Операции импликация, эквивалентность. Примеры законов алгебры логики. Эквивалентные преобразования логических выражений. Построение логического выражения с данной таблицей истинности.

Импликация (логическое следование) образуется соединением двух высказываний в одно с помощью оборота речи «если …, то…».

Обозначение: $A \rightarrow B$, $A \Rightarrow B$

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

- Импликация ложна тогда и только тогда, когда из истины следует ложь.

Эквивалентность (логическое равенство) образуется соединением двух высказываний в одно при помощи оборота речи «… тогда и только тогда, когда …»

Обозначение: A⇔ B, A≡ B

A	B	A ≡ B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- Эквивалентность истинна тогда и только тогда, когда оба высказывания истинны или оба ложны

Алгебра логики

Алгебра логики (алгебра высказываний) — раздел математической логики, в котором изучаются логические операции над высказываниями. Чаще всего предполагается, что высказывания могут быть только истинными или ложными, то есть используется так называемая бинарная или двоичная логика, в отличие от, например, троичной логики.

- Базовыми элементами, которыми оперирует алгебра логики, являются высказывания.

- Высказывания строятся над множеством {B, {\displaystyle \lnot }\lnot , {\displaystyle \land }\land , {\displaystyle \lor }\lor , 0, 1}, где B — непустое множество, над элементами которого определены три операции:

- {\displaystyle \lnot }\lnot отрицание (унарная операция),
- {\displaystyle \land }\land конъюнкция (бинарная),
- {\displaystyle \lor }\lor дизъюнкция (бинарная),
- а логический ноль 0 и логическая единица 1 — константы.

- Так же используются названия

- Дизъю́нкт — пропозициональная формула, являющаяся дизъюнкцией одного или более литералов (например {\displaystyle x_{1}\lor \neg x_{2}\lor x_{4}}x_{1}\lor \neg x_{2}\lor x_{4}).
- Конъюнкт — пропозициональная формула, являющаяся конъюнкцией одного или более литералов (например {\displaystyle x_{1}\land \neg x_{2}\land x_{4}}x_{1}\land \neg x_{2}\land x_{4}).
- Унарная операция отрицания в тексте формул оформляется либо в виде значка перед операндом ({\displaystyle \lnot x}\lnot x) либо в виде черты над операндом ({\displaystyle {\bar {x}}}{\bar {x}}), что компактнее, но в целом менее заметно.

Функционально полный набор

логических операций

СКНФ – совершенная конъюнктивная нормальная форма, такая форма, в которой нет одинаковых сомножителей и все сомножители содержат одни и те же переменные, причем каждая переменная только 1 раз включает знак вхождения под знак отрицания.

(xÚ y)(xÚ y) - СКНФ.

Логическая функция n аргументов не равная тождественно 1 реализуется однозначно СКНФ.

Замечания.

1) Для построения СКНФ логической функции n аргументов, заданной таблицей соответствия, необходимо
2) по каждому кортежу переменных, на которой логическая функция принимает значение 0, записать
3) дизъюнкцию всех n переменных, инвертируя переменные, имеющие значения 1.

(xÚ yÚ z)(xÚ yÚ z)(xÚ yÚ z) (xÚ yÚ z) - СКНФ.

(функционально полные системы булевых функций)

Система функций алгебры логики (сигнатура):

W = $\{f^i_1, f^j_2, \ldots, f^k_n\}$

f^l_p - B_n ® B, $B = \{0;1\}$

Сигнатура называется *функционально полной*, если всякая логическая функция может быть реализована формулой, содержащей лишь символы функций из сигнатуры.

Система булевых функций называется *полной*, если любая булева функция может быть выражена через эти функции с помощью суперпозиции.

Пример

1.j $_6(x_1, x_2)$ = j $_1$(j $_7(x_1, x_2)$ ù j $_7(x_1, x_2)$)

(где j - функция из большой таблицы двоичных функций.)

2. j $_6(x_1,x_2)$= $x_{1Å}$ x_2= ($x_{1Ú}$ x_2) ($x_{1Ù}$ x_2) =($x_{1Ú}$ x_2)($x_{1Ú}$ x_2) = x_1 $x_{2Ú}$ x_1 x_2

Система функций {Ú ,ù }, {Ù ,ù }, {/}, { }, { , ù } является функционально полной.

Базисом является система функций {Ú ,Å }, которая называется базисом Жегалкина.

а) Упрощение формул означает получение равносильных формул с меньшим числом символов их образующих.

В булевой алгебре логики для упрощения формул используется следующие тождества (аксиомы, законы, тождественные константы):

1) xÙ y = yÙ x

xÚ y = yÚ x - коммутативность Ú и Ù

2) xÚ (yÚ z) = xÚ (yÚ z)

(xÙ y)Ú z = xÚ (yÚ z) - ассоциативность Ú и Ù

3) xÙ (yÚ z) = (xÙ y)Ù (xÚ z)

x Ú (y Ù z) = (x Ú y)Ù (xÚ z) - дистрибутивность Ú и Ù

4) xÚ x=x, xÙ x=x - повторение Ú и Ù

эти свойства являются законом идемпотентности Ú и Ù

5) x = x - закон двойного отрицания (эндоморфизм 2-го порядка, инволюция)

6) xÙ 1=x, xÙ 0=0

xÚ 1=1, xÚ 0=x

- 0 =1, 1 = 0 это свойства булевых операций с константами 7) xÙ y = yÙ x; xÚ y = yÚ x эти тождества – соотношения двойственности (закон де Моргана) 8) xÙ x = 0; xÚ x = 1 Эти тождества – закон дополнения (комплементарности противоречия) и закон исключенного третьего (закон двузначности высказывания)
- *Примечание*. Для перехода от формул содержащих операции импликации и эквивалентности к булевым формулам используются равенства (соотношения)
- x® y = xÚ y x~y = (xÙ y)Ú (xÙ y) = ($x_{1Ú}$ x_2) ($x_{1Ú}$ x_2)
- Методом совершенной индукции, т.е. методом соответствия, можно доказать справедливость тождеств 1-8, которые можно рассматривать и как формулы метапеременных.
- **б**) Минимизация
- При минимизации ДНФ и КНФ используют законы поглощения, склеивания.
- Законы поглощения
- xÚ xy = x; x(xÚ y) = x
- Законы склеивания:
- yÚ xy = x; xzÚ yzÚ xy = xzÚ yz
- xÚ xy = xÚ y; x(xÚ y) = xy
- (xÚ xz - ДНФ принцип расщепления)
- xÚ xz= x(zÚ z)Ú xz = xzÚ xzÚ xz = xzÚ xz)

Построение логического выражения с данной таблицей истинности.

- Приоритет операций
- Отрицание – $\overline{A}$
- Конъюнкция – $A \wedge B$
- Строгая дизъюнкция $A \dot{\vee} B$
- Дизъюнкция – $A \vee B$
- Импликация – $A \Rightarrow B$
- Эквиваленция - $A \Leftrightarrow B$

Таблицы истинности

ОТРИЦАНИЕ

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

ДИЗЪЮНКЦИЯ

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

ЭКВИВАЛЕНЦИЯ

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

КОНЪЮНКЦИЯ

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

СТРОГАЯ ДИЗЪЮНКЦИЯ

A	B	$A \dot{\vee} B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

ИМПЛИКАЦИЯ

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Пример

- Напишем формулу и составим таблицу истинности для высказывания:
- **«Если завтра не будет хорошей погоды, то мы пойдем в кино».**
- *А=«Завтра будет хорошая погода».*
- *В=«Мы пойдем в кино».* **ФОРМУЛА:** $\overline{A} \Rightarrow B$
- По таблице видно, что
- ложь будет только
- в одном случае:
- ***«Завтра не будет хорошей***
- ***погоды, в кино мы не пойдем».***

Все остальные случаи возможны.

A	B	$\overline{A}$	$\overline{A} \Rightarrow B$
0	0	1	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	0	1

Домашняя работа: составить опорный конспект по презентации, выучить определения