

О коэффициенте отражения и прохождения в геоэлектрике.

П.Н. Александров

ЦГЭМИ ИФЗ РАН, Троицк,

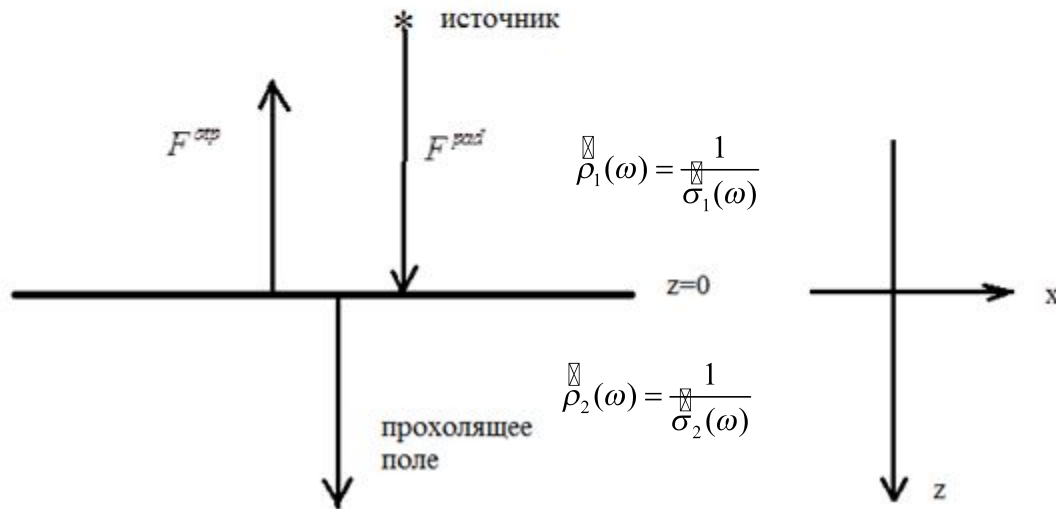
alexandr@igemi.troitsk.ru

О коэффициенте отражения в георадарном методе.

Коэффициент отражения – величина, характеризующая отношение отраженного поля F^{otp} к падающему F^{pad} на границе раздела сред.

$$F = F^{otp} + F^{pad} = \{F^{otp} \approx F^{pad}\} = KF^{pad} + F^{pad} = (K + 1)F^{pad}$$

$$K = \frac{F^{otp}}{F^{pad}}$$



В оптике коэффициент отражения хорошо известен [1] и имеет вид

$$K = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}}, \quad (1)$$

где ε_1 , ε_2 диэлектрические проницаемости граничащих двух полупространств. Этот коэффициент отражения используется для интерпретации георадарных данных [2] и является величиной, которая характеризует отношение отраженного поля к падающему на границе раздела сред. Он является частным случаем и имеются попытки распространить его на общий случай. Требуется выяснить, насколько такой подход обоснован для применения в интерпретации данных георадарного метода, поскольку из общего случая можно получить частный, а из частного получить общий нельзя. В частности это приводит к противоречию, а именно - в методе постоянного электрического поля аналогичный коэффициент отражения имеет вид

$$K_0 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}, \quad (2)$$

где σ_1 , σ_2 удельные электропроводности граничащих двух полупространств.

АНАЛИЗ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ ОТРАЖЕННОГО И ПРОХОДЯЩЕГО ПОЛЯ ЧЕРЕЗ ГРАНИЦУ РАЗДЕЛА СРЕД В ГЕОЭЛЕКТРИКЕ

Для этого воспользуемся преобразованием Фурье по горизонтальным координатам, т.е. разложением по плоским волнам. Тогда, заменяя пространственных производные по пространственным координатам $\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow ik_x, \frac{\partial}{\partial y} \rightarrow ik_y, i = \sqrt{-1}, k_x, k_y$ - соответствующие пространственные частоты по пространственным координатам x, y декартовой системы координат x, y, z , система уравнений Максвелла в проекции на оси координат примет вид

$$\begin{aligned}
 ik_y H_z - \frac{\partial}{\partial z} H_y &= \check{\sigma} E_x + J_x^{st} & ik_y E_z - \frac{\partial}{\partial z} E_y &= -i\omega\mu H_x \\
 \frac{\partial}{\partial z} H_x - ik_x H_z &= \check{\sigma} E_y + J_y^{st} & \frac{\partial}{\partial z} E_x - ik_x E_z &= -i\omega\mu H_y \\
 ik_x H_y - ik_y H_x &= \check{\sigma} E_z + J_z^{st} & ik_x E_y - ik_y E_x &= -i\omega\mu H_z
 \end{aligned} \tag{3}$$

где H_x, H_y, H_z - компоненты вектора напряженности магнитного поля, E_x, E_y, E_z - компоненты вектора напряженности электрического поля, $J_x^{st}, J_y^{st}, J_z^{st}$ - компоненты вектора плотности стороннего электрического тока, μ - магнитная проницаемость, $\check{\sigma} = \check{\sigma}(\omega)$ - удельная электропроводность среды как функция частоты (в частном случае она имеет вид $\check{\sigma} = \sigma + i\omega\varepsilon, \sigma \neq \sigma(\omega), \varepsilon \neq \varepsilon(\omega)$).

Граничные условия для компонент электромагнитного поля для немагнитной среды с номерами 1 и 2 имеют вид [Марков, Чаплин]

$$\begin{aligned}
 H_x^1 &= H_x^2, & \check{\rho}_1 \left(\frac{\partial}{\partial z} H_x^1 - ik_x H_z^1 \right) &= \check{\rho}_2 \left(\frac{\partial}{\partial z} H_x^2 - ik_x H_z^2 \right) \\
 H_y^1 &= H_y^2, & \check{\rho}_1 \left(ik_y H_z^1 - \frac{\partial}{\partial z} H_y^1 \right) &= \check{\rho}_2 \left(ik_y H_z^2 - \frac{\partial}{\partial z} H_y^2 \right), \\
 E_x^1 &= E_x^2, & \check{\sigma}_1 \left(\frac{\partial}{\partial z} E_x^1 + i\omega\mu H_y^1 \right) &= \check{\sigma}_2 \left(\frac{\partial}{\partial z} E_x^2 + i\omega\mu H_y^2 \right) \\
 E_y^1 &= E_y^2, & \check{\sigma}_1 \left(\frac{\partial}{\partial z} E_y^1 - i\omega\mu H_x^1 \right) &= \check{\sigma}_2 \left(\frac{\partial}{\partial z} E_y^2 - i\omega\mu H_x^2 \right)
 \end{aligned} \tag{4}$$

Где $\check{\rho}_{1,2} = \frac{1}{\check{\sigma}_{1,2}}$ - удельное сопротивление сред с номерами 1 и 2.

Самостоятельное значение имеют случаи

$$\check{\sigma}_1 E_z^1 = \check{\sigma}_2 E_z^2, \quad \frac{\partial}{\partial z} E_z^1 = \frac{\partial}{\partial z} E_z^2 \tag{5}$$

и

$$H_z^1 = H_z^2, \quad \frac{\partial}{\partial z} H_z^1 = \frac{\partial}{\partial z} H_z^2, \tag{6}$$

которые вытекают из дивергенций $\frac{\partial}{\partial z} E_z = -ik_x E_x - ik_y E_y$ и $\frac{\partial}{\partial z} H_z = -ik_x H_x - ik_y H_y$ с учетом непрерывности тангенциальных составляющих электромагнитного поля H_x , H_y , E_x , E_y при переходе границы раздела сред.

В последнем случае решение для первой среды (верхнее полупространство) имеет вид

$$H_z^1 = e^{k_1 z} C_1 + H_z^{\Pi},$$

для второй (нижнее полупространство)

$$H_z^2 = e^{-k_2 z} C_2,$$

(C_1, C_2 - искомые неизвестные коэффициенты, C_1 отвечает за коэффициент отражения, C_2 - за коэффициент прохождения), где с учетом разложения по плоским волнам

$$k_{1,2} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + i\omega\mu\check{\sigma}_{1,2}}, \operatorname{Re}(k_{1,2}) > 0, H_z^{\Pi} = H_z^{\Pi}(z) - \text{падающее (первичное) поле.}$$

На границе раздела сред $z = 0$ удовлетворяя граничным условиям (6), получим

$$C_1 + H_z^{\Pi}(0) = C_2$$

$$k_1 C_1 + \frac{\partial}{\partial z} H_z^{\Pi}(0) = -k_2 C_2 \quad (7)$$

Отсюда

$$C_1 = \frac{1}{k_2 + k_1} (-k_2 H_z^{\Pi}(0) - \frac{\partial}{\partial z} H_z^{\Pi}(0)) = \frac{1}{k_2 + k_1} (-k_2 H_z^{\Pi}(0) + k_1 H_z^{\Pi}(0)) = -\frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1} H_z^{\Pi}(0),$$

и коэффициент отражения K будет равен $K = -\frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1}$.

Аналогично получим для вертикальной компоненты вектора напряженности электрического поля E_z ,

$$C_1 = -\frac{\check{\sigma}_1 k_2 - \check{\sigma}_2 k_1}{\check{\sigma}_1 k_2 + \check{\sigma}_2 k_1} E_z^{\Pi}(0). \quad (8)$$

Из выражения (8) следуют частные случаи

$$k_x = k_y \neq 0, \omega \rightarrow 0, \frac{\check{\sigma}_1 k_2 - \check{\sigma}_2 k_1}{\check{\sigma}_1 k_2 + \check{\sigma}_2 k_1} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}.$$

$$k_x = k_y = 0, \omega \rightarrow \infty, \text{ или } k_x = k_y = 0, \sigma_1 = \sigma_2 = 0, \frac{\check{\sigma}_1 k_2 - \check{\sigma}_2 k_1}{\check{\sigma}_1 k_2 + \check{\sigma}_2 k_1} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}}.$$

$$k_x = k_y = 0, \omega \neq 0, \frac{\check{\sigma}_1 k_2 - \check{\sigma}_2 k_1}{\check{\sigma}_1 k_2 + \check{\sigma}_2 k_1} = \frac{\sqrt{\check{\sigma}_2} - \sqrt{\check{\sigma}_1}}{\sqrt{\check{\sigma}_2} + \sqrt{\check{\sigma}_1}}.$$

Для горизонтальной компоненты напряженности электрического поля E_x получим граничные условия для нормальной производной E_x из условия непрерывности вертикальной компоненты магнитного поля на границе раздела немагнитных сред (см. (4))

$$\frac{\partial}{\partial z} E_x^1 - ik_x E_z^1 = \frac{\partial}{\partial z} E_x^2 - ik_x E_z^2$$

$$\frac{\partial}{\partial z} E_x^1 - ik_x \check{\rho}_1 j_z^1 = \frac{\partial}{\partial z} E_x^2 - ik_x \check{\rho}_2 j_z^2$$

$$\text{Тогда } \frac{\partial}{\partial z} E_x^1 - \frac{\partial}{\partial z} E_x^2 = ik_x \check{\rho}_1 j_z^1 - ik_x \check{\rho}_2 j_z^2 = ik_x (\check{\rho}_1 - \check{\rho}_2) j_z^1 = ik_x (\check{\rho}_1 - \check{\rho}_2) j_z^2.$$

Отраженное поле

$$C_1 = ik_x \frac{\check{\sigma}_2 - \check{\sigma}_1}{k_1 + k_2} \frac{2k_1}{\check{\sigma}_1 k_2 + \check{\sigma}_2 k_1} E_z^{\text{II}}(0) + \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} E_x^{\text{II}}(0).$$

Проходящее поле

$$C_2 = ik_x \frac{\check{\sigma}_2 - \check{\sigma}_1}{\check{\sigma}_1 k_2 + \check{\sigma}_2 k_1} \frac{2k_1}{k_1 + k_2} E_z^{\text{II}}(0) + \frac{2k_1}{k_1 + k_2} E_x^{\text{II}}(0)$$

Рассмотрим частный случай постоянного поля $\omega = 0$, тогда

$$k_1 = k_2 = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$$

$$C_1 = ik_x \frac{\check{\sigma}_2 - \check{\sigma}_1}{\check{\sigma}_1 k_2 + \check{\sigma}_2 k_1} \frac{2k_1}{k_1 + k_2} E_z^{\Pi}(0) + \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} E_x^{\Pi}(0) = \frac{\check{\sigma}_2 - \check{\sigma}_1}{\check{\sigma}_1 + \check{\sigma}_2} E_x^{\Pi}(0)$$

$$C_2 = ik_x \frac{\check{\rho}_1 - \check{\rho}_2}{k_1 + k_2} \frac{2\check{\sigma}_1 \check{\sigma}_2 k_1}{\check{\sigma}_1 k_2 + \check{\sigma}_2 k_1} E_z^{\Pi}(0) + \frac{2k_1}{k_1 + k_2} E_x^{\Pi}(0) = \frac{2\check{\sigma}_2}{\check{\sigma}_1 + \check{\sigma}_2} E_x^{\Pi}(0),$$

что совпадает с решениями соответствующей задачи для потенциального электрического поля.

АНАЛИЗ ОТРАЖЕННОГО И ПРОХОДЯЩЕГО ПОЛЯ НА ОСНОВЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Решение прямой задачи.

Систему уравнений (3) можно переписать в виде системы обыкновенных векторных уравнений

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{X} = A\mathbf{X} + \mathbf{Y}^{ex}, \text{ где } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ E_x \\ E_y \end{pmatrix}, \mathbf{Y}^{ex} - \text{вектор сторонних источников электромагнитного поля.}$$

Матрица A включает электромагнитные параметры среды (включая бианизотропные), частоту ω и пространственные частоты k_x, k_y . Последние при дальнейших исследованиях положим равными нулю $k_x = k_y = 0$, т.е. будем рассматривать плоское поле.

Рассмотрим решение прямой задачи как краевую задачу для неоднородного слоя.

Простая и эффективная схема решения прямой задачи на основе численного подхода (интегрирования) и предположении малости толщины прослойки, которые являются результатом разбиения слоя на прослойки.

В каждом отдельном прослойке с номером j толщиной $z_{j+1} - z_j$, электромагнитное поле удовлетворяет системе векторных уравнений

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{X} = A\mathbf{X} \text{ или } \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{X} - A\mathbf{X} = [0].$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \sigma \\ 0 & 0 & -\sigma & 0 \\ 0 & -i\omega\mu & 0 & 0 \\ i\omega\mu & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

После интегрирования по толщине прослойки, при условии что длина волны намного больше толщины пропластка, и полагая

$\mathbf{X}(z_{j+1}) - A_j \mathbf{X}(z_j) - \mathbf{X}(z_j) = [0]$, учитывая граничные условия $\mathbf{X}(z_j) = \mathbf{X}(z_{j-1})$, получим

$$\mathbf{X}(z_{j+1}) - A_j \mathbf{X}(z_j) - \mathbf{X}(z_{j-1}) = [0].$$

При $z = z_0$ находится источник – далее поле равно нулю.

При $z = z_N$, N - номер последнего пропластка, на кровле которого поле равно нулю, аналог полного внутреннего отражения.

Тогда получаем систему уравнений

$$\mathbf{X}^1(z_2) - A_1 \mathbf{X}^1(z_1) = \mathbf{X}(z_0) = \mathbf{X}^{ext}$$

.....

$$\mathbf{X}^j(z_{j+1}) - A_j \mathbf{X}^j(z_j) - \mathbf{X}^{j-1}(z_{j-1}) = [0]$$

.....

$$-A_N \mathbf{X}^N(z_N) - \mathbf{X}^{N-1}(z_{N-1}) = [0]$$

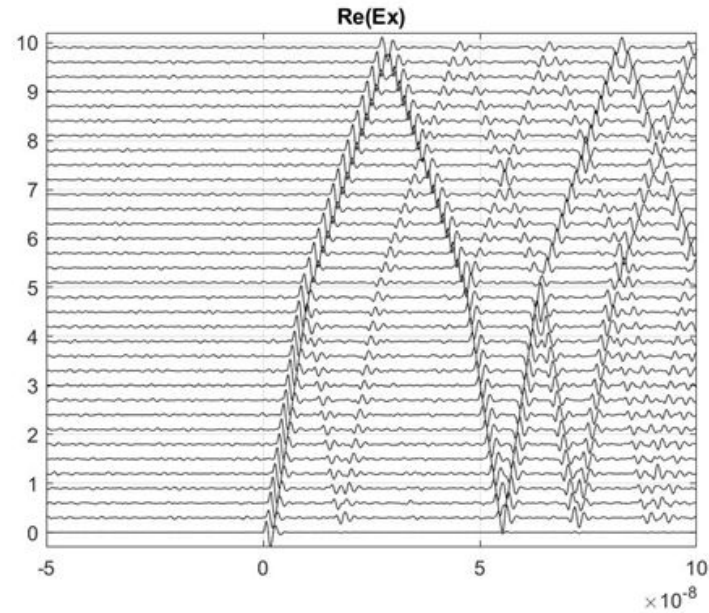
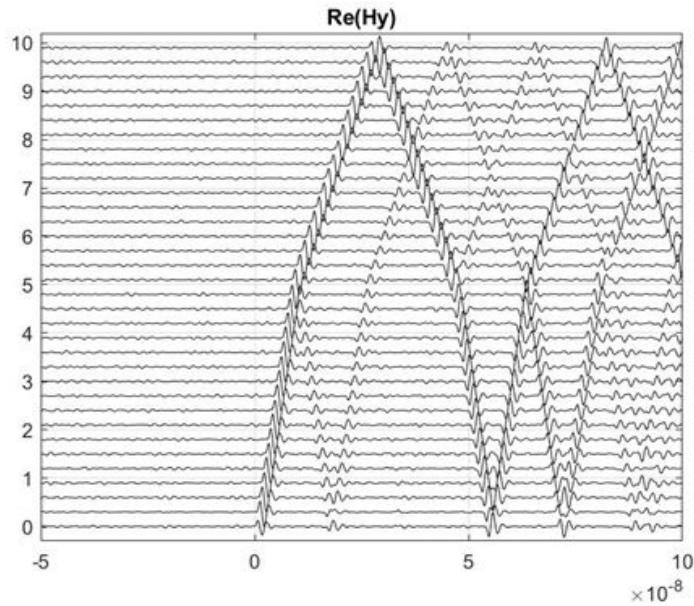
Это приводит к системе линейных алгебраических уравнений вида

$$\mathbf{Y} = \mathbf{B}\mathbf{F}, \text{ где } \mathbf{Y} = \mathbf{X}^{ext} = \begin{pmatrix} 0 \\ H_y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ с квазидиагональной матрицей } \mathbf{B}. \text{ Откуда } \mathbf{F} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{Y}.$$

Численные примеры. Параметры вакуума $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ Гн/м}$, $\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} \text{ Ф/м}$.

1. Слой с одной границей по электропроводности.
Отражение по удельной электропроводности

$$\sigma = 4(10^{(-5)} + i\omega\varepsilon_0)$$



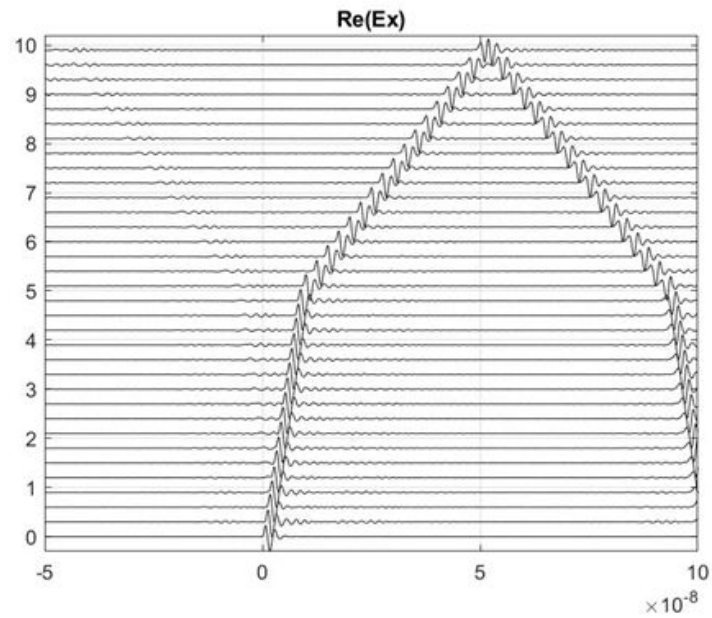
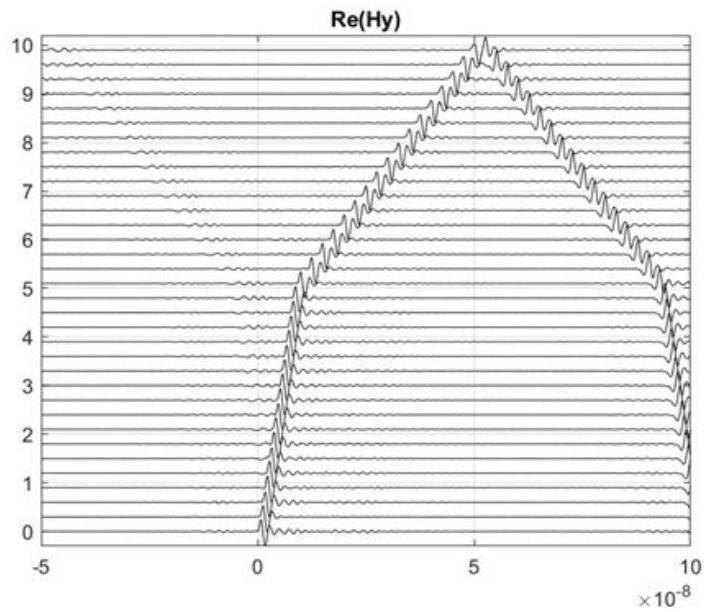
$$\sigma = 10^{(-5)} + i\omega\varepsilon_0$$

2. Безотражающая граница.

$$\frac{\sqrt{\mu^1 \sigma^2} - \sqrt{\mu^2 \sigma^1}}{\sqrt{\mu^1 \sigma^2} + \sqrt{\mu^2 \sigma^1}} = 0$$

$$\sigma = 4(10^{(-5)} + i\omega\epsilon_0)$$

$$\mu = 4\mu_0$$



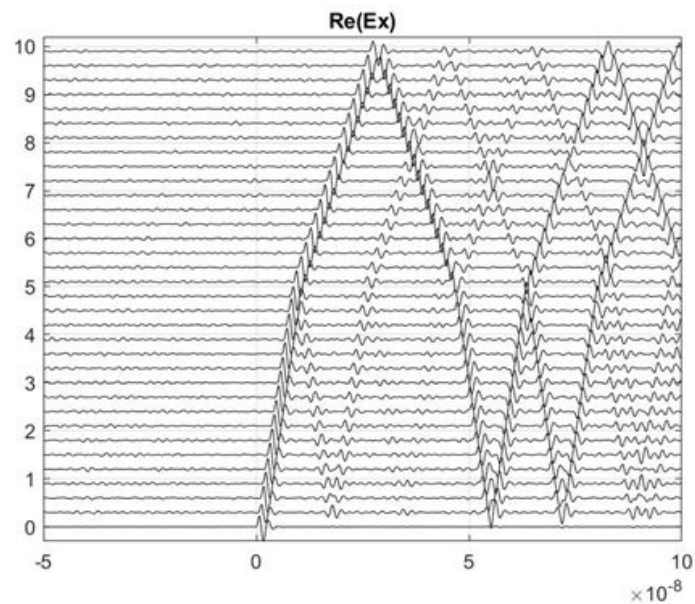
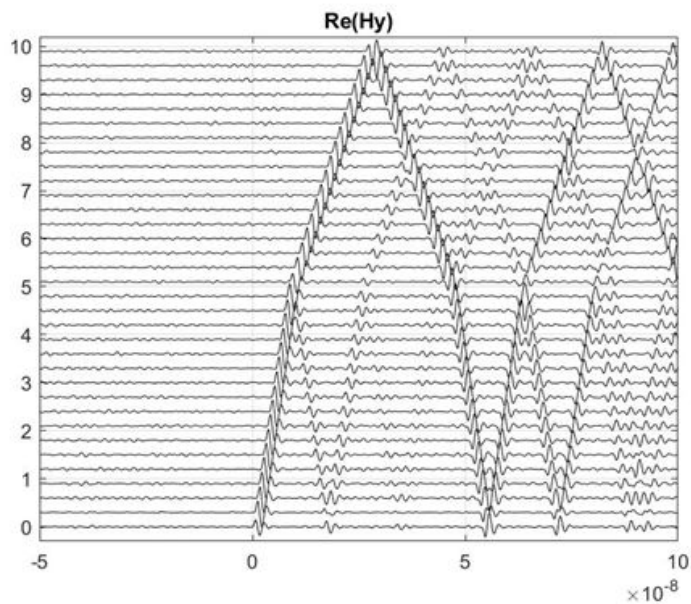
$$\sigma = 10^{(-5)} + i\omega\epsilon_0$$

$$\mu = \mu_0$$

3. Слой с одной границей по магнитной проницаемости.

$$\sigma = 10^{(-5)} + i\omega\epsilon_0$$

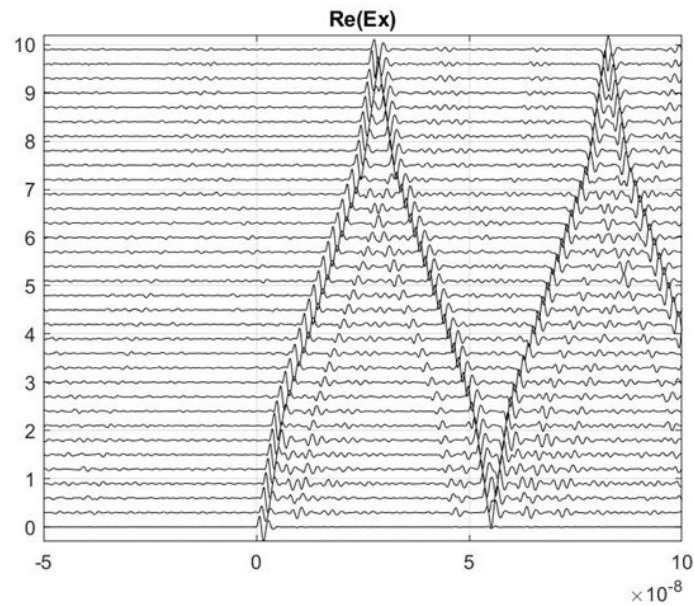
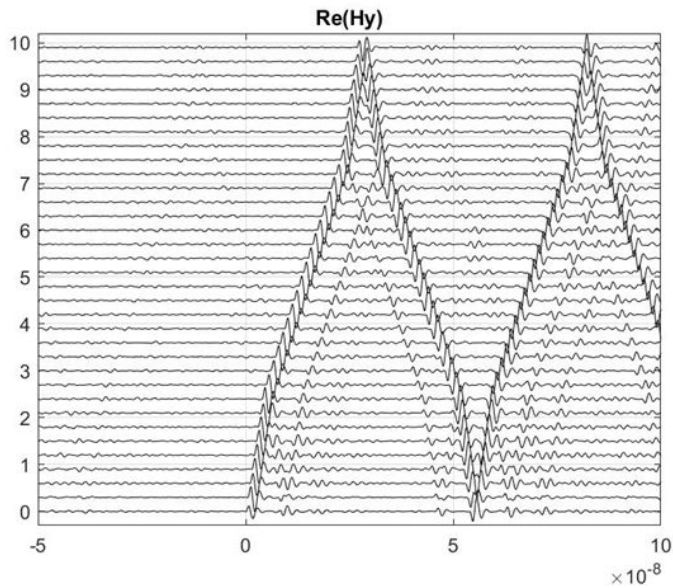
$$\mu = 4\mu_0$$



$$\sigma = 10^{(-5)} + i\omega\epsilon_0$$

$$\mu = \mu_0$$

4. Трехслойная модель – немагнитная среда.



$$\sigma = 10^{(-5)} + i\omega\epsilon_0$$

$$\mu = \mu_0$$

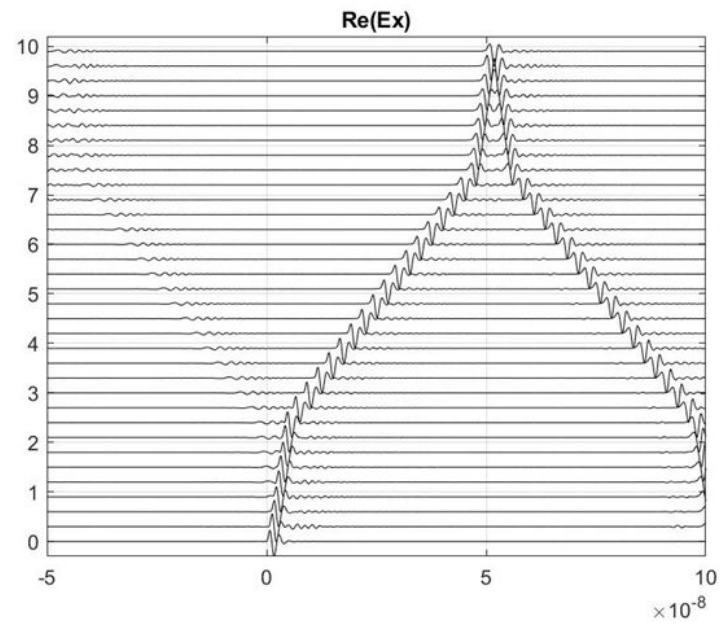
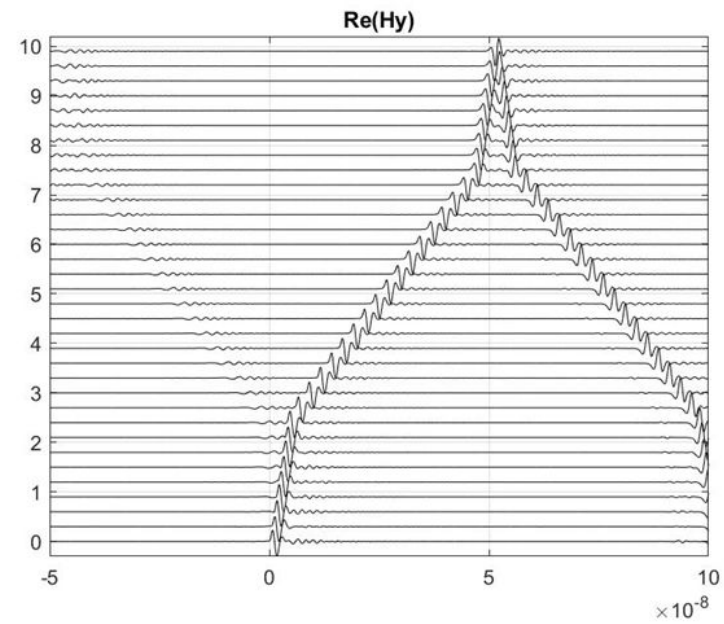
$$\sigma = 4(10^{(-5)} + i\omega\epsilon_0)$$

$$\mu = \mu_0$$

$$\sigma = 10^{(-5)} + i\omega\epsilon_0$$

$$\mu = \mu_0$$

5. Безотражающая граница.



$$\sigma = 10^{(-5)} + i\omega\epsilon_0$$

$$\mu = \mu_0$$

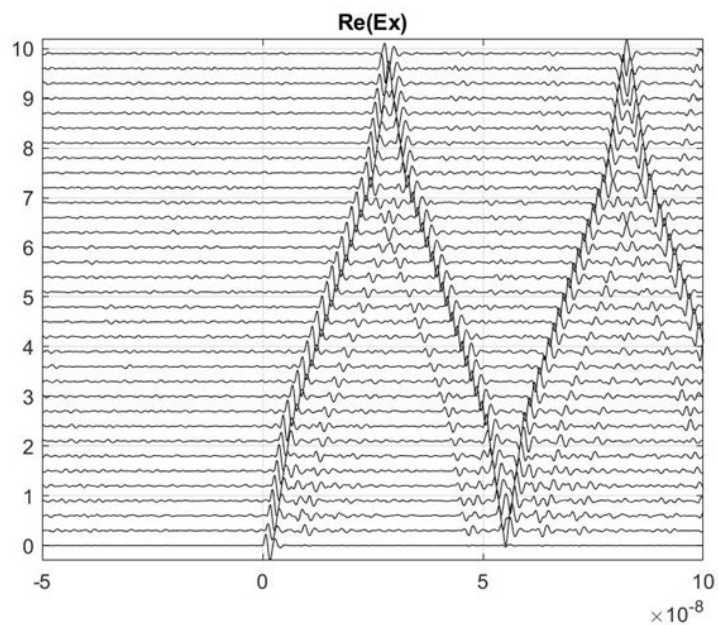
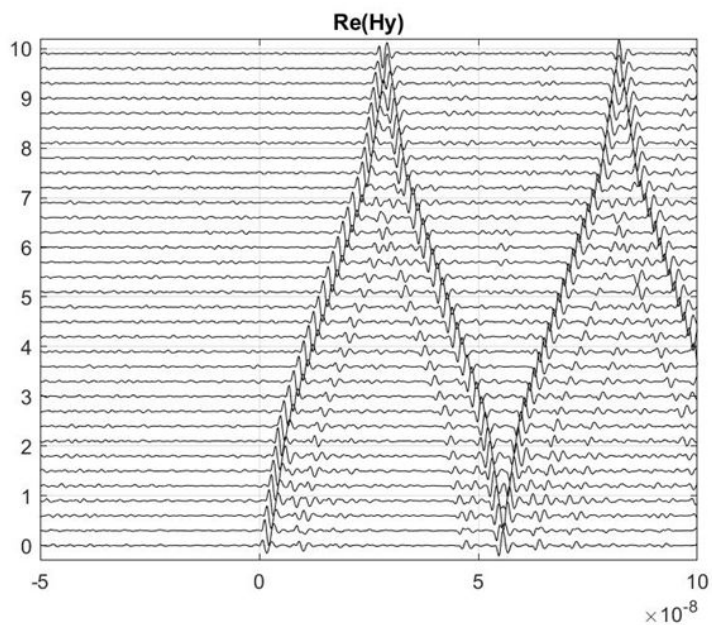
$$\sigma = 4(10^{(-5)} + i\omega\epsilon_0)$$

$$\mu = 4\mu_0$$

$$\sigma = 10^{(-5)} + i\omega\epsilon_0$$

$$\mu = \mu_0$$

6. Переотражения по магнитной проницаемости



$$\sigma = 10^{(-5)} + i\omega\epsilon_0$$

$$\mu = \mu_0$$

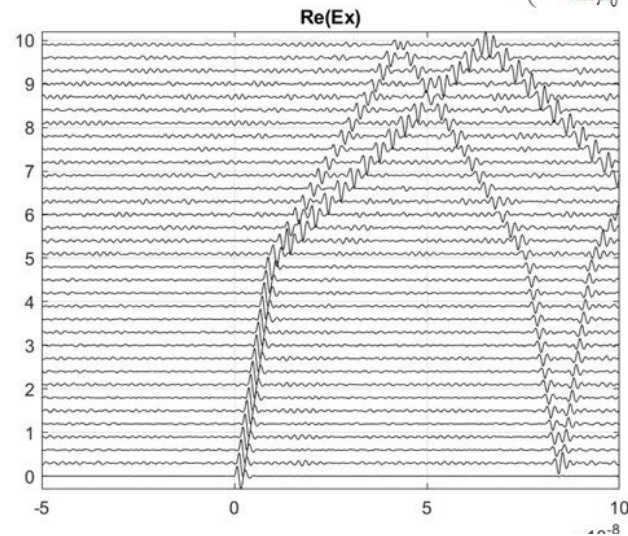
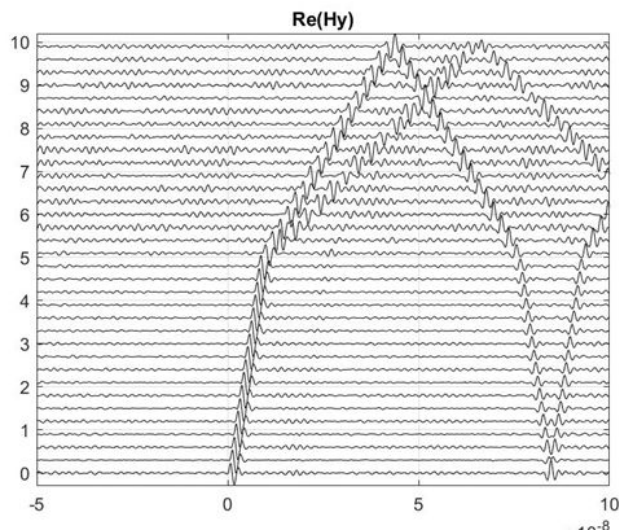
$$\sigma = 10^{(-5)} + i\omega\epsilon_0$$

$$\mu = 4\mu_0$$

$$\sigma = 10^{(-5)} + i\omega\epsilon_0$$

$$\mu = \mu_0$$

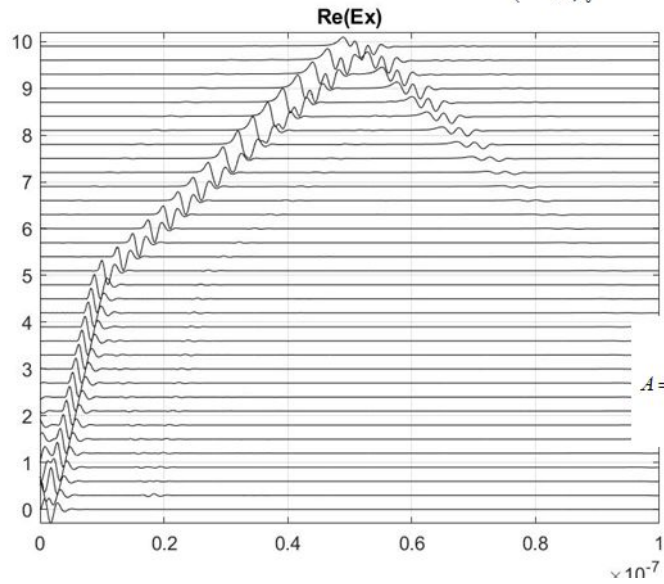
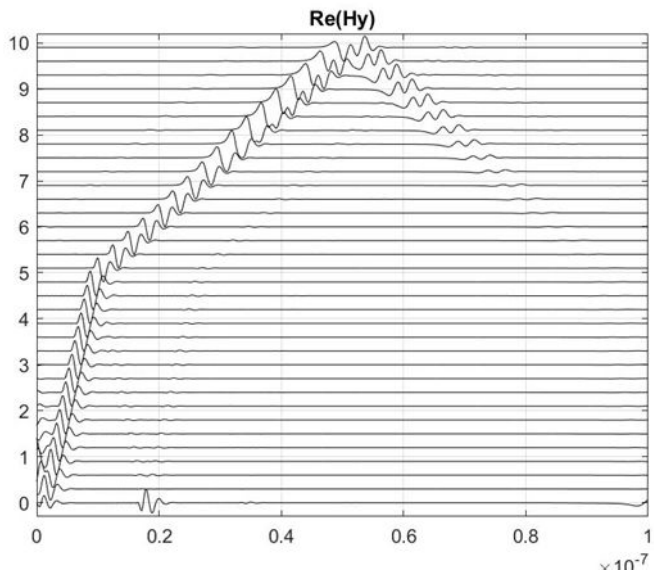
7. Двулучепреломление.



$$A = \begin{pmatrix} -i\omega\mu_0 10^{-21} & 0 & 0 & 4(10^{-5} + i\omega\varepsilon_0) \\ 0 & i\omega\mu_0 10^{-21} & -4(10^{-5} + i\omega\varepsilon_0) & 0 \\ 0 & -4i\omega\mu_0 & -i\omega\mu_0 & 0 \\ 4i\omega\mu_0 & 0 & 0 & i\omega\mu_0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 10^{-5} + i\omega\varepsilon_0 \\ 0 & 0 & -10^{-5} + i\omega\varepsilon_0 & 0 \\ 0 & -i\omega\mu_0 & 0 & 0 \\ i\omega\mu_0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Технология СТЕЛС.



$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{i}\omega\mu_0 10^{-31} & 0 & 0 & 4(10^{-5} + i\omega\varepsilon_0) \\ 0 & -\sqrt{i}\omega\mu_0 10^{-31} & -4(10^{-5} + i\omega\varepsilon_0) & 0 \\ 0 & -4i\omega\mu_0 & -\sqrt{i}\omega\mu_0 & 0 \\ 4i\omega\mu_0 & 0 & 0 & \sqrt{i}\omega\mu_0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 10^{-5} + i\omega\varepsilon_0 \\ 0 & 0 & -10^{-5} + i\omega\varepsilon_0 & 0 \\ 0 & -i\omega\mu_0 & 0 & 0 \\ i\omega\mu_0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Из общего случая можно получить частный,
и это позволяет определить
границы применимости частного случая.

Закон Бэра

«От простого к сложному, от общего к частному...»

Спасибо за внимание!