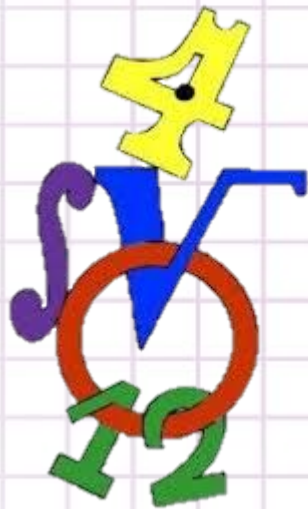


Похідна та її застосування



***” Математику вже тому вивчати
потрібно, що вона розум до
порядку приводить ! ”***

М. Ломоносов



Означення похідної

3) Знайдемо границю цього відношення при умові, що $\Delta x \rightarrow 0$, тобто:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Якщо дана границя існує, то її називають похідною функції $y=f(x)$ в точці x_0 і позначають $f'(x_0)$ або y' .

Похідною функції $y=f(x)$ в точці x_0 називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу при умові, що приріст аргументу прямує до нуля, а границя існує, тобто

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$



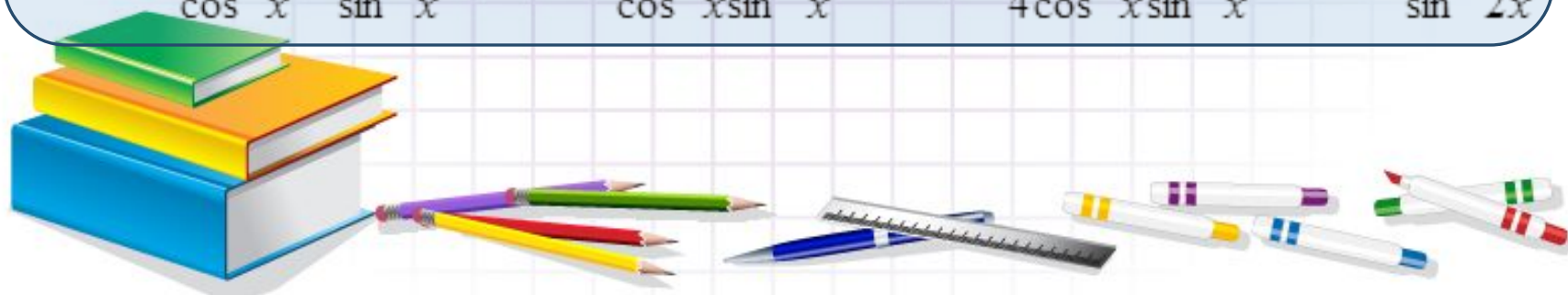
№	Функція	Похідна
1	$y = C, C — \text{ стала}$	$y' = 0$
2	$y = x^p, p \in \mathbf{Z}$	$y' = px^{p-1}$
3	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
4	$y = \sin x$	$y' = \cos x$
5	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
6	$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
7	$y = \operatorname{ctg} x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Приклади знаходження похідних

Приклад 1. $f(x) = x^3 - x^2 + x - 4$;
 $f'(x) = (x^3 - x^2 + x - 4)' = (x^3)' - (x^2)' + (x)' - 4' = 3x^2 - 2x + 1 + 0 = 3x^2 - 2x + 1$;

Приклад 2. $f(x) = \cos x + \sin x + 5$;
 $f'(x) = (\cos x + \sin x + 5)' = (\cos x)' + (\sin x)' + 5' = -\sin x + \cos x + 0 = \cos x - \sin x$.

Приклад 3. $f(x) = x^6 + \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$
 $f'(x) = (x^6 + \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x)' = (x^6)' + (\operatorname{tg} x)' - (\operatorname{ctg} x)' = 6x^5 + \frac{1}{\cos^2 x} - \left(\frac{1}{\sin^2 x} \right) =$
 $= 6x^5 + \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} = 6x^5 + \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} = 6x^5 + \frac{4}{4 \cos^2 x \sin^2 x} = 6x^5 + \frac{4}{\sin^2 2x}$.



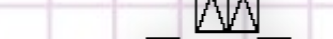
Правила диференціювання



1. 

$$2. \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \diagup & \diagdown \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline \diagdown & \diagup \\ \hline \end{array} \pm \begin{array}{|c|c|} \hline \diagdown & \diagup \\ \hline \end{array}' = \begin{array}{|c|c|} \hline \diagdown & \diagup \\ \hline \end{array}' \pm \begin{array}{|c|c|} \hline \diagup & \diagdown \\ \hline \end{array}'$$

3. 

4.  = 



Приклади диференціювання

Приклад 1.

$$y = x \cdot \sin x;$$

$$y' = (x \sin x)' = x' \sin x + x(\sin x)' = 1 \cdot \sin x + x \cos x = \sin x + x \cos x;$$

Приклад 2.

$$y = 5x^5 + 6x^2 + 2x - 7 \operatorname{tg} x;$$

$$\begin{aligned} y' &= (5x^5 + 6x^2 + 2x - 7 \operatorname{tg} x)' = (5x^5)' + (6x^2)' + (2x)' - (7 \operatorname{tg} x)' = \\ &= 5 \cdot (x^5)' + 6 \cdot (x^2)' + 2 \cdot x' - 7 \cdot (\operatorname{tg} x)' = 5 \cdot 5x^4 + 6 \cdot 2 \cdot x + 2 \cdot 1 - 7 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \\ &= 25x^4 + 12x + 2 - \frac{7}{\cos^2 x}; \end{aligned}$$

Приклад 3.

$$y = \frac{x^3}{\sin x}.$$

$$y' = \left(\frac{x^3}{\sin x} \right)' = \frac{(x^3)' \sin x - x^3 (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{3x^2 \sin x - x^3 \cos x}{\sin^2 x}.$$

Приклад 4.

$$(y)' = (x^2 + \sin x)' = (x^2)' + (\sin x)' \\ = 2x + \cos x$$

Приклад 5.

$$(y)' = \left(\frac{x}{\cos x}\right)' = \frac{(x)' \cdot \cos x - (\cos x)' \cdot x}{\cos^2 x} = \frac{1 \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot x}{\cos^2 x} \\ = \frac{\cos x + x \cdot \sin x}{\cos^2 x}$$

Приклад 6.

$$\left(\frac{1}{x^3}\right)' = (x^{-3})' = -3x^{-3-1} = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$$

Приклад 7.

$$(\cos x + \frac{1}{x})' = (\cos x)' + (\frac{1}{x})' = -\sin x - \frac{1}{x^2}$$

Приклад 8.

$$(tg x + \sqrt{x})' = (tg x)' + (\sqrt{x})' = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Приклад 9.

$$(\frac{5x^7+11}{\sin x})' = \frac{35x^6 \cdot \sin x - 5x^7 \cos x}{\sin^2 x} = \frac{5x^6(7\sin x - x \cos x)}{\sin^2 x}$$

Завдання з ЗНО.

Укажіть похідну функції $y = -\frac{7}{6}x^6 + 5x^4 - 14$.

А	Б	В	Г	Д
$y' = -\frac{x^7}{6} + x^5 - 14x$	$y' = -7x^5 + 20x^3 - 14$	$y' = -7x^5 + 20x^3$	$y' = -7x^7 + 25x^5$	$y' = -\frac{7}{36}x^5 + \frac{5}{4}x^3$

В.

$$y' = -\frac{7}{6} \cdot 6x^{6-1} + 5 \cdot 4x^{4-1} - 0 = -7x^5 + 20x^3.$$

Завдання з ЗНО.

Укажіть похідну функції $y = \sin x - \cos x + 1$.

А	Б	В	Г	Д
$y' = \cos x + \sin x + 1$	$y' = \cos x - \sin x$	$y' = -\cos x - \sin x + x$	$y' = -\cos x - \sin x$	$y' = \cos x + \sin x$

Д.

$$y' = (\sin x - \cos x + 1)' = \cos x - (-\sin x) = \cos x + \sin x.$$

Завдання з ЗНО.

Укажіть похідну функції $f(x)=x(x^3+1)$.

А	Б	В	Г	Д
$f'(x)=4x^3+1$	$f'(x)=4x^3$	$f'(x)=3x^2$	$f'(x)=3x^2+1$	$f'(x)=\frac{x^5}{5}+\frac{x^2}{2}$

А.

$$y'=(x(x^3+1))'=(x^4+x)'=4x^3+1.$$

Домашня робота.

Пар.20 Номер. 20.10; 20.12;
20.18