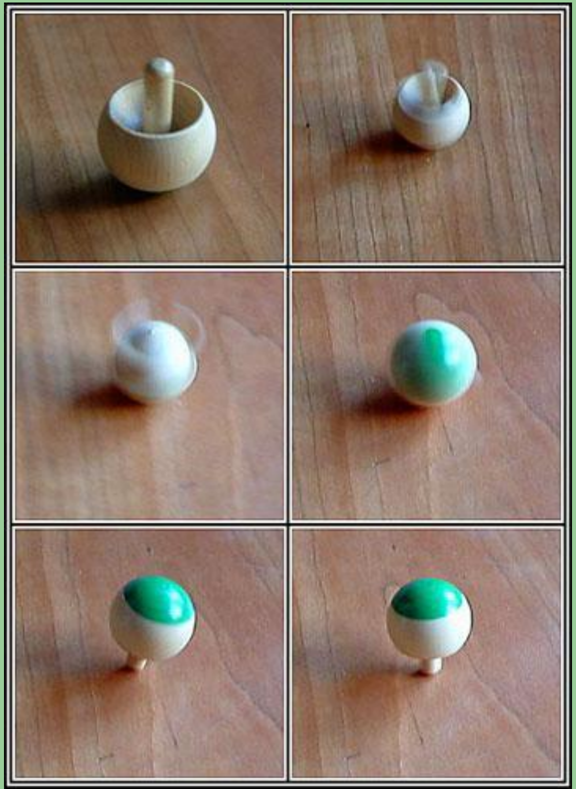
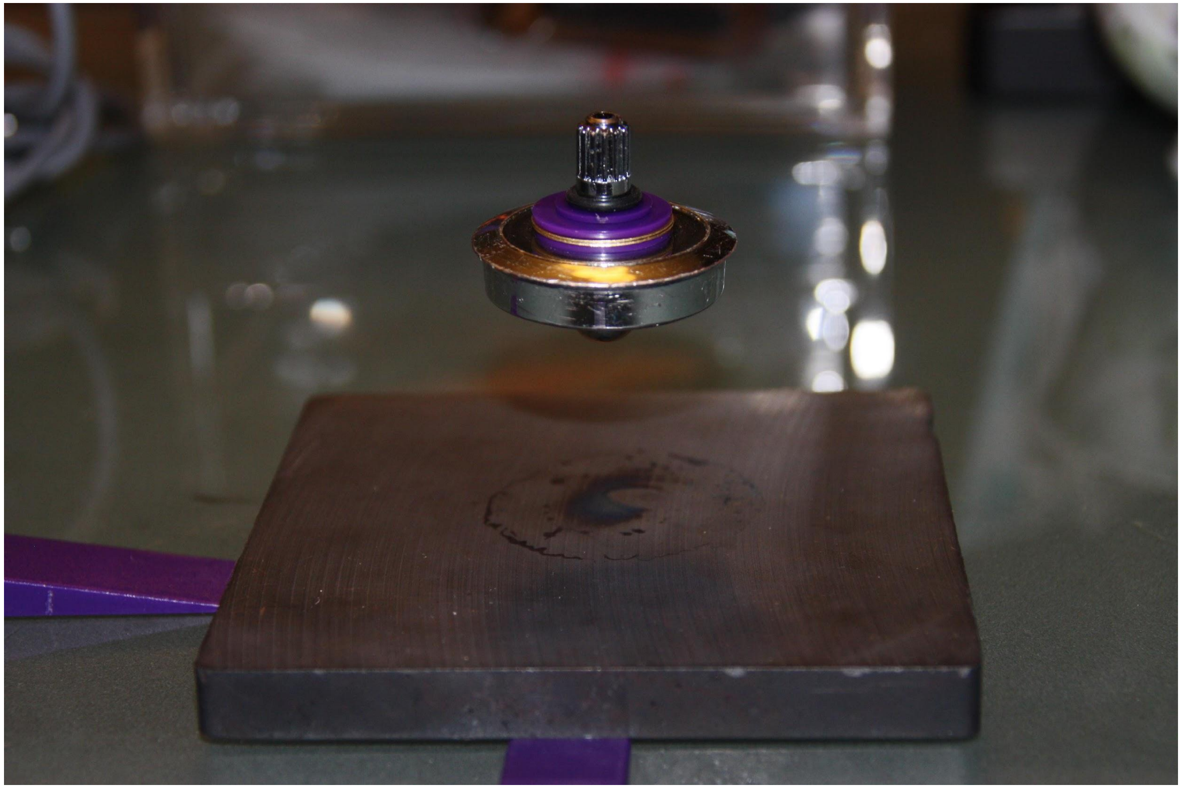
Лекция № 11
Вращение твердого тела



Алексей Викторович Гуденко

26/04/2018

Волчок над магнитным столиком



Волчок над магнитным столиком

План лекции

- Вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси.
- Момент инерции. Теорема Гюйгенса-Штейнера.
- Кинетическая энергия вращающегося твёрдого тела. Кинетическая энергия тела при плоском движении. Работа момента сил.
- Применение законов динамики твёрдого тела: скатывание тел с наклонной плоскости, диск Максвелла.
- Гироскопы

Демонстрации

1. Скатывание тел
2. Диск Максвелла
3. Свободное вращение
4. Непослушная катушка
5. Цирковая тарелка
6. Китайский волчок
7. Гироскоп, бегающий по контуру
8. Гироскоп в шаре
9. Вынужденная прецессия колеса
10. Двойной гироскоп

Виды движения твёрдого тела. Поступательное движение.

- Абсолютно твёрдое тело – это тело, деформациями которого в условиях данной задачи можно пренебречь
- Поступательное движение – это такое движение, при котором тело перемещается параллельно самому себе.
- Все точки тела при этом имеют одинаковую скорость и описывают одинаковые траектории, смещённые по отношению друг к другу.
- Примеры поступательного движения:

1. стрелка компаса: при перемещении компаса в горизонтальной плоскости стрелка остаётся параллельной самой себе;
2. кабина колеса обозрения

Вращательное движение твёрдого тела

- При вращательном движении все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат в плоскости, перпендикулярной оси вращения (ось вращения может находиться и вне тела).
- Угловые скорости всех точек **ω** одинаковы. **ω** направлена вдоль оси вращения в соответствие с правилом буравчика.
- Линейные скорости точек: **v** = **ω** x **r**, где **r** – радиус-вектор, проведённый из любой точки оси.

Плоское движение твёрдого тела

- Любое движение твёрдого тела – это суперпозиция поступательного и вращательного движений.
- При плоском движении все точки тела перемещаются в параллельных плоскостях.
- Пример плоского движения – качение цилиндра.
  Скорость каждой точки цилиндра:
  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega}\mathrm{x}\mathbf{r}$ ($\mathbf{v}_0$ – скорость оси)

Вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси

- $L_z = \Sigma r_i m_i v_i = \omega \Sigma m_i r_i^2 = I_z \omega$,
  r_i – расстояние до оси ращения
- $I_z = \Sigma m_i r_i^2 = \Sigma m_i (x_i^2 + y_i^2) = \int r^2 dm$ – момент инерции твёрдого тела относительно оси z.
- Основное уравнение динамики вращательного движения тела вокруг неподвижной оси
  $I_z d\omega/dt = M_z$
  (M_z – z-проекция момента внешних сил)

Кинетическая энергия вращающегося твёрдого тела. Работа момента сил

- Кинетическая энергия вращающегося тела
$K = \Sigma m_i v_i^2/2 = ½\Sigma m_i(\omega r_i)^2 = I_z\omega^2/2 = L_z^2/2I = ½\, L_z\, \omega$
- В общем случае $K = ½\,(\mathbf{L}\boldsymbol{\omega})$
- Работа момента силы при повороте:
$dA = (\mathbf{F}d\mathbf{s}) = Frd\varphi = M_z d\varphi$

Свойства момента инерции

- Момент инерции – скалярная аддитивная величина.
- **Теорема Гюйгенса – Штейнера**:
  момент инерции I относительно произвольной оси равен сумме момента инерции I_C относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс, и произведения массы тела на квадрат расстояния **a** до центра масс:
  $I = I_c + ma^2$
- Доказательство:
  по теореме Кёнига для кинетической энергии:
  $K = I\omega^2/2 = mv_c^2/2 + I_c\omega^2/2 = m(\omega a)^2/2 + I_c\omega^2/2 = \frac{1}{2}(ma^2 + I_c)\omega^2 \Rightarrow I = I_c + ma^2$

Теорема о взаимно перпендикулярных осях

- Момент инерции плоского тела относительно произвольной оси z, перпендикулярной его плоскости, равен сумме моментов относительно двух взаимно перпендикулярных осей x и y, лежащих в плоскости тела и пересекающихся с осью z:
  $I_z = I_x + I_y$
- Доказательство:
  $I_x = \Sigma m_i(y_i^2 + z_i^2) = \Sigma m_i y_i^2$
  $I_y = \Sigma m_i(x_i^2 + z_i^2) = \Sigma m_i x_i^2 \Rightarrow$
  $I_z = \Sigma m_i(y_i^2 + x_i^2) = I_x + I_y$

Моменты инерции различных тел

- Тонкий обруч, полый цилиндр (относительно оси симметрии): $I = mr^2$
- Диск: $I = ½\ mr^2$
- Тонкий длинный стержень:
  $I = 1/12\ mL^2$ – относительно середины;
  $I = 1/3\ mL^2$ - относительно конца
- Плоский прямоугольник:
  $I = 1/12\ m(a^2 + b^2)$
- Сфера: $I = 2/3\ mr^2$
- Однородный шар: $I = 2/5\ mr^2$
- Толстостенный цилиндр (относительно оси цилиндра):
  $I = ½\ m(r^2 + R^2)$

Плоское движение твёрдого тела

- Плоское движение есть суперпозиция поступательного движения центра масс и вращательного движения в системе центра масс.
- Движение центра масс определяется внешними силами по закону Ньютона.
- Вращательное движение определяется моментом внешних сил

Скатывание с наклонной плоскости. Уравнение движения

- С каким ускорением скатывается цилиндр (круглое тело) с наклонной плоскости.
- Решение:
  уравнение моментов относительно мгновенной оси:
  $I_A d\omega/dt = M_A \Rightarrow I_A a = M_A r \Rightarrow$
  $a = mgr^2 \sin\alpha/I_A = g\sin\alpha/(1 + I_c/mr^2)$
- Труба: $a = \frac{1}{2} g\sin\alpha$
- Сплошной цилиндр: $a = 2/3\ g\sin\alpha$
- Полый шар: $a = 3/5\ g\sin\alpha$
- Однородный шар: $a = 5/7\ g\sin\alpha$

Скатывание с наклонной плоскости. Закон сохранения энергии

- $\frac{1}{2} I_A \omega^2 = mgx\sin\alpha$ ⇨
  $\frac{1}{2} I_A (\omega r)^2 = mgr^2 x\sin\alpha$ ⇨
  $v^2 = 2mgr^2 x\sin\alpha / I_A$ ⇨
  $2va = 2mgr^2 v\sin\alpha / I_A$ ⇨
  $a = mgr^2\sin\alpha/(I_c + mr^2) = g\sin\alpha/(1 + I_c/mr^2)$

Диск Максвелла

- R = 10 см; r = 0,5 см. С каким ускорением опускается диск.
- Решение:
  $I_A d\omega/dt = M_A \Rightarrow$
- $I_A d(\omega r)/dt = M_A r \Rightarrow$
- $I_A dv_0/dt = M_A r \Rightarrow$
  $a = mgr^2/I_A = g/(1 + R^2/2r^2) \approx g/200 \approx 5$ см/с^2

Свободные оси. Главные оси

- Ось вращения, направление которой в пространстве остаётся неизменным без действия на неё внешних сил, называется **свободной осью.**
- **Главные оси - три свободных взаимно перпендикулярных оси, проходящие через центр масс.**
- При вращении вокруг главной оси $\mathbf{L_1} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}_\mathbf{1}$
- Для произвольной оси: $\mathbf{L} = \mathbf{I}_1\boldsymbol{\omega}_\mathbf{1} + \mathbf{I}_2\boldsymbol{\omega}_2 + \mathbf{I}_3\boldsymbol{\omega}_3$
- Все оси симметрии твёрдого тела являются главными осями инерции.

Особенности вращения шаровых, симметричных и асимметричных волчков.

- Главными называются моменты инерции относительно главных осей.
- Шаровой волчок: $I_1 = I_2 = I_3$. Любая ось, проходящая через центр масс – свободная (шар, куб)
- $I_1 = I_2 \neq I_3$ – симметричный волчок (диск, стержень) – при внешнем воздействии устойчиво вращается вокруг оси с наибольшим I
- $I_1 \neq I_2 \neq I_3$ - асимметричный волчок (параллелепипед) – устойчиво вращается вокруг осей с I_{max} и I_{min}
- $I = I_1\cos^2\alpha + I_2\cos^2\beta + I_3\cos^2\gamma$ - момент инерции относительно произвольной оси.

Гироскоп

- Гироскоп – твёрдое тело, быстро вращающееся относительно оси симметрии.
- Гироскопическое приближение: скорость прецессии $\Omega \ll \omega \Rightarrow \mathbf{L} = I_0\boldsymbol{\omega}$.
- Уравновешенный гироскоп ($M = 0$) сохраняет своё направление в пространстве.
- Вынужденная прецессия: $M \neq 0 \Rightarrow$
  $d\mathbf{L} = \mathbf{M}dt \Rightarrow$
  $L\sin\theta d\varphi = mga \sin\theta\, dt \Rightarrow$
  скорость прецессии $\Omega = d\varphi/dt = mga/I_0\omega$ – не зависит от угла наклона оси гироскопа.

Применение гироскопов

- В морской и авиа навигации: гирогоризонт, гирокомпас – гироскоп в кардановом подвесе сохраняет своё направление.
- Стабилизация артиллеристского снаряда (в нарезном орудии) – вращающийся снаряд не кувыркается.

Условие равновесие твёрдого тела

Тело будет оставаться в покое, если:

1. Равнодействующая всех сил, приложенных к телу, равна нулю:
   $\mathbf{F} = \Sigma \mathbf{F}_i = 0$
2. Суммарный момент сил относительно любой точки равен нулю:
   $\mathbf{M} = \Sigma \mathbf{M}_i = 0$