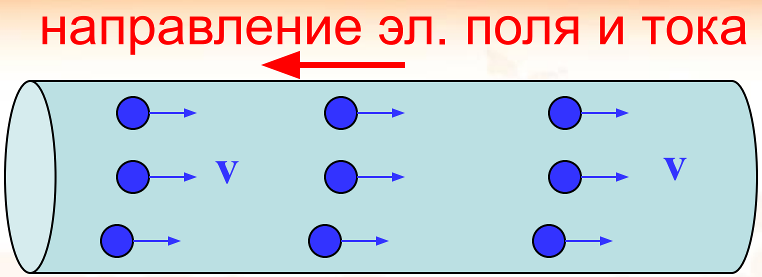
Электричество и магнетизм

Лекция 08

Законы постоянного тока.
Электрические схемы постоянного тока

20 октября 2021 года
Лектор: доцент НИЯУ МИФИ,
Ольчак Андрей Станиславович

Электрический ток

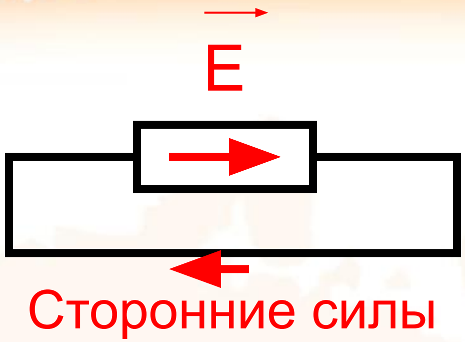


<u>Электрический ток</u> – направленное упорядоченное движение свободных электрических зарядов (носителей тока) в веществе под действием внешнего электрического поля.

Свободные заряды в принципе могут иметь как отрицательный, так и положительный заряд. За направление тока исторически принято считать направление движения *положительных* зарядов.

В металлах (основная категория проводников) свободные заряды - это отрицательно заряженные электроны. Условное направление тока в металлах получается *противоположным* реальному направлению движения электронов.

Условия существования длительного тока



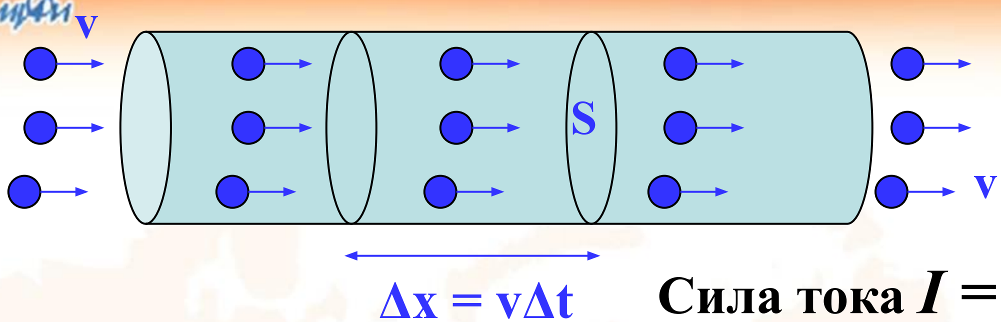
Для существования *длительного* электрического тока необходимо не только наличие свободных заряженных частиц (проводник) и электрическое поле E , приводящее эти заряды в движение.
Необходима также *возможность для зарядов совершать движение по замкнутому контуру*

Для последнего условия необходимо:

- **наличие *замкнутой проводящей цепи*;**
- **наличие в этой цепи *сторонних НЕлектростатических сил* , перегоняющих заряды против действия электрического поля.**

Сторонние силы могут иметь разную природу: электромагнитную, химическую, термическую и др. - только не электростатическую!

Сила тока и плотность тока.



$$\Rightarrow \quad I = \int_S \mathbf{j}d\mathbf{S}$$

Сила тока $I = \Delta q / \Delta t = qnSv$ [A]

Плотность тока $j = \Delta q / S\Delta t = qnv$ [А/м^2]

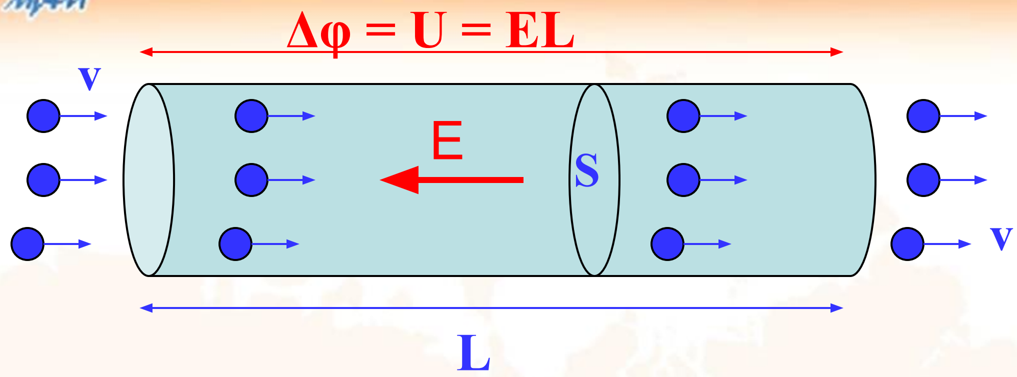
<u>Плотность электрического тока</u> = вектор, параллельный вектору дрейфовой скорости $v_д$. Величина плотности тока равна количеству заряда, проносимого в единицу времени через площадку единичной площади, перпендикулярной направлению тока.

$j = \sigma E \qquad E = \rho j \qquad =>$ закон Ома (опыт.) в локальной форме

σ - проводимость, $\rho = 1/\sigma$ - удельное сопротивление вещества

$I = jS = \sigma ES\,, \quad U = EL \quad => \quad I = U/R$ - закон Ома для проводника с сопротивлением $R = \rho L/S$

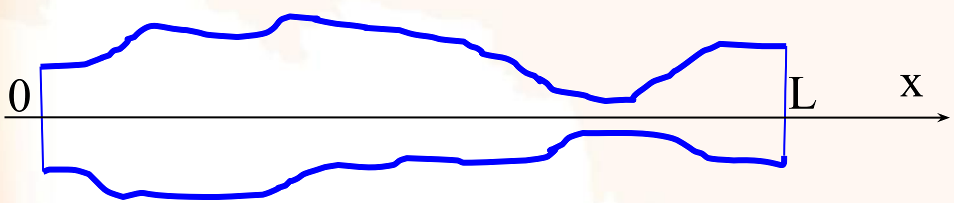
Сопротивление проводника



$$R = \int_0^L dx\, \rho(x)/S$$

$\boldsymbol{j} = \sigma(x)\boldsymbol{E}$ $\boldsymbol{E} = \rho(x)\boldsymbol{j}$ => закон Ома в локальной форме

σ - проводимость, $\rho = 1/\sigma$ - удельное сопротивление вещества

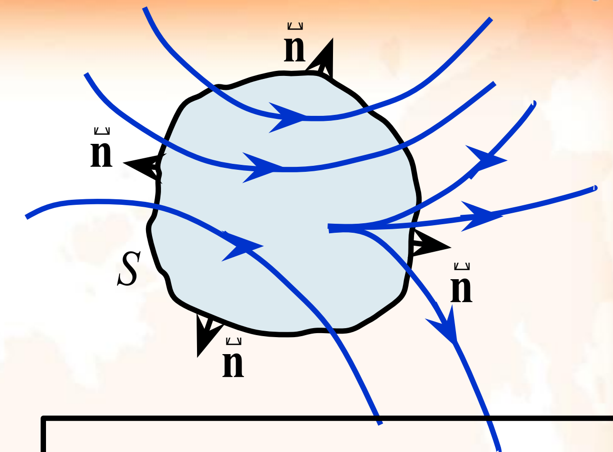


$$R = \int dx\, \rho(x)/S(x)$$

Уравнение непрерывности для тока
Закон Джоуля-Ленца и Э.Д.С.
Электрические цепи постоянного тока

Уравнение непрерывности для тока

Уравнение непрерывности – это математическая запись закона сохранения электрического заряда при наличии токов в среде. Сила тока через замкнутую поверхность положительна, если больше заряда «вытекает», чем «втекает»



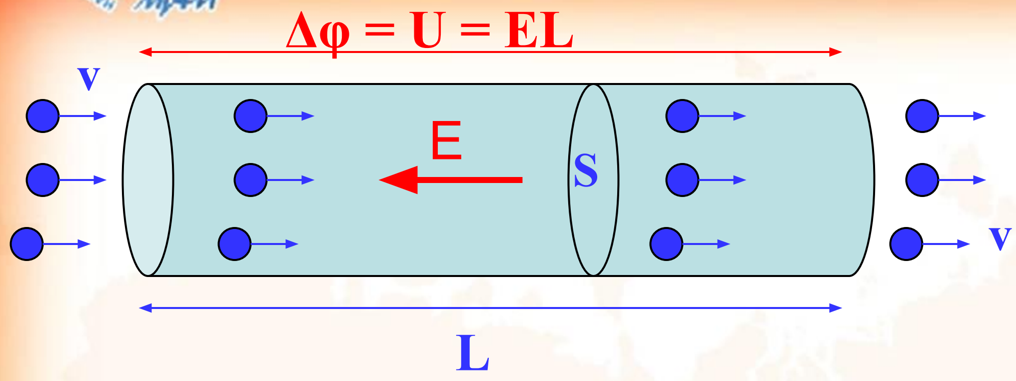
$$I = -\frac{dq}{dt} \qquad q = \int_V \rho dV \qquad I = \oint_S \vec{\mathbf{j}} \overrightarrow{\mathbf{dS}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\oint_S \vec{\mathbf{j}} \overrightarrow{\mathbf{dS}} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho dV}$$

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \qquad \oint_S \vec{\mathbf{j}} \overrightarrow{\mathbf{dS}} = \int_V \operatorname{div} \vec{\mathbf{j}} dV \quad \Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{div} \vec{\mathbf{j}} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}}$$

Если ток (и плотность заряда) не зависят от времени, то $\operatorname{div} \vec{\mathbf{j}} = 0$

Закон Джоуля-Ленца

Законы Ома и Джоуля - Ленца



$j = \sigma E \qquad E = \rho j \qquad =>$

закон Ома в локальной форме

σ - проводимость, $\rho = 1/\sigma$ - удельное сопротивление вещества

$P_1 = dA/dt = \boldsymbol{F v} = q\boldsymbol{E v}$ - мощность производимой полем механической работы по перемещению заряда q со скоростью $\boldsymbol{v}$

Мощность электрической силы, действующей на все подвижные заряды в единице объёма n [1/м^3]: $\quad P = nP_1 = nq\vec{\mathbf{E}}\vec{\mathbf{v}}$

$$\vec{\mathbf{j}} = qn\vec{\mathbf{v}}_д \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = \vec{\mathbf{j}}\vec{\mathbf{E}}} \qquad \vec{\mathbf{E}} = \rho\vec{\mathbf{j}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = \rho j^2}$$

- закон Джоуля - Ленца в локальной форме. P [Вт/м^3]–.

Если ток (скорость дрейфа) не меняется, а работа производится

$P = dQ_{уд}/dt =$ *удельная мощность тепловыделения*

Закон Джоуля - Ленца

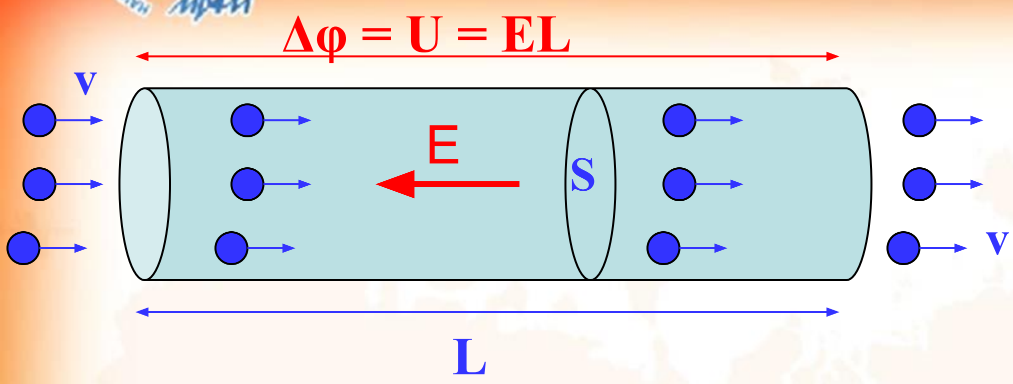
$$\boxed{Q_{\text{уд}} = \rho j^2} \qquad \frac{dQ}{dt} = Q_{\text{уд}} V = \rho j^2 lS = \rho \frac{I^2}{S^2} lS = \frac{\rho l}{S} I^2 = RI^2$$

$$\Rightarrow \boxed{Q = \int_0^t RI^2 dt}$$

Закон Джоуля – Ленца (1841) для проводника с сопротивлением R

$$dQ/dt = RI^2 = UI = U^2/R$$

Законы Ома и Джоуля - Ленца



Обозначение проводника с сопротивлением R (резистора) на электрических[схемах

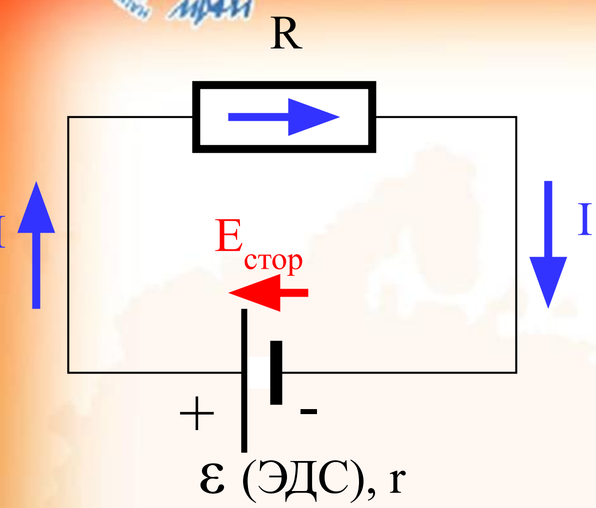
$I = jS = \sigma ES$, $U = EL$ => $I = U/R$ - закон Ома для проводника с сопротивлением $R = \rho L/S$

$dQ/dt = RI^2 = UI = U^2/R$ - закон Джоуля-Ленца для проводника с сопротивлением R

$$\Rightarrow \boxed{Q = \int_0^t RI^2 dt}$$

Источники тока и Э.Д.С.

Электродвижущая сила (ЭДС)



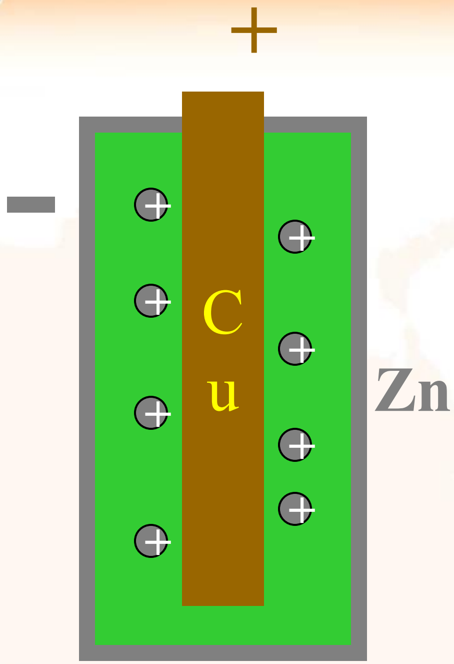
Для поддержания постоянного тока нужны ***сторонние силы*** *НЕ* электростатической природы, действующие на заряды в электрической цепи против действия поля электростатического, создающего ток.

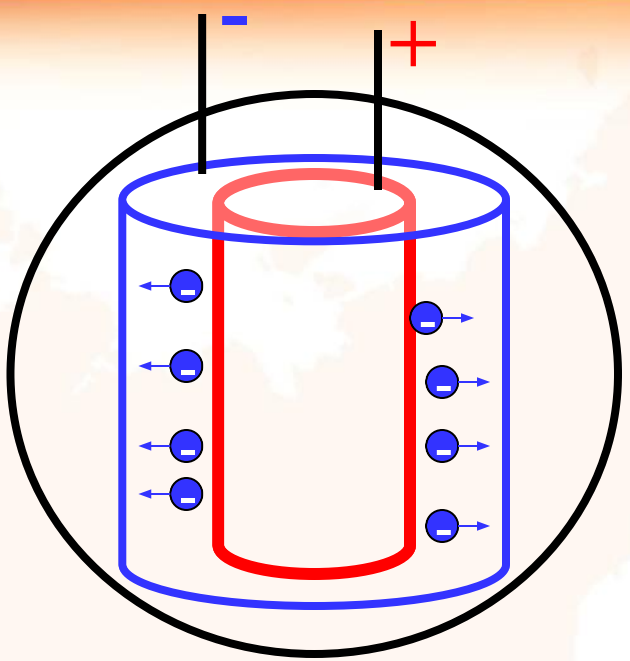
На рисунке – обозначение на схеме элемента создающего электродвижущую стороннюю силу (ЭДС)

ЭДС на данном участке цепи называется работа сторонних сил по перемещению заряда, отнесённая к величине этого заряда.

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{A_{стор}}{q}} \qquad \text{В} = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}}$$

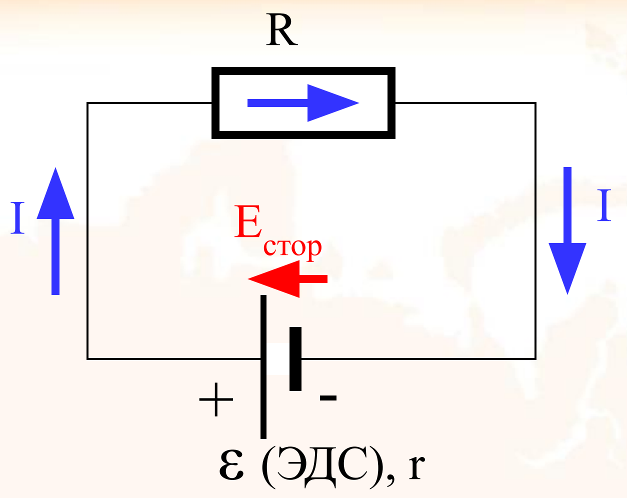
Примеры устройства источника тока





Источник тока - устройство, перегоняющее заряды против действия электрического поля с помощью сторонних сил.
Сторонние силы могут иметь разную природу: электромагнитную (генераторы), химическую (аккумуляторы, батарейки), тепловую и др. - только не электростатическую!

Закон Ома для полной цепи.

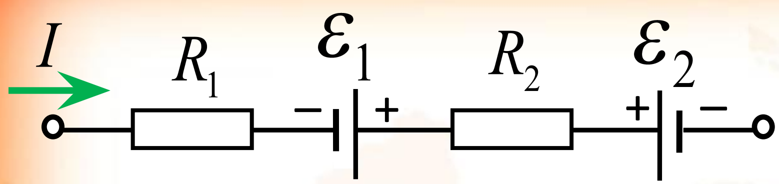


Любой источник тока обладает внутренним сопротивлением r, также уменьшающем силу тока во внешней цепи.

$$I = \varepsilon / (R + r)$$

Закон Ома для замкнутой (полной) цепи: сила тока в полной цепи равна отношению ЭДС цепи к ее полному сопротивлению.

Работа ЭДС и тока на неоднородном участке цепи



$$dA_{12} = U_{12}dq$$

Мощность тепловыделения на резисторах:

$$P_R = I^2\Sigma R_i = I\Sigma U_i = IU$$

U – суммарное падение напряжения на участке цепи

Работа элементов ЭДС по переносу заряда (положительного) от начала к концу участка (в единицу времени):

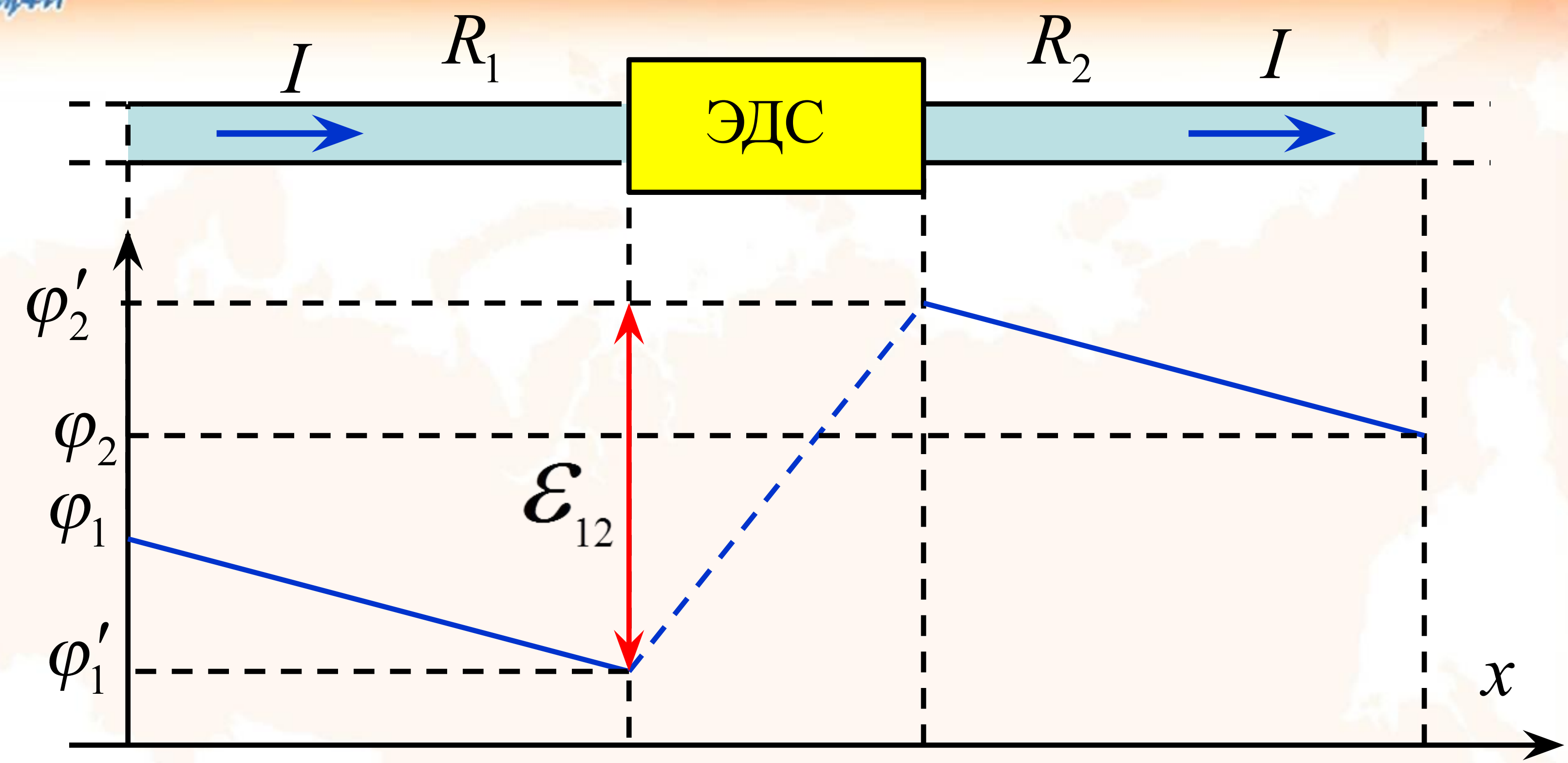
$$P_\varepsilon = \varepsilon_1 dQ/dt - \varepsilon_2 dQ/dt = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)I = I\Sigma\varepsilon_i$$

$\Sigma\varepsilon_i$ – **алгебраическая сумма ЭДС**

Замкнутая цепь: энергия, вырабатываемая источниками ЭДС полностью расходуется на тепловыделение.

$$\Sigma\varepsilon_i = I\Sigma R_i \Rightarrow I\Sigma\varepsilon_i = I^2\Sigma R_i$$

Неоднородный участок цепи



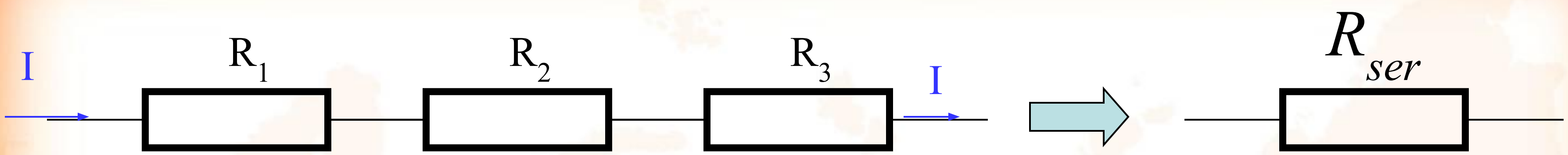
$$\begin{cases} IR_1 = \varphi_1 - \varphi_1' \\ IR_2 = \varphi_2' - \varphi_2 \end{cases} +$$

$$I\left(R_1 + R_2\right) = \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_2' - \varphi_1' \Rightarrow$$

$$\boxed{IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}} \Rightarrow \boxed{IR = U_{12}}$$

Соединения резисторов и элементов Э.Д.С.

Последовательное соединение резисторов

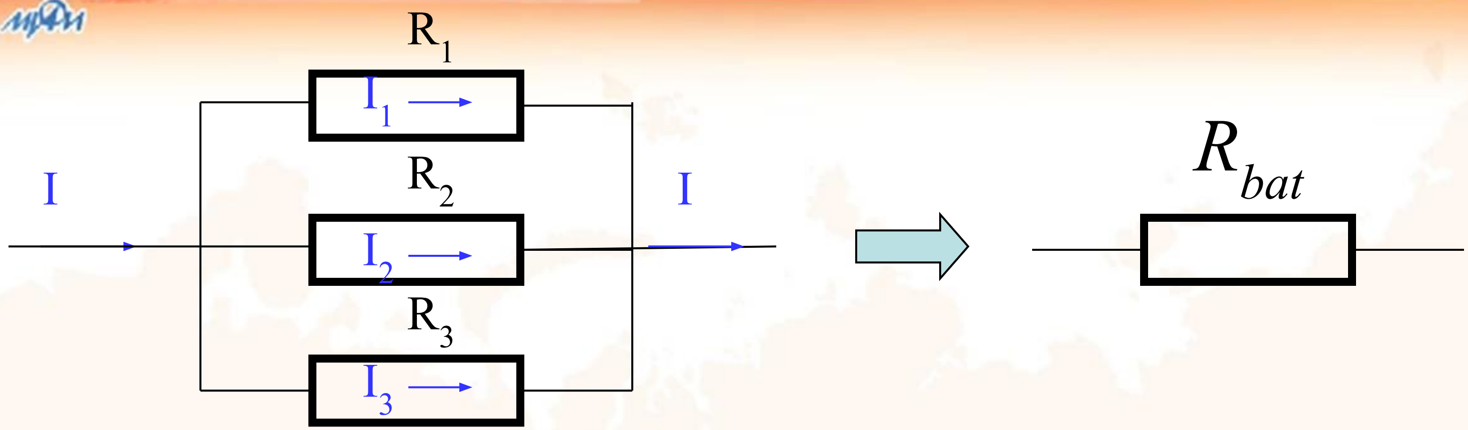


При последовательном соединении резисторов сила тока, протекающего по всем резисторам, одинакова, а разности потенциалов (напряжения), создаваемые не резисторах, складываются

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots = IR_1 + IR_2 + IR_3 + \ldots = I(R_1 + R_2 + R_3 + \ldots) = IR_{ser}$$

$$R_{ser} = \Sigma R_i$$

Параллельное соединение резисторов



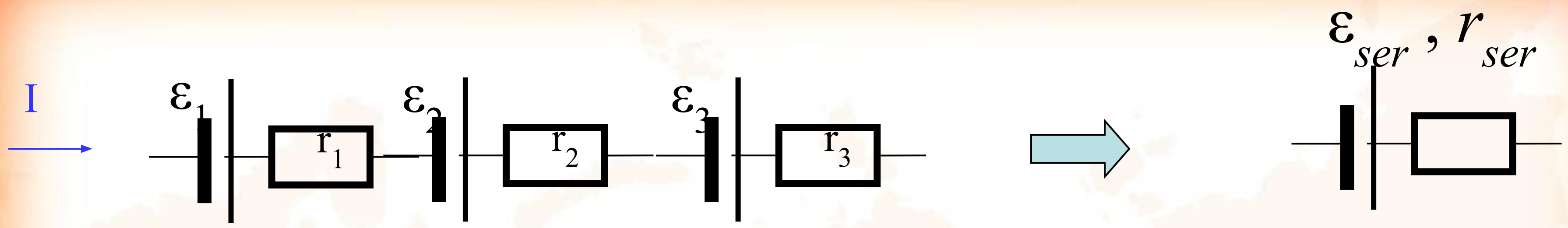
При параллельном соединении резисторов напряжения U, создаваемые не резисторах, одинаковы. Сила тока в подводящих проводах складывается из токов в параллельно соединенных резисторах:

$$I = I_1+I_2+I_3+..= U/R_1+U/R_2+U/R_3+..=$$
$$=U(1/R_1+1/R_2+1/R_3+..) = U/R_{bat}$$

При параллельном соединении резисторов складываются величины, обратные их сопротивлениям:

$$1/R_{bat} = \Sigma\, 1/R_i$$

Последовательное соединение элементов Э.Д.С

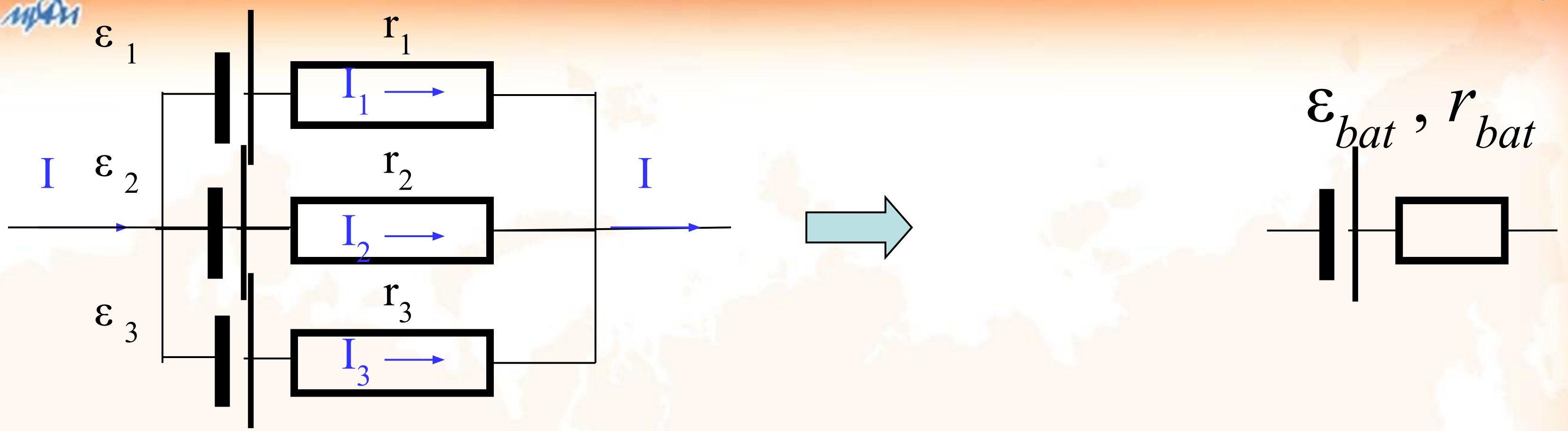


При последовательном соединении элементов Э.Д.С. величины внутренних сопротивлений просто складываются, а величины Э.Д.С. складываются алгебраически:

- **со знаком плюс, если «гонят» заряды по направлению тока**
- **со знаком минус, если «гонят» заряды против направления тока**

$$\varepsilon_{ser} = \Sigma\varepsilon_i \quad r_{ser} = \Sigma r_i$$

Параллельное соединение элементов ЭДС



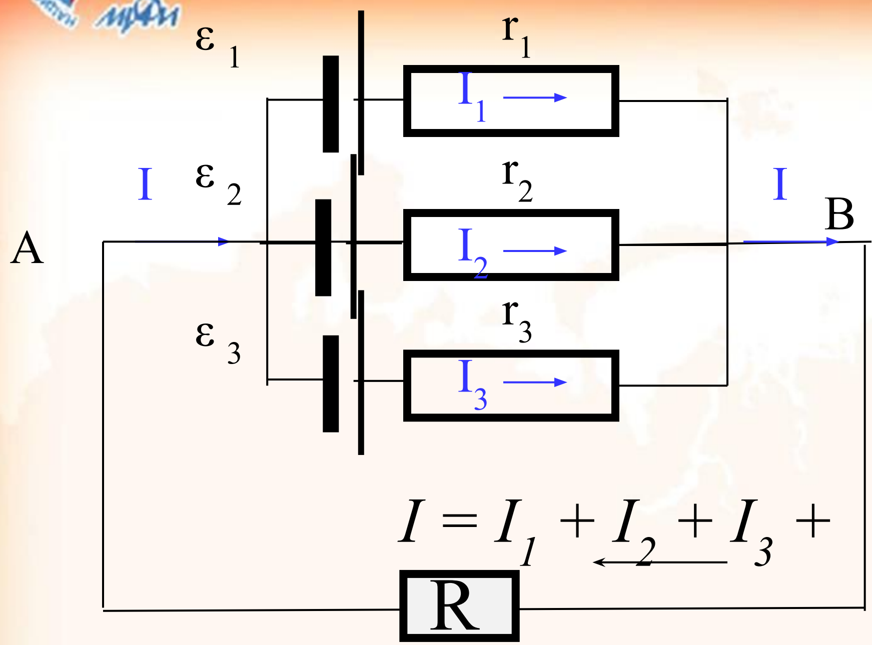
При параллельном соединении элементов Э.Д.С. все не так просто:

$$1/r_{bat} = \Sigma 1/r_i \;; \quad \varepsilon_{bat} = (\Sigma\varepsilon_i/r_i)/\Sigma 1/R_i = r_{bat}(\Sigma\varepsilon_i/r_i)$$

В этой сумме величины Э.Д.С. учитываются алгебраически:

- **со знаком плюс, если «гонят» заряды по направлению тока**
- **со знаком минус, если «гонят» заряды против направления тока**

Параллельное соединение элементов ЭДС



$$I = I_1 + I_2 + I_3 +$$

Для пояснения запишем разности потенциалов точек А и В по всем ветвям цепи:

$$U_{AB} = \varepsilon_i + I_i r_i$$

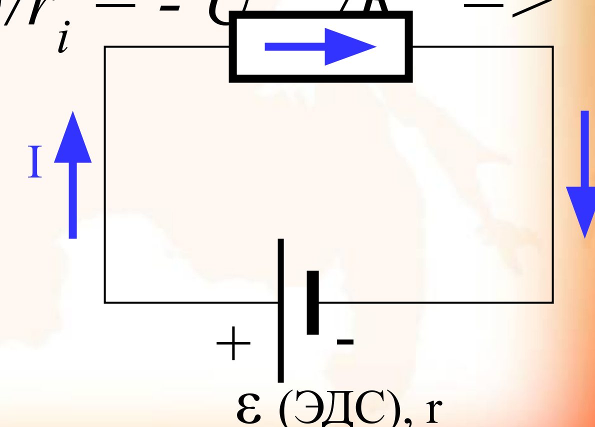
$$- U_{AB} = IR$$

Сложим токи во всех ветвях с ЭДС:

$$\Sigma(U_{AB} - \varepsilon_i)/r_i = - U_{AB}/R \quad =>$$

$$=> U_{AB}\,(1/R + \Sigma 1/r_i) = \Sigma\varepsilon_i/r_i =>$$

$$\Rightarrow \quad U_{AB} = R((\Sigma\varepsilon_i/r_i)/(\Sigma 1/r_i))/(R + 1/\Sigma 1/r_i)$$



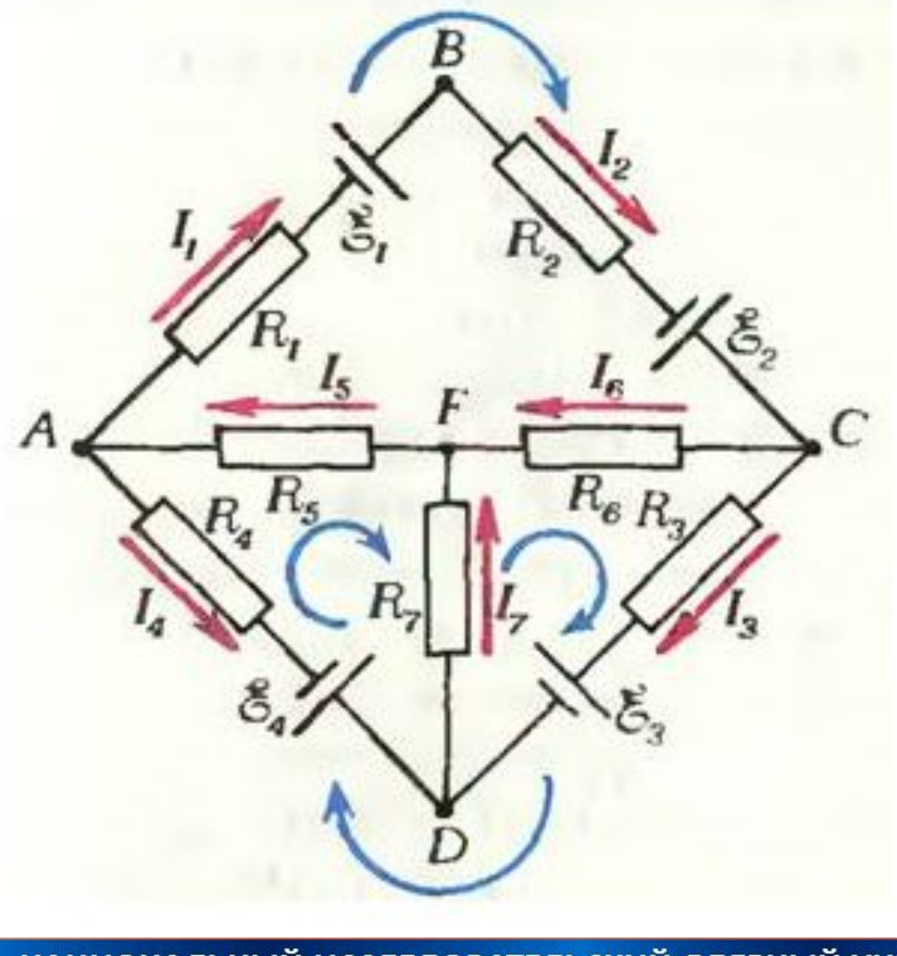
Сравнение с законом Ома для замкнутой цепи с одним элементом ЭДС дает искомый результат:

$$U_{AB} = RI = R\varepsilon / (R + r)$$

Электрические цепи постоянного тока

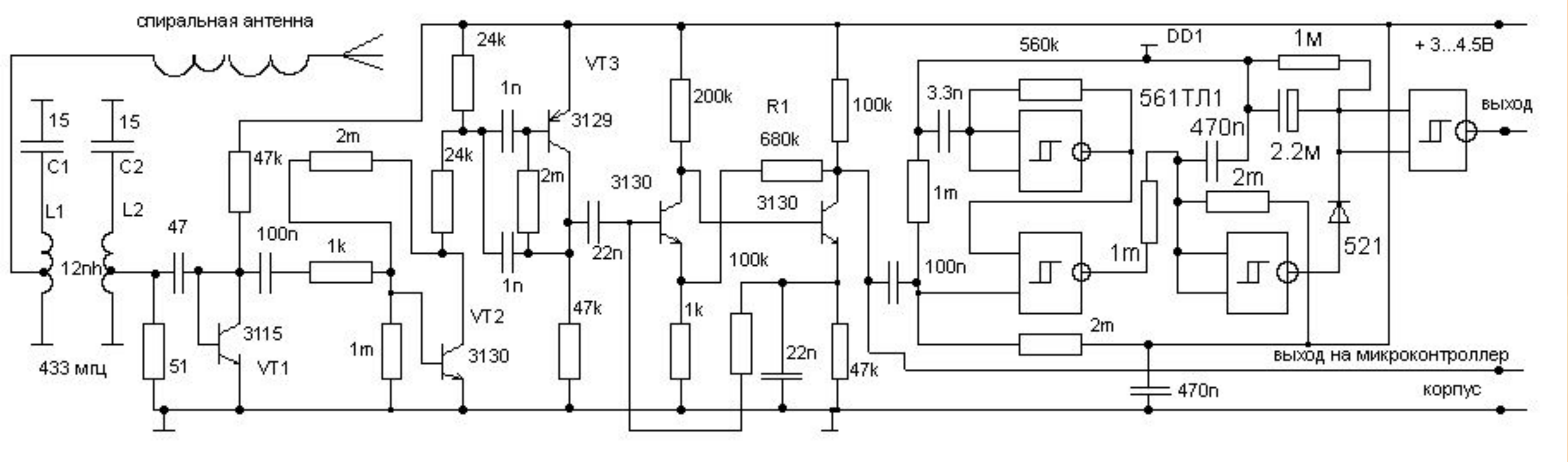
Разветвленные электрические цепи

Электрические цепи могут быть сложными, включающими множество участков, узлов и элементов.



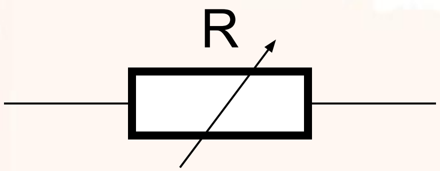
Разветвленные электрические цепи

Электрические схемы могут быть очень сложными, ….

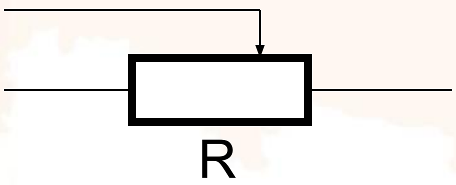


Элементы электрических схем

резистор (сопротивление). Элемент схемы с электрическим сопротивлением R

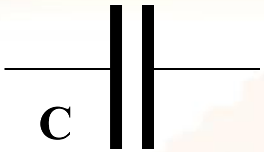


переменное сопротивление. Элемент схемы с возможностью изменения значения сопротивления R

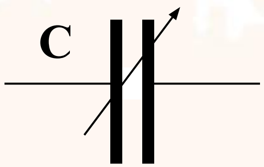


реостат (проволочная катушка (резистор) с ползунковым токоснимателем). Используется в схемах управления напряжением источников тока

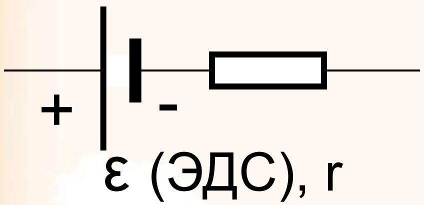
Элементы электрических схем



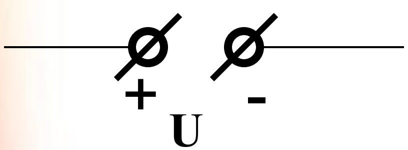
Конденсатор. Элемент схемы с электроемкостью С.



Переменный конденсатор (магазин емкостей). Элемент схемы с возможностью изменения значения электроемкости С



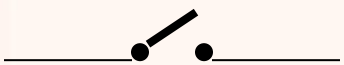
Элемент ЭДС. Элемент схемы, обладающий электродвижущей силой ε [В] **и внутренним сопротивлением** r [Ом]. **Иногда внутреннее сопротивление отображают на схеме отдельно.**



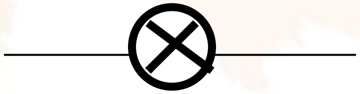
Источник постоянного напряжения U. Внутреннее сопротивление такого источника можно не учитывать.

Элементы электрических схем

Подводящие и соединительные провода. Элементы схемы с пренебрежимо малым электрическим сопротивлением.



Переключатель. Элемент схемы, разрывающий и замыкающий цепь.



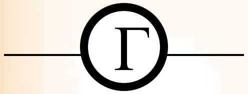
R

электролампа (с точки зрения электрической схемы характеризуется сопротивлением R и потребляемой мощностью P [Вт])

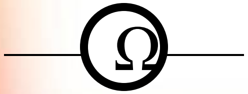
Элементы электрических схем

Амперметр. Прибор для измерения силы тока. Включается в участок цепи последовательно. Должен иметь по возможности минимальное сопротивление $R_A \to 0$

Вольтметр. Прибор для измерения разности потенциалов (напряжения). Подключается к участку цепи параллельно. Должен иметь по возможности максимальное сопротивление $R_v \to \infty$

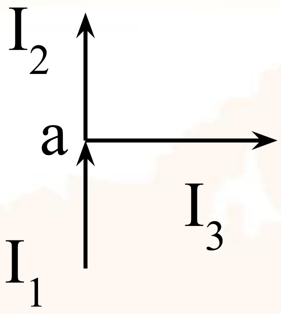


Гальванометр. Прибор для измерения величины прошедшего через него заряда. Включается в участок цепи последовательно. Должен иметь по возможности минимальное сопротивление $R_A \to 0$

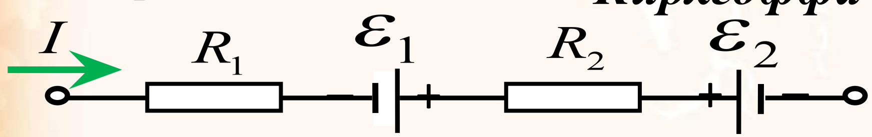


Омметр. Прибор для измерения электрического сопротивления. Подключается к участку цепи параллельно. Должен иметь по возможности максимальное сопротивление $R_v \to \infty$

Узлы и участки цепи



Узел цепи - точка, где сходятся три или более проводников с током.
Алгебраическая сумма токов, втекающих (+) и вытекающих (-) из узла равна нулю (*правило Кирхгоффа №1*): $\sum I_i = 0$

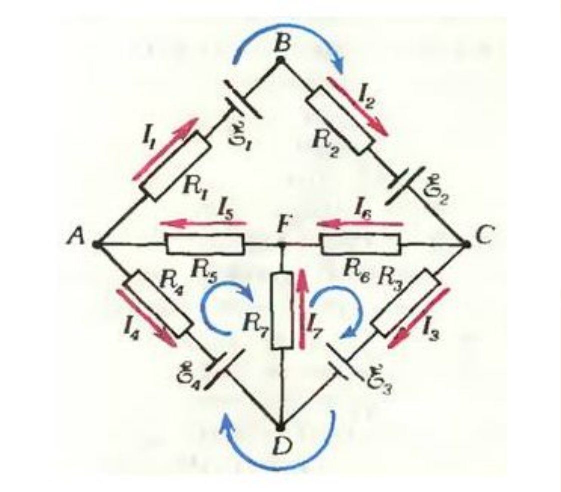


Участок цепи между двумя узлами может содержать один или несколько последовательно соединенных элементов, через которые протекает один и тот же ток. Разность потенциалов на концах участка AB:

$$\varphi_A - \varphi_B = I_{AB}R_1 - \varepsilon_1 + I_{AB}R_2 + \varepsilon_2$$

Ток и ЭДС – величины алгебраические (знаки как на рисунке).
(*правило Кирхгоффа №2*)

Правила Кирхгоффа



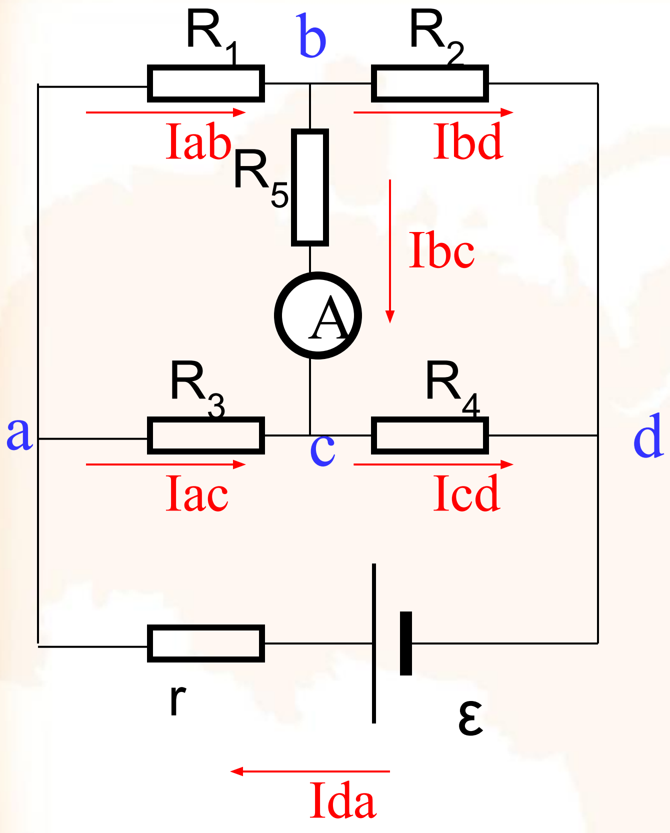
1. Алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю.

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = 0$$

2. В любом замкнутом контуре алгебраическая сумма падений напряжения на всех сопротивлениях равна алгебраической сумме ЭДС.

$$\sum_{k=1}^{n} I_k R_k = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{E}_k$$

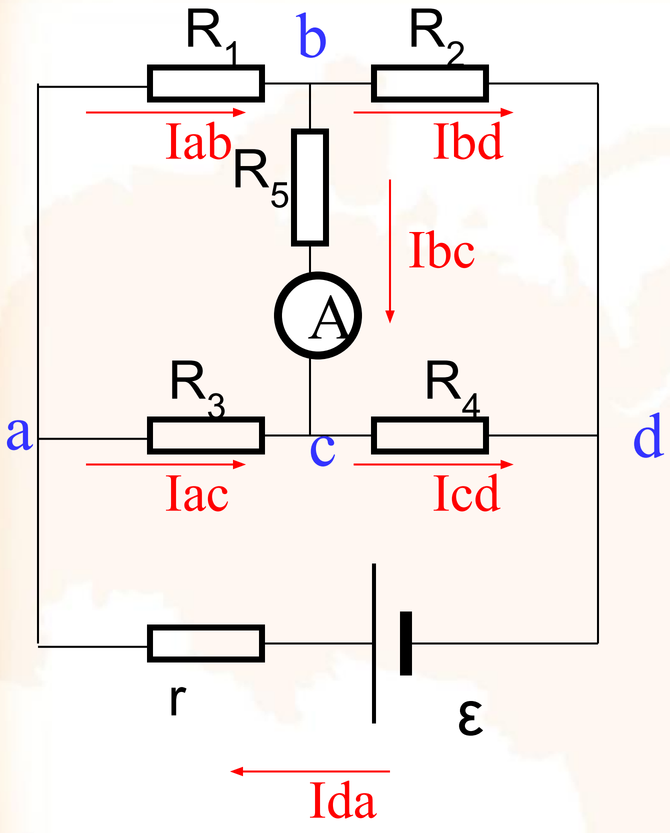
Метод расчета электрических схем



Шаг 1. Найти и наименовать (например, a, b, c, d, …) все узлы на схеме.

Шаг 2. На каждом участке цепи указать направление силы тока и наименование тока. В нашем примере - Iab, Iac, Ibc, Ibd, Icd, Ida.

Важно: направления токов можно задать произвольно.



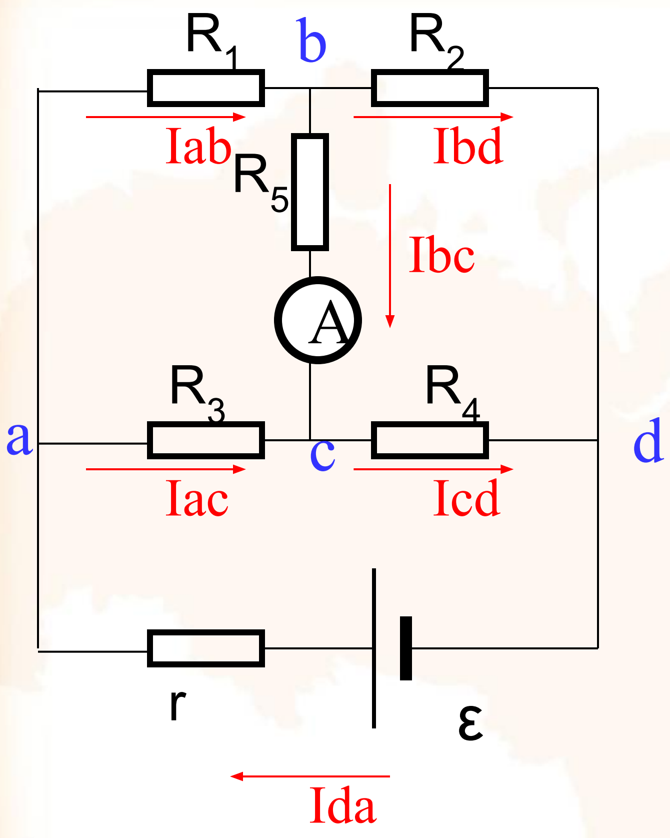
Шаг 3. Записать 1-ые правила Кирхгоффа для всех узлов на схеме.

Важно! математика узлов и токов устроена так, что одно из правил Кирхгоффа (для замкнутой схемы) линейно зависит от остальных. Один из узлов (любой) можно не учитывать.

$a: \quad Ida = Iab + Iac$

$b: \quad Iab = Ibc + Ibd$

$c: \quad Iac + Ibc = Icd$



Шаг 4. Записать 2-е правила Кирхгоффа для всех замкнутых контуров на схеме.

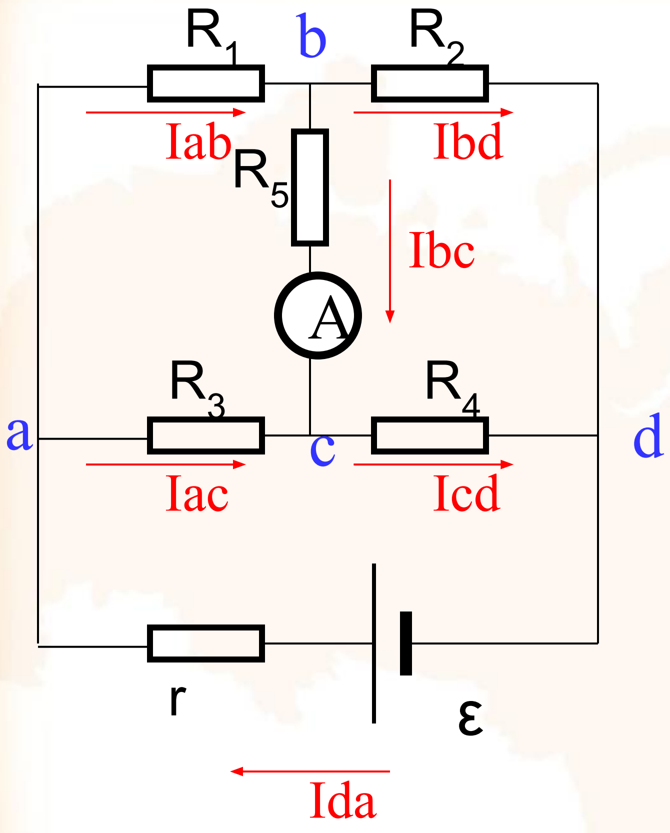
Важно! Надо набрать столько разных контуров (с хотя-бы частично разными участками цепи), чтобы общее число уравнений и число неизвестных величин совпали.

$$abca:\ I_{ab}R_1 + I_{bc}R_5 - I_{ac}R_3 = 0$$

$$bdcb:\ I_{bd}R_2 - I_{cd}R_4 - I_{bc}R_5 = 0$$

$$acda:\ I_{ac}R_3 + I_{cd}R_4 + I_{da}r = \varepsilon$$

Метод расчета электрических схем



Шаг 5. Посчитаем все нужные уравнения и решим систему, найдя все неизвестные.

Правила Кирхгоффа для трех узлов и трех контуров:

$a: \quad Ida = Iab + Iac$

$b: \quad Iab = Ibc + Ibd$

$c: \quad Iac + Ibc = Icd$

$abca: \ IabR_1 + Ibc\,R_5 - Iac\,R_3 = 0$

$bdcb: \ IbdR_2 - Icd\,R_4 - Ibc\,R_5 = 0$

$acda: \ IacR_3 + Icd\,R_4 + Ida\,r = \varepsilon$

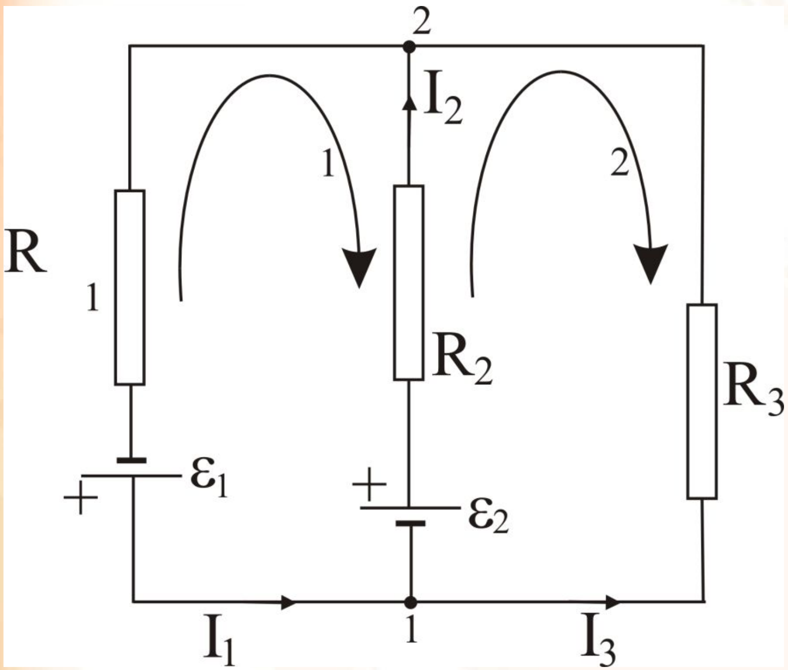
В нашем случае имеем 6 уравнений и 6 неизвестных токов. Все должно решаться точно.

Спасибо за внимание!

Следующая лекция
27 октября

Электрические цепи постоянного тока – примеры

Расчет электрических схем – простой пример



$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 & \text{Узел 1} \\ -I_1R_1 - I_2R_2 = -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 & \text{Контур 1} \\ I_2R_2 - I_3R_3 = \varepsilon_2 & \text{Контур 2} \end{cases}$$

$I_3 = I_1 - I_2$; $I_2R_2 = \varepsilon_2 + (I_1 - I_2)R_3$

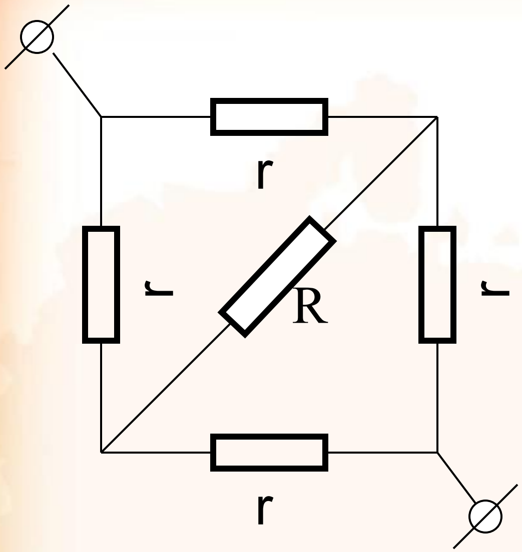
$I_2 = (\varepsilon_2 + I_1R_3)/(R_2 + R_3)$

$I_1R_1 + I_2R_2 = \varepsilon_2 + \varepsilon_1 =$

$= I_1R_1 + R_2(\varepsilon_2 + I_1R_3)/(R_2 + R_3)$

$I_1 = (\varepsilon_1(R_2 + R_3) + \varepsilon_2R_3)/(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3)$

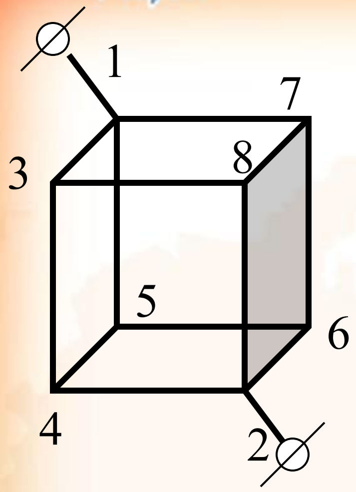
Пример расчета симметричных схем



Задача: найти ток, протекающий через сопротивление R.
Ответ: $I_R = 0$

Объяснение: потенциалы точек на концах сопротивления R в силу симметрии схемы одинаковы.

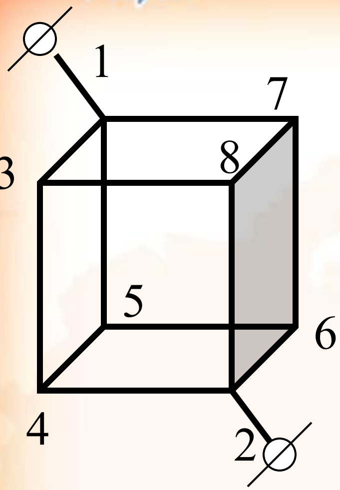
Пример расчета симметричных схем



Задача: найти сопротивление проволочного куба, включенного в цепь вдоль большой диагонали, если каждое из ребер имеет сопротивление r.

Шаг 1: Пронумеруем все узлы и попробуем нарисовать эквивалентную плоскую электрическую схему:

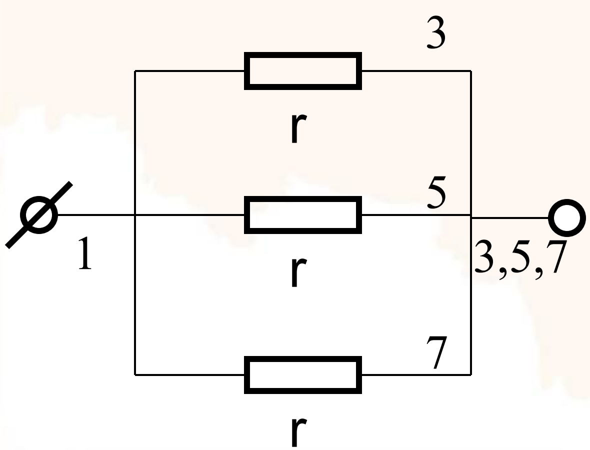
Пример расчета симметричных схем

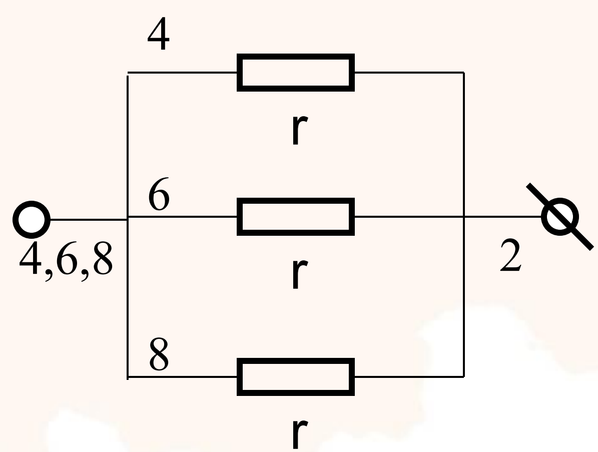


Задача: найти сопротивление проволочного куба, включенного в цепь вдоль большой диагонали, если каждое из ребер имеет сопротивление r.

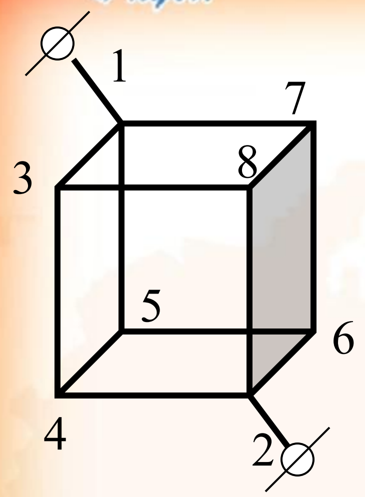
Шаг 2: Учтем симметрию:

Узлы 3,5.7 имеют равные потенциалы и могут быть соединены проводниками без изменения свойств схемы. Тоже и узлы 4, 6, 8.





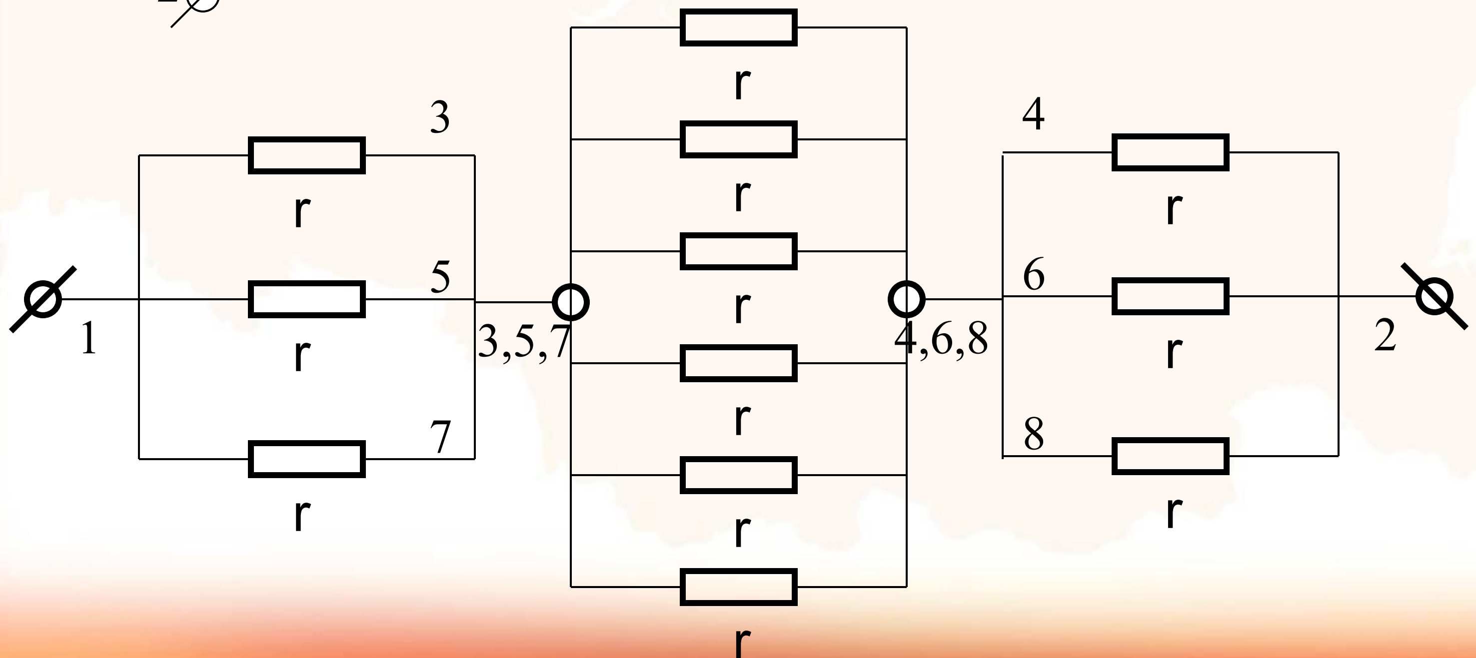
Пример расчета симметричных схем



Задача: найти сопротивление проволочного куба, включенного в цепь вдоль большой диагонали, если каждое из ребер имеет сопротивление r.

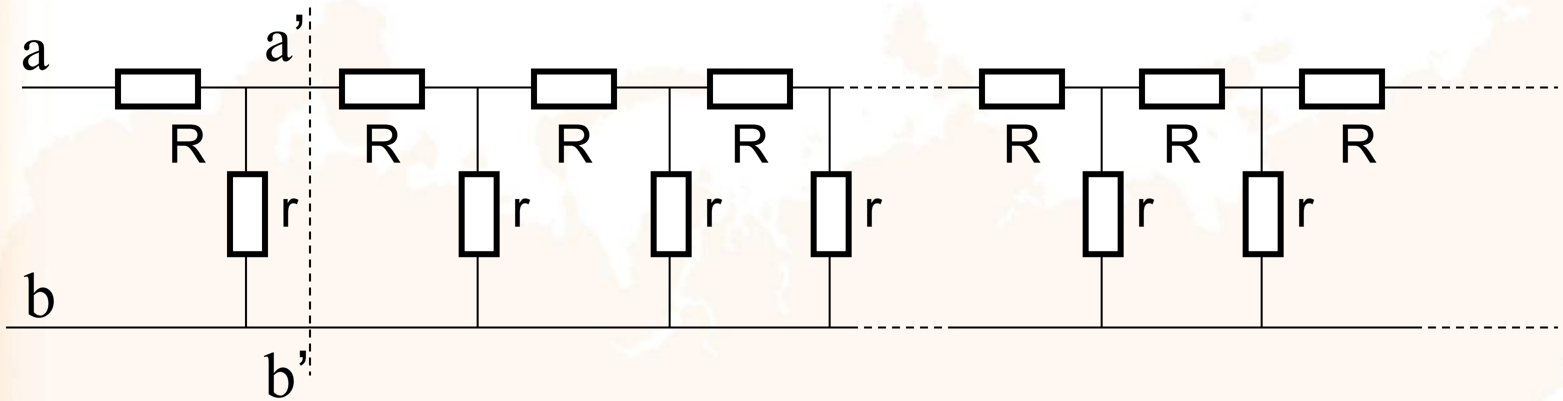
Шаг 3: Закончим эквивалентую схему и проведем ее расчет.

$$R = r/3 + r/6 + r/3 = 5r/6$$

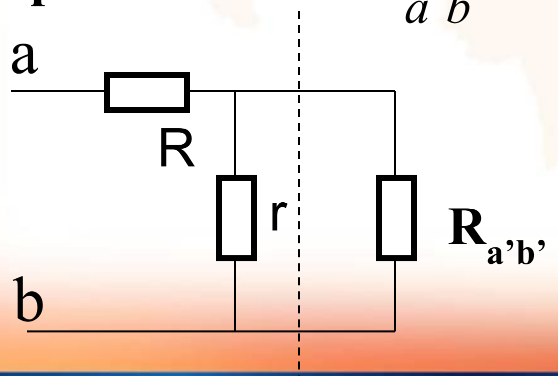


Пример расчета длинной цепи

Задача: найти сопротивление длинной цепи между точками a и b.



Шаг 1. Мысленно разрежем схему по линии a’ - b’ (отрежем первое звено) и заменим всю цепочку за линией a’ - b’ одним (неизвестным пока) сопротивлением $R_{a'b'}$.

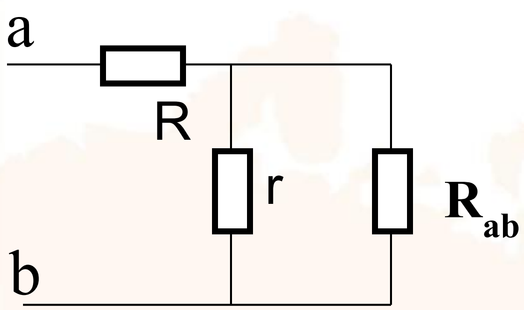


Заметим, что раз цепь очень длинная (число звеньев велико) отделение одного звена не должно повлиять заметно на ее сопротивление. То есть:

$$R_{a'b'} = R_{ab}$$

Пример расчета длинной цепи

Получаем эквивалентную схему:



Пару сопротивлений r **и** R_{ab} **(соединенных параллельно) можно заменить на**

$$r' = rR_{ab}/(r + R_{ab})$$

Прибавляя последовательно подсоединенное сопротивление R, получаем уравнение

$$R_{ab} = R + r' = R + rR_{ab}/(r + R_{ab})$$

Приводя к общему знаменателю, получаем:

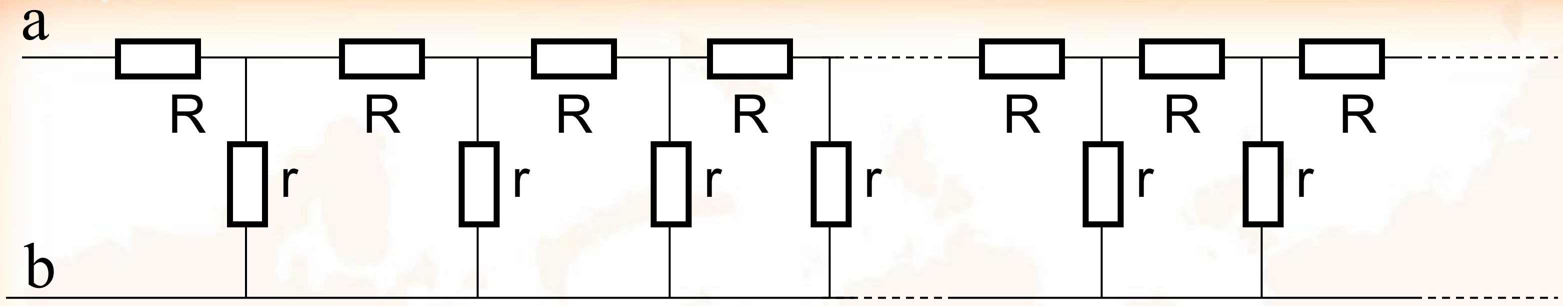
$$rR_{ab} + R_{ab}^2 = Rr + RR_{ab} + rR_{ab}$$

Сокращаем слагаемые rR_{ab} **и получаем квадратное уравнение:**

$$R_{ab}^2 - RR_{ab} - Rr = 0$$

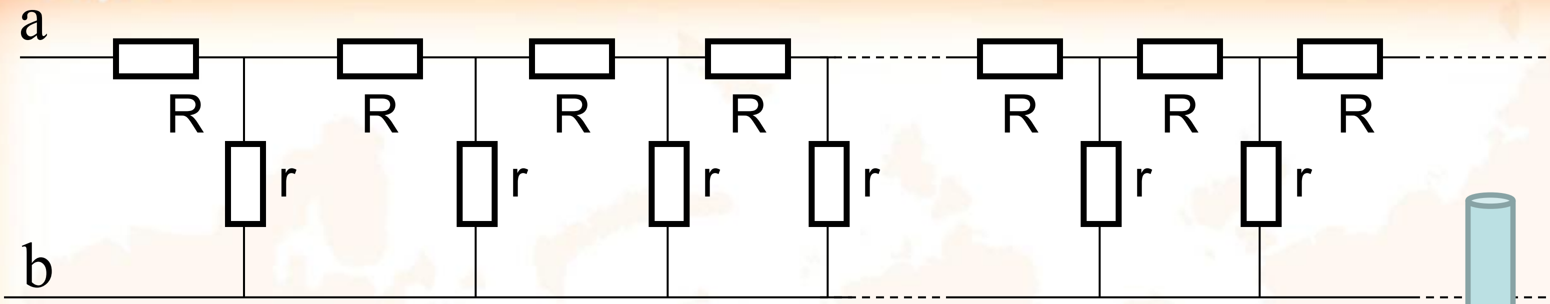
Решение: $R_{ab} = R/2 + (R^2/4 + Rr)^{1/2}$

Пример расчета длинной цепи



$$R_{ab} = R/2 + (R^2/4 + Rr)^{1/2} =\sim(Rr)^{1/2} \quad (R<<r)$$

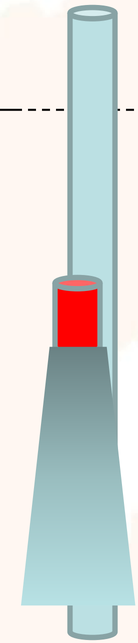
Пример расчета длинной цепи



$$R_{ab} = R/2 + (R^2/4 + Rr)^{1/2} =\sim (Rr)^{1/2} \quad (R<<r)$$

$l \sim \Delta x,\ S \sim d^2$

$R \sim \rho_M \Delta x/d^2$



$l \sim d,\ S \sim d\Delta x$

$r \sim \rho_B/\Delta x$

$$R_{ab} \sim (Rr)^{1/2} \sim (\rho_M \rho_B)^{1/2}/d$$

$$R_{ЛЭП} = \rho_M l/d^2 \Rightarrow l \sim (\rho_B/\rho_M)^{1/2} d$$

Спасибо за внимание!

Следующая лекция
27 октября