Потенциальные течения

Для наглядности будем рассматривать двумерный случай движения частиц жидкости. В общем случае элементарная частица жидкости перемещается с поступательной скоростью, деформируется и вращается вокруг оси, проходящей через частицу.

В плоском случае, вращение может происходить только вокруг оси, перпендикулярной плоскости течения. Угловая скорость вращения частицы:

$$\omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Обозначим величину ω – ***местной завихренностью***.

Безвихревым называется движение жидкости при ω = 0 во всей рассматриваемой области. В противном случае течение называется вихревым.

Условием безвихревого течения является:

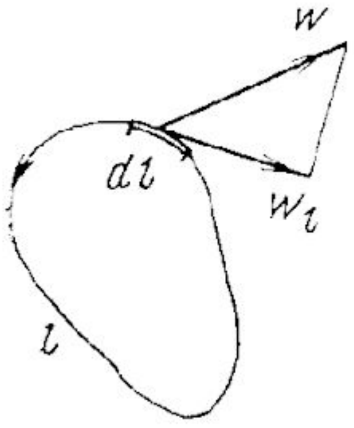
$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Введем понятие ***циркуляция скорости*** Г по замкнутому контуру ***l*** :

$$\Gamma = \oint_l \omega_l dl$$

Где ω_l - проекция скорости на касательную к контуру,

d***l*** – элемент дуги контура.



Интеграл по замкнутому криволинейному контуру можно записать в декартовых координатах и применить формулу Стокса:

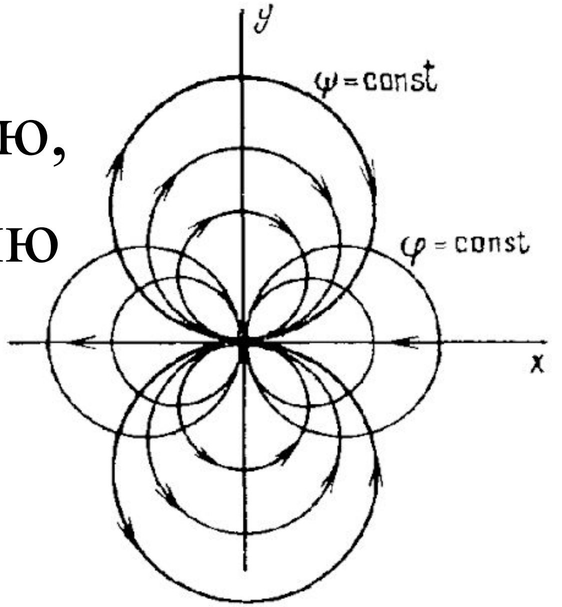
$$\Gamma = \oint_{l} u\,dx + v\,dy = \int_{s} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx\,dy.$$

Введя местную завихренность получим теорему Стокса: $\Gamma = 2\int_{S} \omega\, ds$

где ds – элемент площади внутри контура.

Следовательно, если течение безвихревое, то циркуляция скорости по любому замкнутому контуру равна нулю: Г = 0.

Если циркуляция скорости по данному контуру равна нулю, то нельзя утверждать, что течение безвихревое. Равна нулю лишь ***суммарная завихренность*** внутри контура.



Уравнение Эйлера

Для плоского установившегося движения идеальной жидкости:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x};$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}.$$

Введя обозначение модуля скорости: $w^2 = u^2 + v^2$

получим уравнение в виде Громека – Лэмба:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial w^2}{\partial x}-2v\omega=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x};$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial w^2}{\partial y}+2u\omega=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}.$$

Для безвихревого движения уравнения преобразуются в одно уравнение в полных дифференциалах:

$$wdw+\frac{dp}{\rho}=0$$

Уравнение Бернулли

Проинтегрировав уравнение при ρ = const, получим уравнение для несжимаемой жидкости:

$$\frac{w^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho} = const$$

Бернулли получил это уравнение в 1738г., причем с учетом силы тяжести жидкости:

$$\frac{w^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gh = const$$

где h – высота столба жидкости.

Для изэнтропического течения сжимаемой жидкости в пространственном течении уравнение Бернулли принимает вид:

$$\frac{w^2}{2} + \frac{k}{k-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \frac{k}{k-1}\frac{p_0}{\rho_0} = const$$

Рассмотрим плоское установившееся безвихревое движение

Для безвихревого движения можно ввести ***потенциал скорости*** являющийся функцией φ(x, y), удовлетворяющей условиям:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

Так как потенциал скорости можно ввести ***только*** для ***безвихревого*** движения, то такие течения называют ***потенциальными***.

Для выполнения уравнения сохранения массы потенциал скорости для несжимаемой жидкости должен удовлетворять уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 y} = 0$$

Удобно ввести еще ***функцию тока***: ψ(x, y), удовлетворяющую условиям:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

, также удовлетворяющую уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 y} = 0$$

Линия в жидкости, касательная к которой в любой ее точке параллельна направлению скорости, называется ***линией тока.***

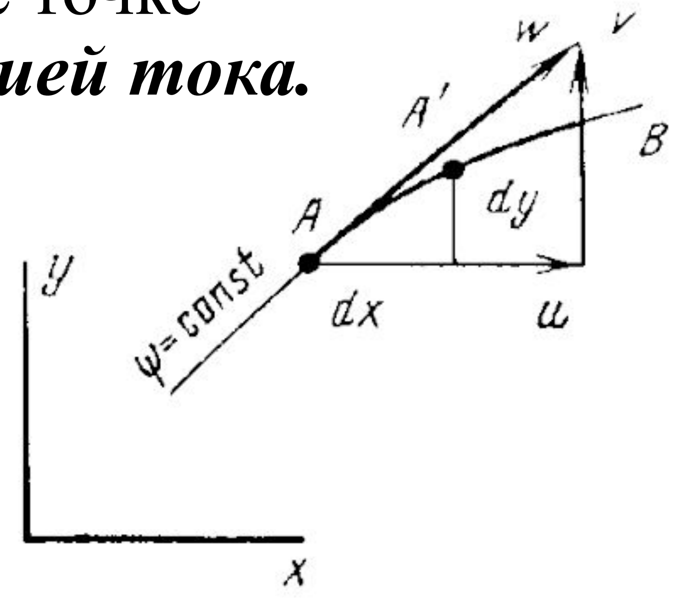


Рис. 4.2. Линия тока

На линиях тока функция тока принимает постоянное значение,

т.е. уравнение семейства линий тока: ψ = const.

Производная потенциала скорости на любое направление :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial l}$$

Выражение равно сумме проекций скоростей ***u*** и ***v*** на направление l:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = w_l$$

Проекция φ на нормаль к линии тока:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = w_n = 0$$

Рассмотрим сетку, образованную семейством *линий тока* $\psi = \text{const}$ и *линий равного потенциала* $\varphi = \text{const}$.

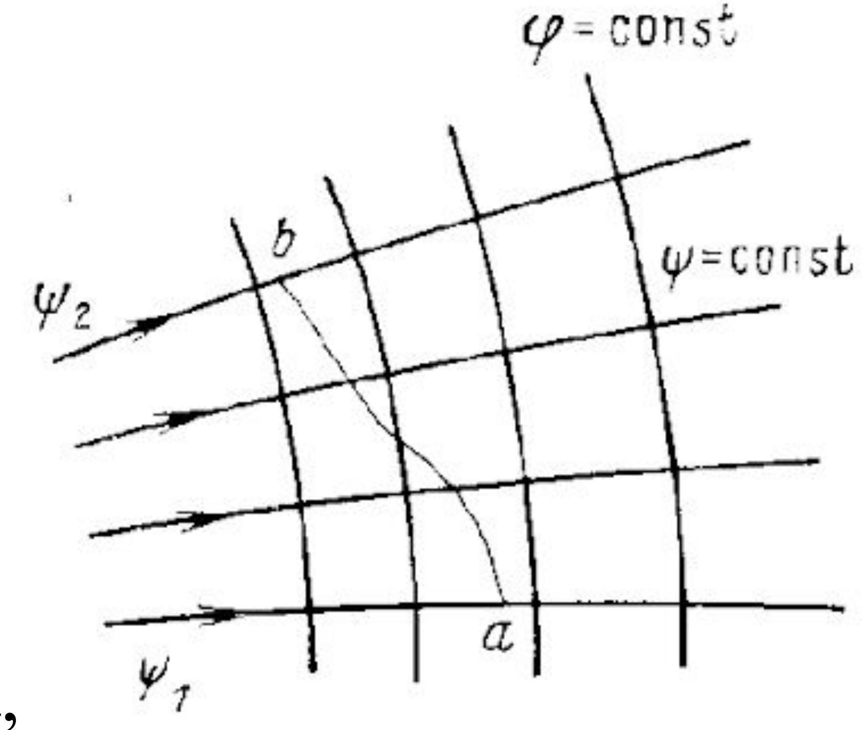


Рис. 4.3. Ортогональная сетка линий тока и эквипотенциалей

Скорости потока касательны к линиям тока и нормальны к линиям равного потенциала, следовательно, сетка ортогональна.

Т.к. жидкость не может пересекать линий тока, то между двумя любыми линиями тока расход жидкости в любом сечении одинаков.

Расход жидкости через произвольную кривую между точками ***a*** и ***b***:

$$Q = \int_l w_n dl = \int_l u\,dy - v\,dx = \int_l d\psi = \psi_b - \psi_a$$

Жидкость не может пересекать границу твердого тела, а значит проекция скорости на нормаль к поверхности $w_n = 0$, т.е. скорость должна быть касательная к поверхности тела.

На обтекаемой поверхности получаем условия: $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n} = 0, \quad \psi = \text{const}.$

Они совпадают с определением линии тока, а значит любую линию тока можно считать твердой поверхностью, и наоборот.

Из основных формул также следует соотношение Коши – Римана:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

На этом основано применение теории *функций комплексного переменного* к расчету плоских потенциальных потоков несжимаемой жидкости:

$$\varphi + i\psi = F(z), \quad z = x + iy.$$

Функция $F(z)$ – комплексный потенциал потока, z – комплексная переменная.

Примеры простейших потенциальных потоков

Источник жидкости: комплексный потенциал

$$\varphi + i\psi = \frac{Q}{2\pi}\ln z$$

Для удобства применим полярные координаты для комплексной переменной: $z = re^{i\theta}$

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi}\ln r$$

Тогда линии тока лучи, выходящими из начала координат.

Линии равного потенциала концентрические окружности.

$$\psi = \frac{Q}{2\pi}\theta$$

Расход жидкости: $Q = 2\pi r w_r$

w_r - радиальная скорость жидкости.

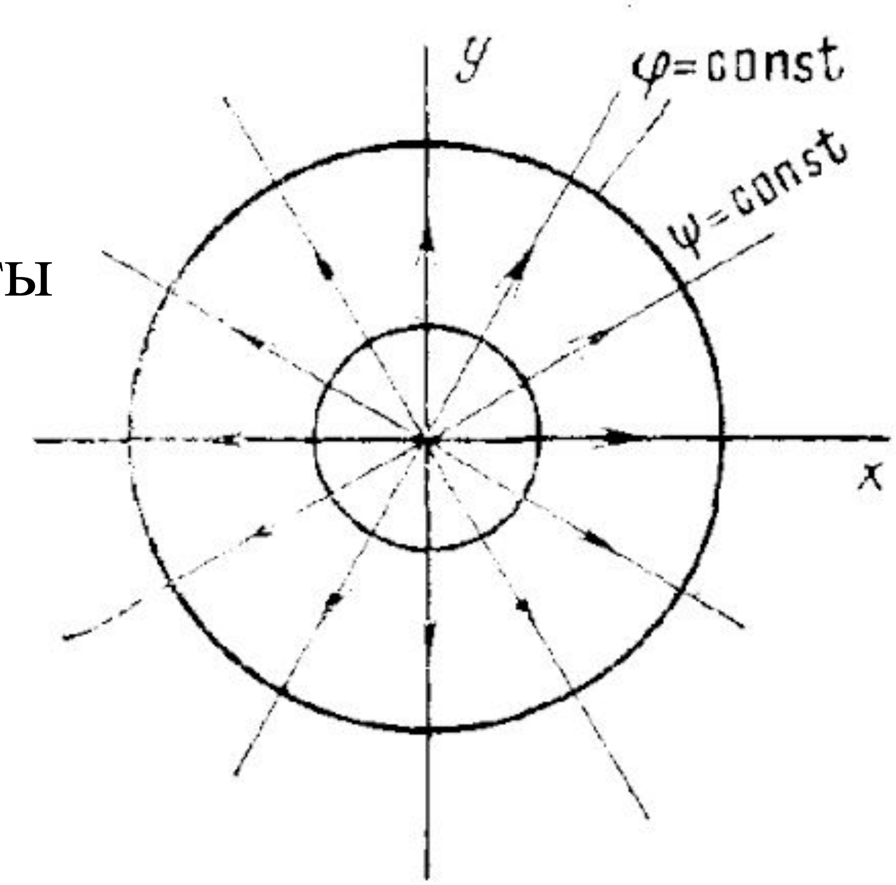


Рис. 4.4. Линии тока и эквипотенциали точечного источника

Комплексный потенциал **вихря** $\varphi + i\psi = \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z$

Линии тока $\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta$ – окружности,

Линии равного потенциала $\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r$ – лучи.

Окружная скорость жидкости $w_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{r}$

Величина Γ – циркуляция скорости,
характеризует интенсивность вихря,
а знак Γ – направление вращения
(положительный – против часовой стрелки)

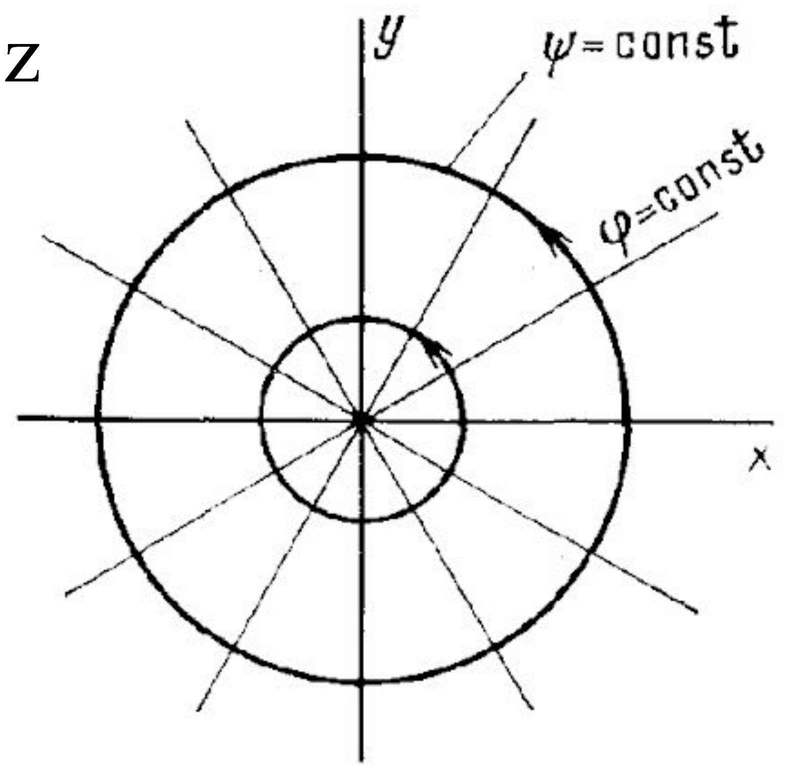


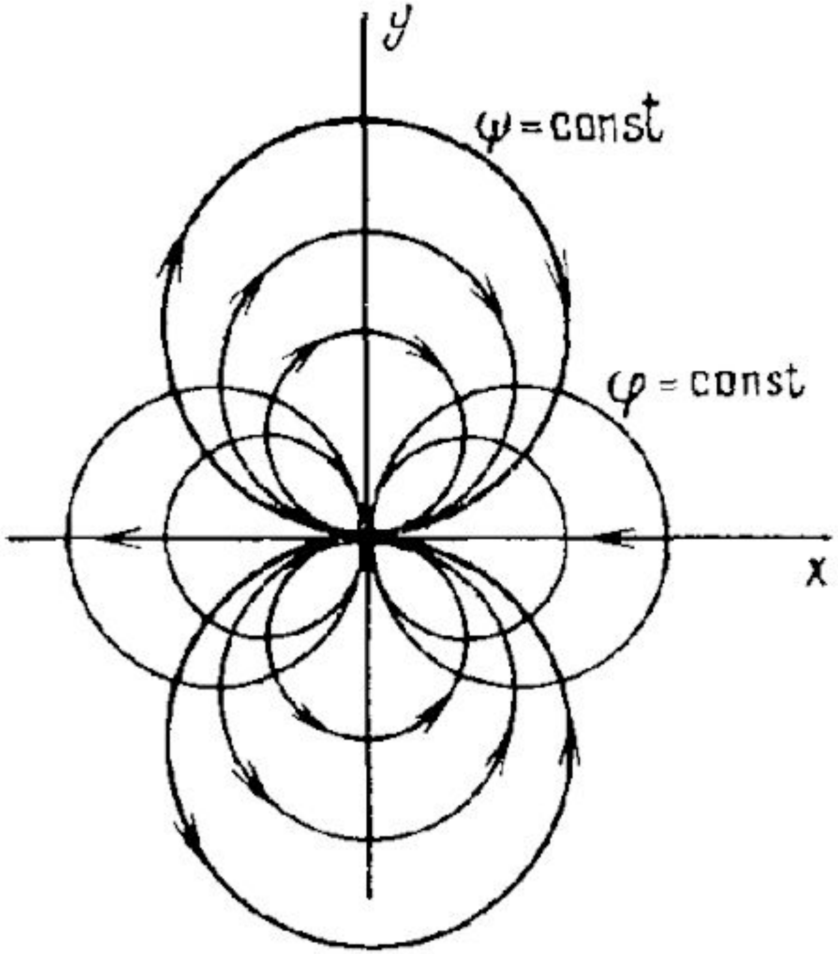
Рис. 4.5. Линии тока и эквипотенциали потенциального потока, вызванного точечным вихрем

Комплексный потенциал **диполя** $\varphi + i\psi = \dfrac{q}{z}$

, где q – момент диполя.

Для удобства используем декартову СК:

$$\varphi = \frac{x}{x^2 + y^2}, \psi = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$



Приняв ψ = const, получим семейство окружностей в центрами на оси ординат.

Линии равного потенциала – семейство окружностей в центрами на оси абсцисс.

Диполь можно получить в результате слияния источника и стока:

$$F(z) = \frac{Q}{2\pi}\ln(z+h) - \frac{Q}{2\pi}\ln z$$

, в пределе $h \to 0$ получим диполь, где $q = Qh$

Потенциал **обтекания окружности:** $F(z) = u_\infty\left(z + \frac{r_o^2}{z}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\frac{z}{r_o}$

Состоит из: плоскопараллельного потока $u_\infty z$

диполя $q = r_o^2$, вихря $\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\frac{z}{r_o}$

В полярной СК функции запишутся

$$\varphi = u_\infty\left(r + \frac{r_o^2}{r}\right)\cos\theta + \frac{\Gamma}{2\pi}\theta$$

$$\psi = u_\infty\left(r - \frac{r_o^2}{r}\right)\sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi}\ln\frac{r}{r_o}$$

При $\Gamma = 0$ проекции скорости потока получим:

$$w_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = u_\infty\left(1 + \frac{r_o^2}{r^2}\right)\cos\theta$$

$$w_\theta = \frac{\partial\varphi}{r\partial\theta} = -u_\infty\left(1 + \frac{r_o^2}{r^2}\right)\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

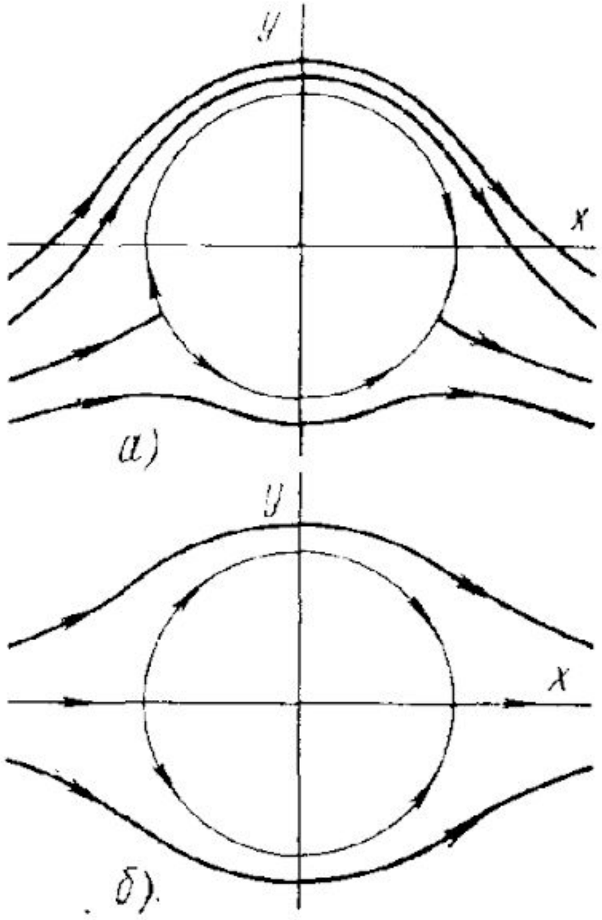


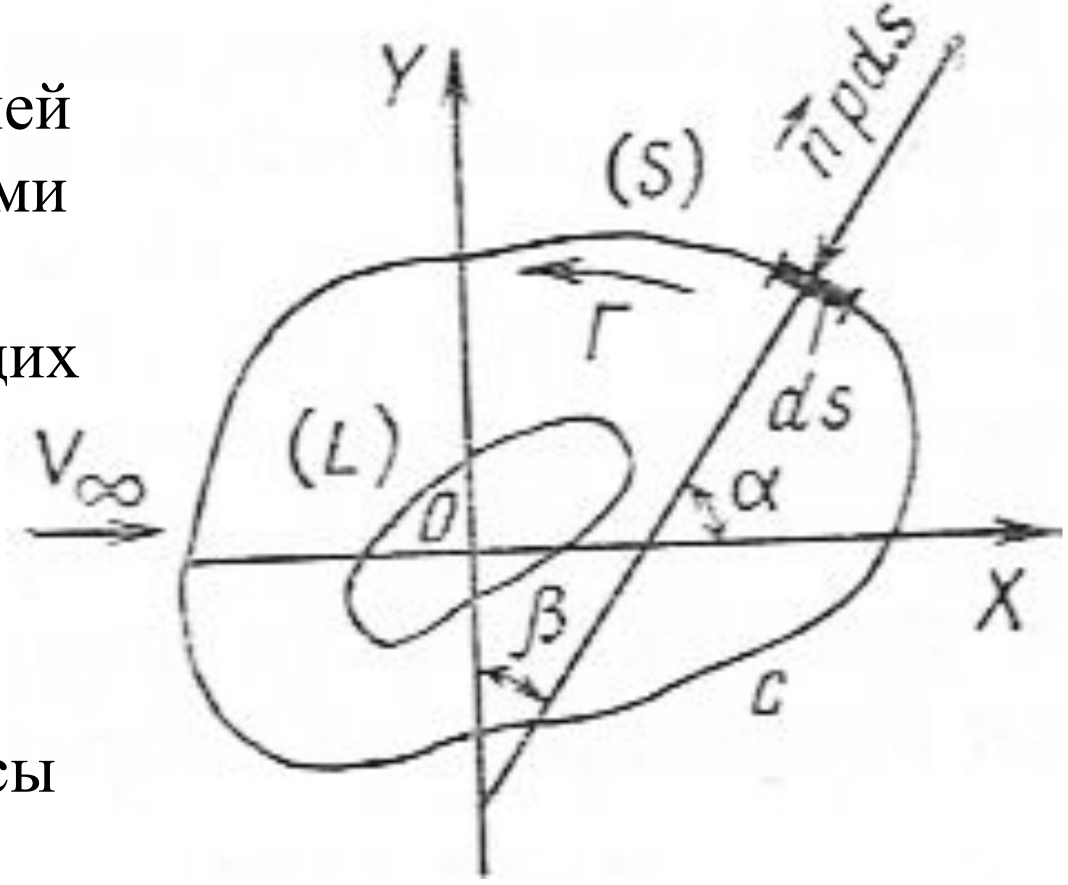
Рис. 4.7. Линии тока при обтекании цилиндра с различной величиной циркуляции:
a — $|\Gamma/(4\pi r_0 u_\infty)| < 1$; $б$ — $\Gamma = 0$.

Обтекание плоским потоком произвольного тела

Выделим на контрольной поверхности S элементарную площадку *ds*l* и проведем к ней внешнюю нормаль *n,* которая образует с осями координат углы α и β.

Если проекцию скорости частиц, протекающих через площадку *ds·l*, на нормаль *n* обозначить через V_n, то очевидно, что масса жидкости, протекающей в единицу времени сквозь эту площадку, будет равна $\rho V_n ds \cdot l$.

Количество движения рассматриваемой массы жидкости, переносимое в единицу времени сквозь всю контрольную поверхность, выразится интегралом:



$$\int_S \rho V V_n ds$$

Когда скорость невозмущенного потока направлена по оси *OX* и равна V_∞, потенциал скорости можно записать в виде $\phi = V_\infty x + \phi'(x, y)$,

где $\varphi'(x, y)$ - потенциал добавочных возмущенных скоростей, удовлетворяющих уравнению Лапласа.

Для проекций скорости V_x, V_y получим соотношения:

$$V_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = V_\infty + \frac{\partial\varphi'}{\partial x}$$

$$V_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi'}{\partial y}$$

Функции $\varphi'(x, y)$ па бесконечности удовлетворяют условиям:

$$\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\right)_\infty = 0 \quad \left(\frac{\partial\varphi'}{\partial y}\right)_\infty = 0$$

Выражение для скорости V_n принимает вид:

$$V_n = (V_\infty + \frac{\partial\varphi'}{\partial x})\cos\alpha + \frac{\partial\varphi'}{\partial y}\sin\alpha$$

Полагая, что контур S настолько велик, что в силу граничных условий величинами $(\partial\phi'/\partial x)^2$ и $(\partial\phi'/\partial y)^2$ можно пренебречь, определим произведения $V_n V_X$ и $V_n V_y$

Для определения силы лобового сопротивления тела *X* и подъемной силы У необходимо знать давление и скорость в каждой точке контрольной поверхности. Подставив в интегралы значение давления, определенное по формуле Бернулли, получим:

$$X = +\rho V_\infty \int_S V_n ds + \rho \frac{V^2_\infty}{2} \int_S \cos\alpha ds$$

$$Y = -\rho \frac{V^2_\infty}{2} \int_S \sin\alpha ds - \rho V_\infty \int_S V_s ds$$

Интеграл $\int_S \rho V_n ds$ представляет собой расход жидкости сквозь замкнутый контур, для твердого тела он равен нулю.

Из геометрии $\cos\alpha ds = 0$, получили X= 0 – парадокс Даламбера–Эйлера.

Проекция скорости на контур:

$$V_s = \frac{d\varphi}{ds} = \left(V_\infty + \frac{\partial\varphi'}{\partial x} \right) \sin\alpha + \frac{\partial\varphi'}{\partial y} \cos\alpha$$

$\Gamma = \int_S V_s ds$ - циркуляция скорости по контуру S.

$$Y = -\rho V_\infty \Gamma$$

Теорема Жуковского (1905г.) $Y = -\rho V_\infty \Gamma$

Если поток, имеющий в бесконечности скорость V_∞, обтекает контур, и циркуляция скорости по этому контуру равна Г, то равнодействующую сил давления жидкости на контур получим, если умножим вектор, представляющий скорость потока в бесконечности, на циркуляцию скорости и на плотность жидкости.

Если знаки V_∞ и Г различны, то сила будет положительна и направлена вверх, при одинаковых знаках V_∞ и Г подъемная сила направлена вниз.

Циркуляция Г может создаваться не реальным, а фиктивным вихрем, Жуковский назвал его «присоединенным». Циркуляцию можно увеличить различными способами, например, увеличением кривизны крыла, воздействием на пограничный слой, приведением в движение части поверхности крыла и т.д.

Следует отметить, что вопрос об истинной величине циркуляции скорости, входящей в формулу Жуковского, является в общем случае неопределенным. Строго говоря, с точки зрения теории идеальной жидкости эта величина может быть произвольной, так что решение задачи об обтекании профиля получается неоднозначным. Поэтому любому произвольно выбранному значению Г соответствует некоторое конкретное решение.

Постулат Жуковского — Чаплыгина:

При обтекании профиля с острой задней кромкой физически реализуется такое (единственное) значение циркуляции, при котором задняя критическая точка совпадает с задней кромкой.