iint\limits_{(P)} (x^2+y^2)\tilde{\rho}\, dP =$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\alpha, \\ y = \rho\sin\alpha; \end{cases} \quad D = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\alpha \\ y'_\rho & y'_\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\rho\sin\alpha \\ \sin\alpha & \rho\cos\alpha \end{vmatrix} = \rho;$$

$$\boxed{x^2+y^2=\rho^2}$$

$$= \tilde{\rho} \iint\limits_{(P)} \rho^3\, dP = \tilde{\rho} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^R \rho^3 d\rho = \tilde{\rho}\cdot 2\pi \cdot \frac{R^4}{4} =$$

$$\boxed{x^2+y^2=\rho^2}$$

$$= \tilde{\rho}\iint\limits_{(P)}\rho^3\,dP = \tilde{\rho}\int\limits_0^{2\pi}d\alpha\int\limits_0^R\rho^3\,d\rho = \tilde{\rho}\cdot 2\pi\cdot\frac{R^4}{4} =$$

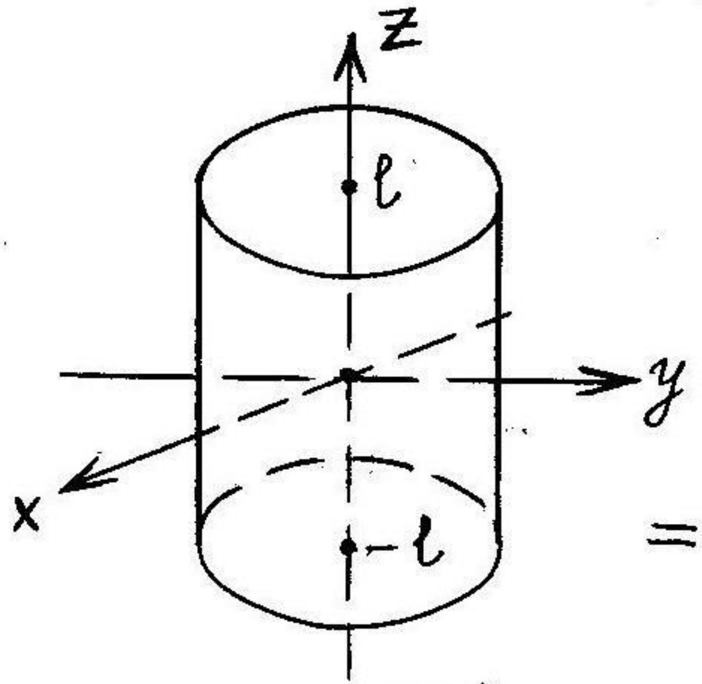
$$= \tilde{\rho}\,\frac{\pi R^4}{2} = \quad \tilde{\rho} = \frac{M}{\pi R^2} \quad = \underline{\frac{MR^2}{2}}.$$

$$\underline{I_x} = \tilde{\rho}\iint\limits_{(P)}(y^2 + \underset{\overset{\parallel}{0}}{z^2})\,dP = \tilde{\rho}\int\limits_0^{2\pi}d\alpha\int\limits_0^R\rho^3\sin^2\alpha\,d\rho =$$

$$\boxed{\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}} = \tilde{\rho}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\,d\alpha\cdot\int\limits_0^R\rho^3\,d\rho =$$

$$= \tilde{\rho}\cdot\frac{\pi R^4}{4} = \frac{M}{\pi R^2}\cdot\frac{\pi R^4}{4} = \underline{\frac{MR^2}{4}}; \quad \underline{I_y = \frac{MR^2}{4}}.$$

№2. Найти момент инерции однородного кругового цилиндра (см. рис.).



R — радиус основания;

$2l$ — высота.

$$\underline{I_z} = \tilde{\rho} \iiint\limits_{(V)} (x^2+y^2)\,dV =$$

$$= \tilde{\rho} \int_{-l}^{l} dz \iint\limits_{\substack{(P)\\ \text{круг}}} (x^2+y^2)\,dx\,dy =$$

(см. N1)

$$= \tilde{\rho} \cdot 2l \cdot \frac{\pi R^4}{2} =$$

$$V = \pi R^2 \cdot 2l\,; \quad \tilde{\rho} = \frac{M}{V} = \frac{M}{2\pi R^2 l}$$

$$= \frac{MR^2}{2}.$$

$$\underline{I_x} = \tilde{\rho} \iiint\limits_{(V)} (y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \tilde{\rho} \int\limits_{-\ell}^{\ell} dz \iint\limits_{(P)} (y^2 + z^2)\, dx\, dy = \quad y^2 = \rho^2 \sin^2\alpha$$

$$= \tilde{\rho} \int\limits_{-\ell}^{\ell} dz \iint\limits_{(P)} (\rho^2 \sin^2\alpha + z^2)\, \rho\, d\rho\, d\alpha =$$

(<u>см. N1</u>)

$$= \underline{M\left(\frac{R^2}{4} + \frac{\ell^2}{3}\right)}; \qquad \underline{I_y = I_x.}$$

N 3. Найти моменты инерции однородного шара радиуса R массы М с центром в начале координат.

N 4. Найти моменты инерции однородного кольца массы М с центром в начале координат, лежащего в плоскости Oxy, если радиус внутренней окружности равен R, а радиус внешней окружности равен $2R$.