

# Лекция 6

## ▣ Объявление:

<https://www.lektorium.tv/potencialnye-techeniya-zhidkosti>

## ▣ Комплексный потенциал

## ▣ Комплексная сопряжённая скорость

## ▣ Примеры простейших течений

# Комплексный потенциал

Согласно теореме Римана условия Коши-Римана являются условиями существования аналитической функции

$$w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) \quad z = x + iy \quad i = \sqrt{-1} \quad (6.7)$$

Функция  $w(z)$  называется комплексным потенциалом

$$\varphi(x, y) = \operatorname{Re}[w(z)], \quad \psi(x, y) = \operatorname{Im}[w(z)]$$

$$\varphi(x, y) = C \quad - \text{эквипотенциали} \quad \psi(x, y) = C' \quad - \text{линии тока} \quad (6.8)$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dx} = \frac{d(\varphi + i\psi)}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = u - iv, \quad (6.9)$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d(iy)} = -\frac{id(\varphi + i\psi)}{dy} = \frac{d(\psi - i\varphi)}{dy} = \frac{\partial \psi}{\partial y} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y} = u - iv$$

$$u = \operatorname{Re}\left(\frac{dw}{dz}\right); \quad v = -\operatorname{Im}\left(\frac{dw}{dz}\right). \quad (6.10)$$

# Сопряжённая комплексная скорость

$$V = u + iv = |V|(\cos \theta + i \sin \theta) = |V|e^{i\theta} \quad \text{- комплексная скорость}$$

$$\bar{V} = u - iv = |V|(\cos \theta - i \sin \theta) = |V|e^{-i\theta} \quad \text{- сопряжённая комплексная скорость}$$

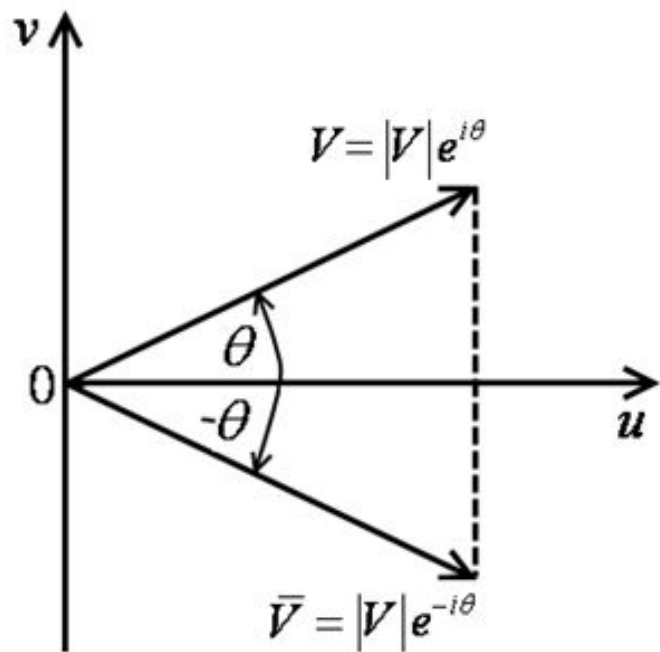


Рисунок 6.1 – Годограф скорости

$$\bar{V} = u - iv = \frac{dw}{dz}. \quad (6.11)$$

$$|V| = |\bar{V}| = \left| \frac{dw}{dz} \right|. \quad (6.12)$$

Плоскость  $xOy$  называют физической плоскостью или плоскостью течения. Совокупность значений комплексной скорости  $V$  образует плоскость годографа скорости, или просто плоскость годографа.

$$\operatorname{Re}(\oint \bar{V} dz) = \oint (u dx + v dy) = \oint d\varphi = \Gamma, \quad (6.13)$$

$$\operatorname{Im}(\oint \bar{V} dz) = \oint (u dy - v dx) = \oint d\psi = Q.$$

# Примеры простейших потенциальных течений

## 1. Однородный поток

$$w(z) = \bar{V}_\infty z, \quad \bar{V}_\infty = u_\infty - iv_\infty = |V_\infty| e^{-i\theta_\infty} = |V_\infty| (\cos \theta_\infty - i \sin \theta_\infty),$$

$$w(z) = (u_\infty - iv_\infty)(x + iy) = (u_\infty x + v_\infty y) + i(-v_\infty x + u_\infty y), \quad (6.14)$$

$$\varphi = u_\infty x + v_\infty y, \quad \psi = -v_\infty x + u_\infty y, \quad \bar{V} = \frac{dw}{dz} = \bar{V}_\infty, \quad V = V_\infty = u_\infty + iv_\infty.$$

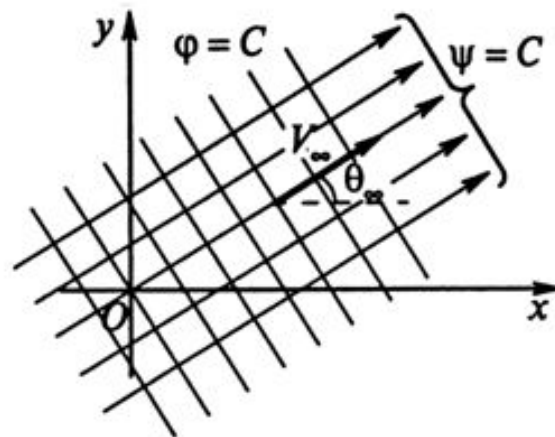


Рисунок 6.2 – Линии тока и эквипотенциали для однородного потока

Для случая  $\theta_\infty = 0$   $w(z) = u_\infty z$ ,  $\bar{V}_\infty = V_\infty = u_\infty$ ,  $\varphi = u_\infty x$ ,  $\psi = u_\infty y$ ,  $V = u_\infty$



# Примеры простейших потенциальных течений. Источник и сток

## 2. Источник или сток

$$w(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln z, \quad z = re^{i\theta}, \quad w(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(re^{i\theta}), \quad \varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln r, \quad \psi = \frac{Q}{2\pi} \theta, \quad (6.15)$$

$$\vec{V} = \frac{Q}{2\pi z}, \quad |V| = \frac{|Q|}{2\pi r}$$

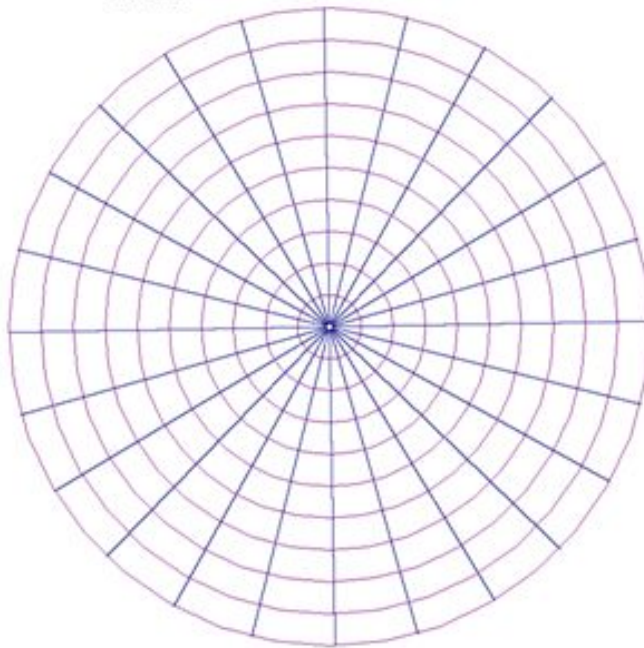


Рисунок 6.3 - Сток

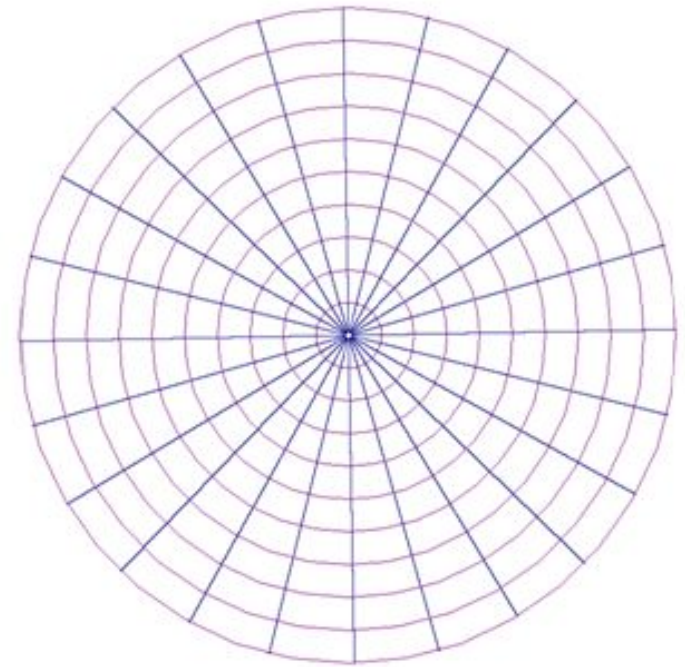


Рисунок 6.4 - Источник

# Примеры простейших потенциальных течений. Вихрь

3. Вихрь  $w(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z$ ,  $\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$ ,  $\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$ ,  $\vec{V} = \frac{\Gamma}{2\pi iz}$ ,  $|V| = \frac{|\Gamma|}{2\pi r}$  (6.16)

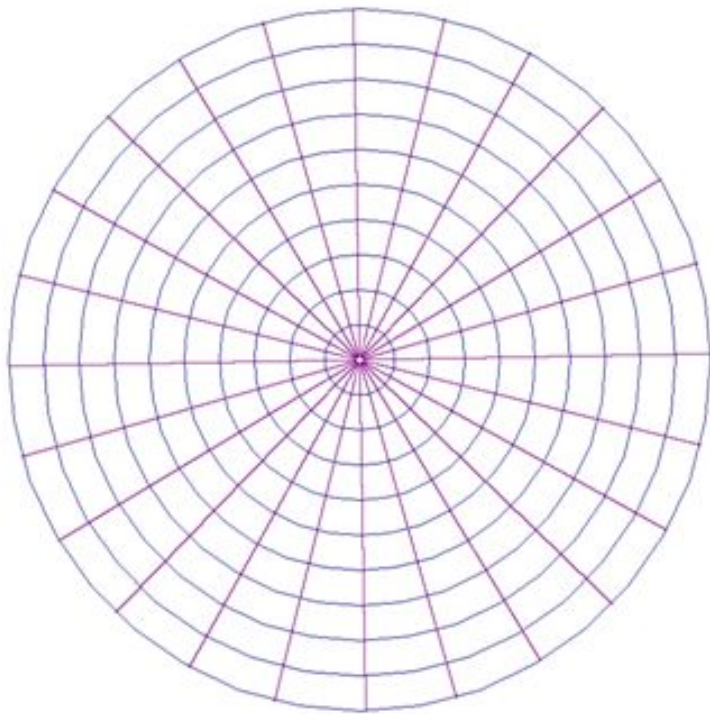


Рисунок 6.5 - Вихрь

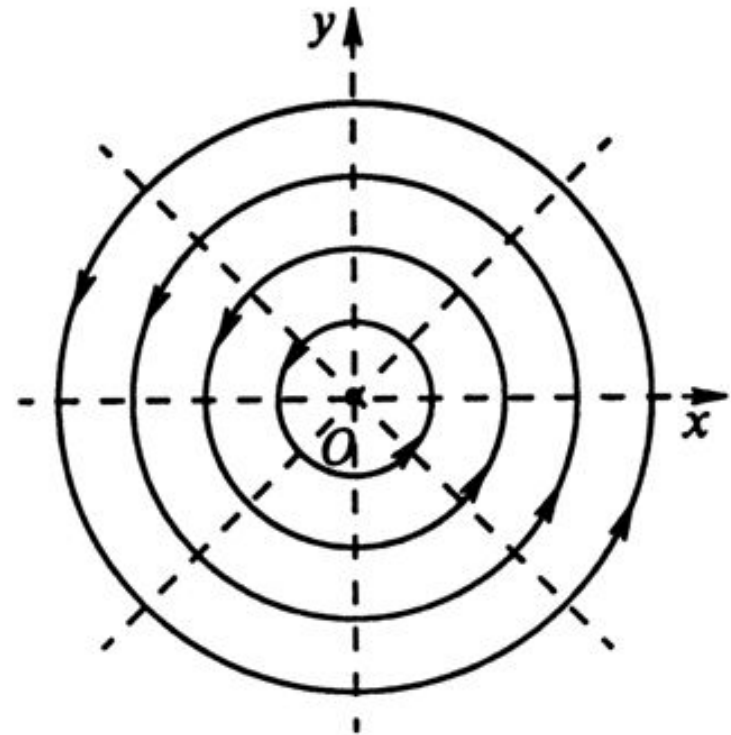


Рисунок 6.6 - Вихрь

# Примеры простейших потенциальных течений. Вихреисточник

4. Вихреисточник  $w(z) = \frac{Q - \Gamma i}{2\pi} \ln z$  (6.17)

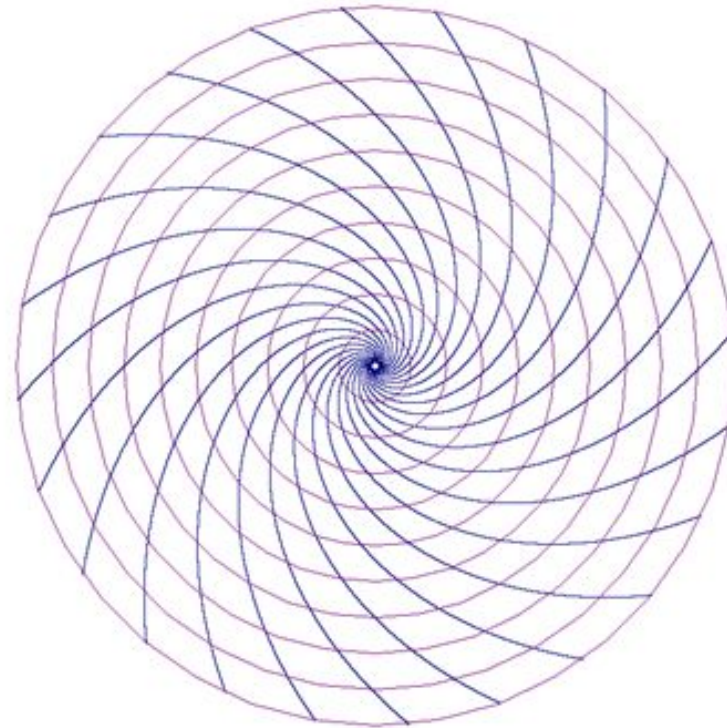


Рисунок 6.7 - Вихреисточник



# Примеры простейших потенциальных течений

## 5. Наложение потока от источника на однородный поток

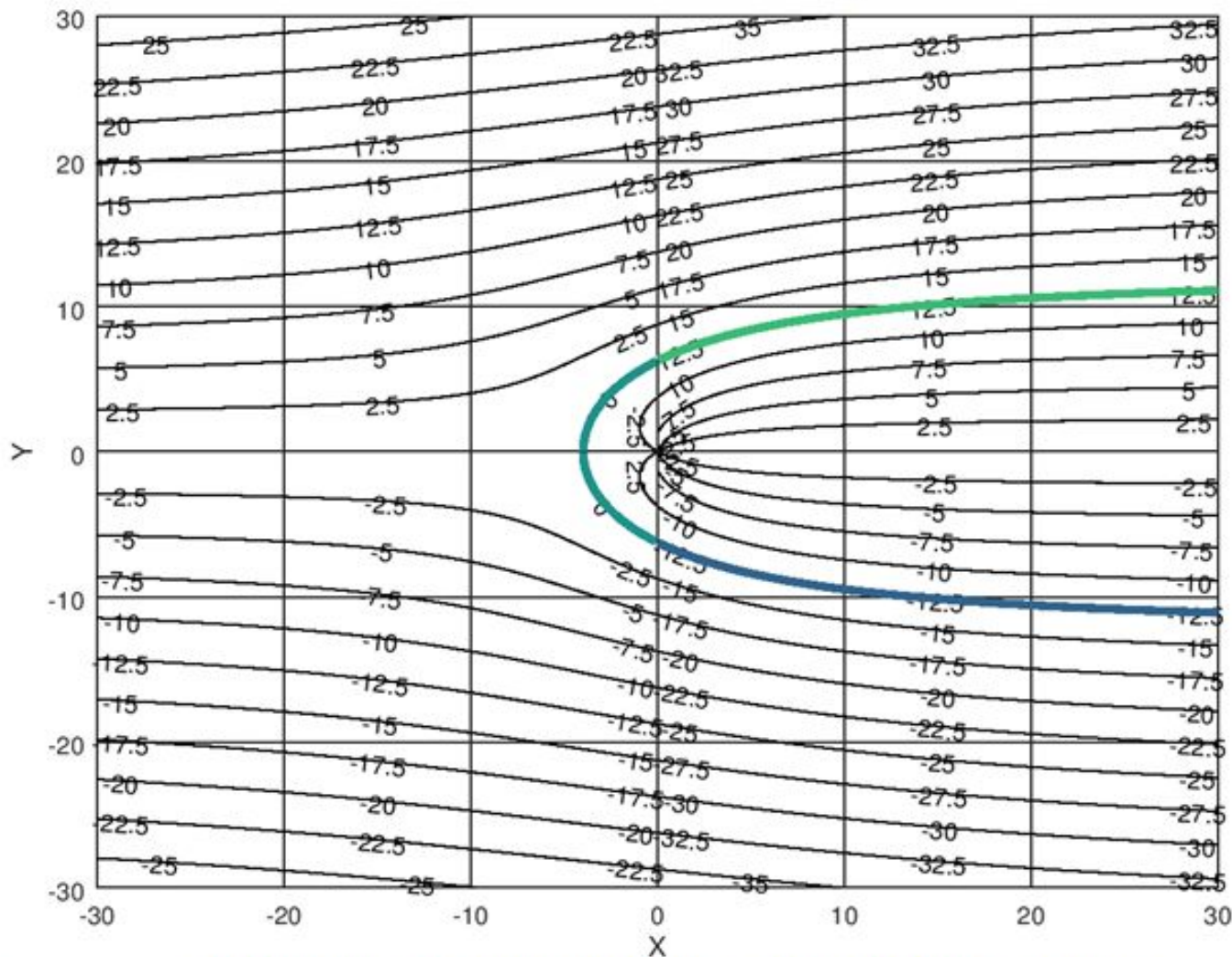


Рисунок 6.8 – Источник в однородном потоке



# Примеры простейших потенциальных течений. Источник + Сток

5. Источник + Сток

$$w(z) = \frac{Q}{2\pi} [\ln(z+h) - \ln(z-h)] \quad (6.18)$$

6. Диполь

$$w(z) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0, |Q| \rightarrow \infty, \\ Q \cdot 2h \rightarrow m}} \frac{Q \cdot 2h \ln(z+h) - \ln(z-h)}{2\pi} = \frac{m}{2\pi} \frac{d \ln z}{dz} = \frac{m}{2\pi z} \quad (6.19)$$

$$\varphi = \frac{mx}{2\pi(x^2 + y^2)} = \frac{mx}{2\pi r}, \quad \psi = -\frac{my}{2\pi(x^2 + y^2)} = -\frac{my}{2\pi r},$$

$$\vec{V} = -\frac{m}{2\pi z^2}, \quad |V| = \frac{|m|}{2\pi r^2} \quad m - \text{момент диполя}$$

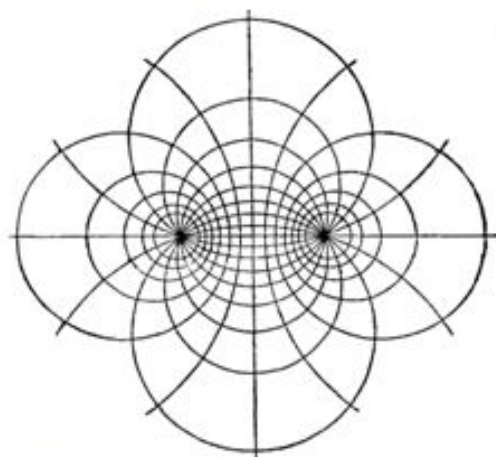
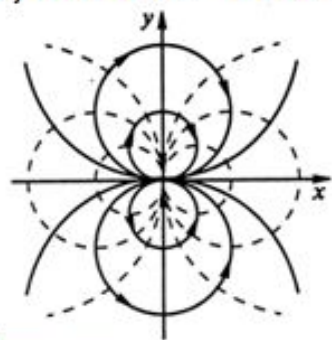


Рисунок 6.8 – Источник и сток



Линии тока -

$$x^2 + \left(y - \frac{m}{4\pi C'}\right)^2 = \left(\frac{m}{4\pi C'}\right)^2 \quad (6.20)$$

Эквипотенциали -

$$\left(x - \frac{m}{4\pi C'}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{m}{4\pi C'}\right)^2$$

Рисунок 6.9 – Диполь

# Бесциркуляционное течение около цилиндра

$$(\Gamma = 0)$$

$$\begin{aligned} W &= V_{\infty}z + \frac{m}{z} = V_{\infty}(x + iy) + \frac{m \cdot z}{z \cdot z} = V_{\infty}(x + iy) + \frac{m(x - iy)}{x^2 + y^2} = \\ &= V_{\infty}(x + iy) + \frac{mx}{x^2 + y^2} - i \frac{my}{x^2 + y^2} \end{aligned} \quad (6.21)$$

$$\psi = V_{\infty}y - \frac{my}{x^2 + y^2} \quad (6.22)$$

$$\psi = \text{const} \quad (6.23)$$

$$V_{\infty}y - \frac{my}{x^2 + y^2} = \text{const} \quad (6.24)$$

$$C=0$$

$$\psi_0=0$$

$$V_{\infty}y - \frac{my}{x^2 + y^2} = 0 \quad (6.25)$$

Нулевая линия тока

# Бесциркуляционное обтекание цилиндра


$$y = \left( V_{\infty} - \frac{m}{x^2 + y^2} \right) \quad (6.26)$$

$$y = 0 \quad V_{\infty} - \frac{m}{x^2 + y^2} = 0 \quad (6.27)$$

$$\frac{m}{x^2 + y^2} = V_{\infty} \quad (6.28)$$


$$\frac{m}{V_{\infty}} = x^2 + y^2 \quad (6.29)$$

$$r^2 = \frac{m}{V_{\infty}} \quad (6.30)$$


$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (6.31)$$



# Бесциркуляционное течение около цилиндра

$$m = V_{\infty} r^2 \quad (6.32)$$

$$V_{\infty} y - \frac{V_{\infty} r^2 y}{x^2 + y^2} = \text{const} \quad (6.33)$$

Течение около цилиндра:  $W_{\text{ц}} = V_{\infty} \left( z + \frac{r^2}{z} \right)$  (6.34)

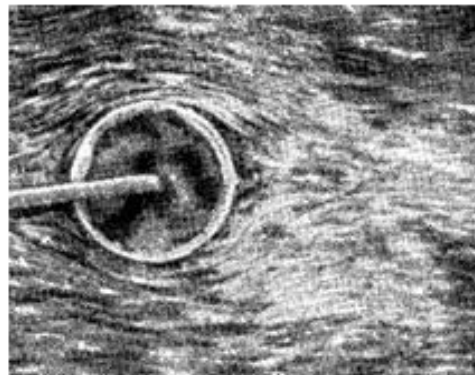


Рисунок 6.10 – Визуализация течение около цилиндра

<http://net-portal.ru/sites/default/files/user/Image/177/2.jpg>

# Бесциркуляционное обтекание цилиндра

$$m = 2\pi a^2 u_\infty \quad (6.35)$$

$$w(z) = u_\infty z + \frac{2\pi a^2 u_\infty}{2\pi} \frac{1}{z} = u_\infty \left( z + \frac{a^2}{z} \right) \quad (6.36)$$

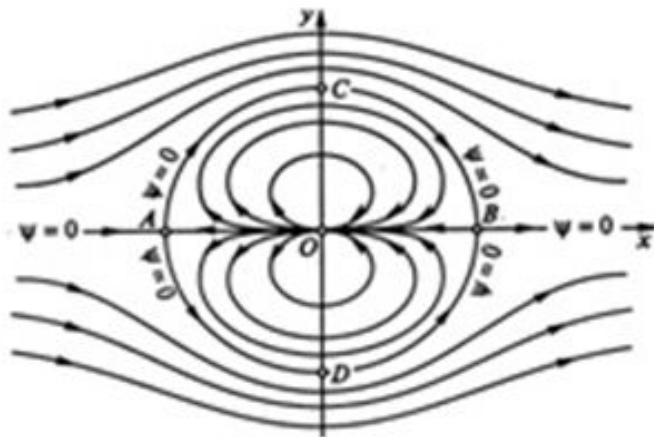


Рисунок 6.11 – Линии тока обтекания цилиндра

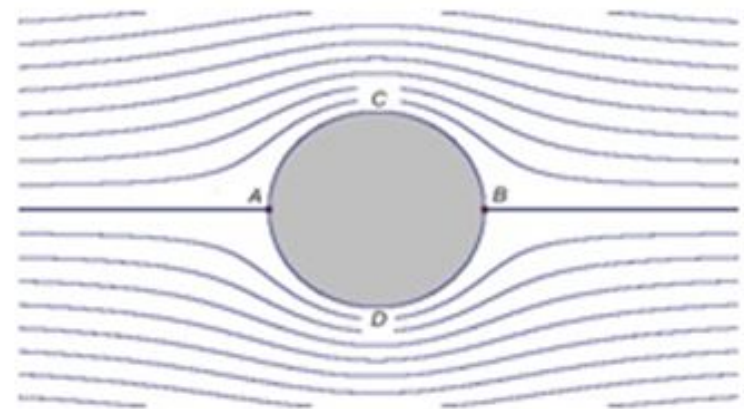


Рисунок 6.12 – Линии тока обтекания цилиндра (компьютерная реализация)

# Скорость на поверхности цилиндра

$$\bar{V} = \frac{dw}{dz} = u_{\infty} \left( 1 - \frac{a^2}{z^2} \right). \quad (6.37)$$

$$z = ae^{i\varepsilon} \quad (6.38)$$

$$\bar{V} = u_{\infty} (1 - e^{-2i\varepsilon}) = 2iu_{\infty} \frac{e^{i\varepsilon} - e^{-i\varepsilon}}{2i} e^{-i\varepsilon} = 2ie^{-i\varepsilon} u_{\infty} \sin \varepsilon, \quad (6.39)$$

$$|V| = 2u_{\infty} |\sin \varepsilon|.$$

$$|V_{\max}| = 2u_{\infty}. \quad (6.40)$$

$$c_p = \frac{p - p_{\infty}}{\frac{1}{2}\rho u_{\infty}^2} = 1 - \frac{|V|^2}{u_{\infty}^2} = 1 - 4\sin^2 \varepsilon. \quad (6.41)$$



# Давление на поверхности цилиндра

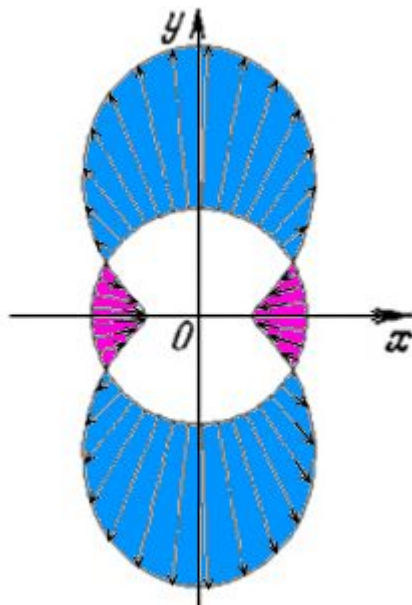


Рисунок 6.13 – Диаграмма распределения давления

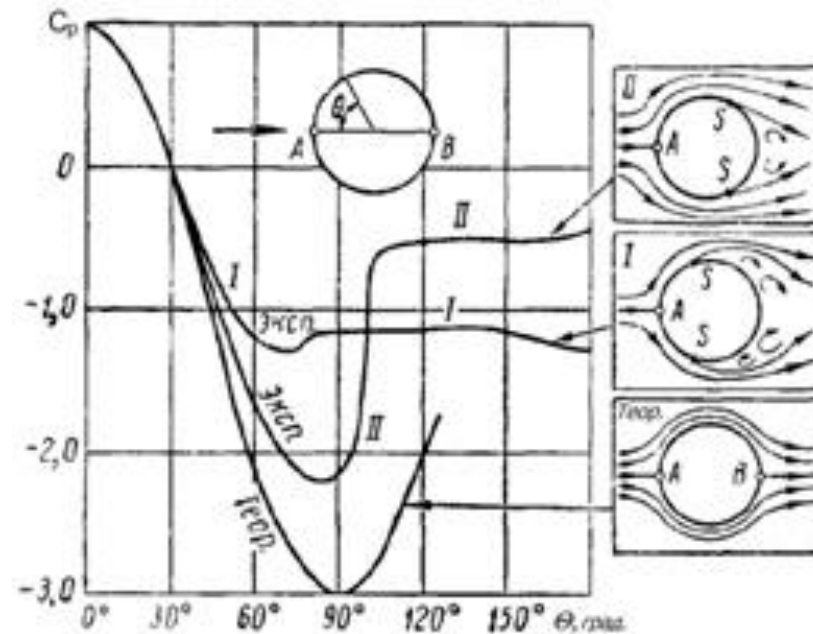


Рисунок 6.14 – Распределение давления по поверхности цилиндра