



Логические основы компьютеров

Вопрос 1. Введение в алгебру логики

**Вопрос 2. Элементарные булевы
функции**

Вопрос 3. Основные законы логики

Вопрос 1. Введение в алгебру логики

- **Двоичное кодирование** – все виды информации кодируются с помощью 0 и 1.

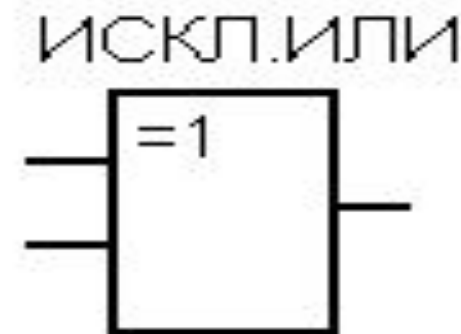
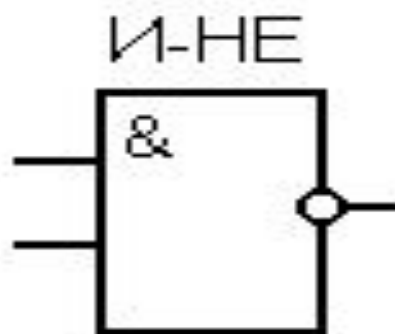
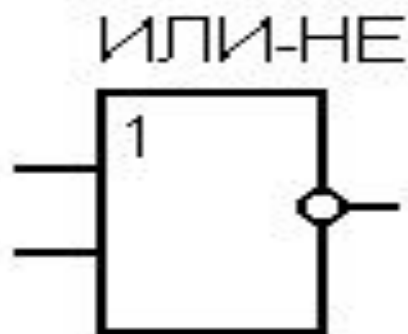
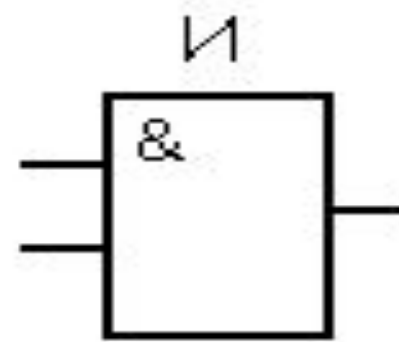
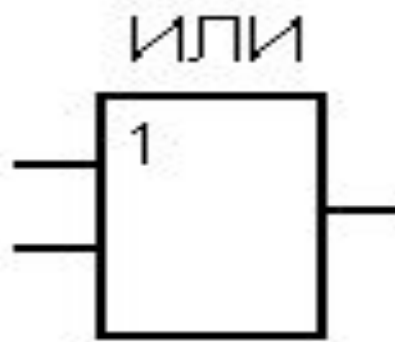
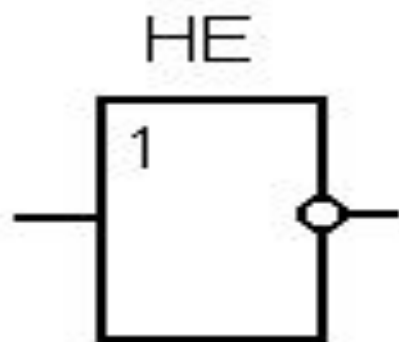
- **Задача** – разработать оптимальные правила обработки таких данных.

Джордж Буль разработал основы алгебры, в которой используются только 0 и 1 (алгебра логики, булева алгебра).



- Алгебра логики (булева алгебра) - раздел математики, изучающий методы оперирования логическими (булевыми) переменными, принимающими только два значения - истина и ложь.
- В компьютерах булевы переменные представляются (кодируются) битами (разрядами двоичной системы счисления), где 1 означает истину, а 0 - ложь.

Булева алгебра применяется в компьютерной технике. Здесь значок 0 означает одно напряжение между контактами схемы (скажем, 0 вольт), а значок 1 - другое (скажем, +5 вольт).



- Второй вариант применения булевой алгебры - логические рассуждения. Здесь два объекта интерпретируются как истина (будем обозначать как true) и ложь (будем обозначать как false).
- Будем называть символы true и false булевыми величинами, а переменные, которые их обозначают - булевыми переменными.

Логическое высказывание – это повествовательное предложение, относительно которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.

Высказывание или нет?

- Сейчас идет дождь.
- Утки летят на север.
- У квадрата – 4 стороны и все разные.
- Красиво!
- Который час?

Обозначение высказываний

- **A** – Сейчас идет дождь.
- **B** – Форточка открыта.

простые высказывания
(элементарные)

! Любое высказывание может быть ложно (0) или истинно (1).

Составные высказывания строятся из простых с помощью логических связок (операций) «и», «или», «не», «если ... то», «тогда и только тогда» и др.

A и B Сейчас идет дождь **и** открыта форточка.

A или не B Сейчас идет дождь **или** форточка закрыта.

если A, то B **Если** сейчас идет дождь, **то** форточка открыта.

не A и B Сейчас **нет** дождя **и** форточка открыта.

A тогда и только тогда, когда B Дождь идет **тогда и только тогда, когда** открыта форточка.

Вопрос 2. Элементарные булевы функции

- **Двоичной т.е. булевой функцией** от набора двоичных переменных называется функция, результатом которой могут быть только значения 0 и 1.
- Любую булеву функцию можно задать с помощью таблицы, в которой всем возможным наборам значений двоичных переменных сопоставлены соответствующие им значения функции. Такая таблица называется таблицей истинности

Логические операции

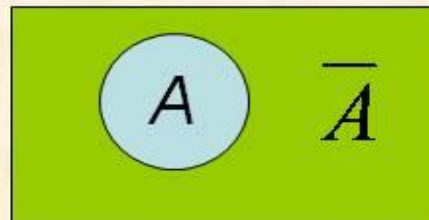
1. Отрицание (инверсия).

Обозначение: НЕ А, $\neg A$, \bar{A}

Таблица истинности:

A	\bar{A}
0	1
1	0

Диаграмма Эйлера-Венна



$A = \{\text{Дети любят игрушки}\}$ $= \{\text{Дети НЕ любят игрушки}\}$

$A = \{\text{множество учеников 10 А класса}\}$

$\bar{A} = \{\text{множество учеников НЕ 10 А класса}\}$

В естественном языке: соответствует словам "неверно, что..." и частице "не"

2. Логическое умножение (Конъюнкция)

Обозначение: И, \wedge , &, •

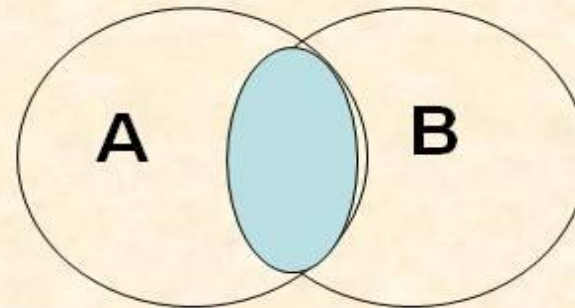
$$F = A \wedge B$$



Таблица истинности:

A	B	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Диаграмма Эйлера-Венна



$A = \{\text{Множество обитателей моря}\}$

$B = \{\text{Множество млекопитающих}\}$

$F = A \wedge B = \{\text{кит, акула, дельфин}\}$

В естественном языке: соответствует

союзу "и"

1) 10 делится на 2 (А – и.). 5 больше 3 (В – и.).

10 делится на 2 и 5 больше 3 (А & В - истина).

2) 10 не делится на 2 (А – ложь).

5 больше 3 (В - истина).

10 не делится на 2 и 5 больше 3 (А & В - ложь).

3) 10 делится на 2 (А - и). 5 не больше 3 (В - л).

10 делится на 2 и 5 не больше 3 (А & В – ложь).

4) 10 не делится на 2 (А - л). 5 не больше 3 (В - л).

10 делится на 2 и 5 больше 3 (А В - л).

3. Логическое сложение (Дизъюнкция)



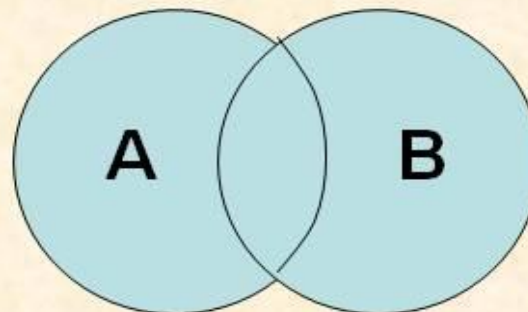
Обозначение: ИЛИ, \vee , +, |

$$F = A \vee B$$

Таблица истинности:

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Диаграмма Эйлера-Венна



$A = \{\text{Множество учеников 10 А класса}\}$

$B = \{\text{Множество учеников 10 Б класса}\}$

$F = A \vee B = \{\text{Множество учеников 10А или 10Б кл.}\}$

В естественном языке: соответствует союзу "или"

- Например, рассмотрим составное высказывание « $2*2=4$ **или** $3*3=10$ ». Первое простое высказывание истинно ($A=1$), а второе высказывание ложно ($B=0$), по таблице определяем, что логическая функция принимает значение истина ($F=1$), то есть данное составное высказывание **ИСТИННО**.

Примеры:

- 10 делится на 2 (**A - и**). 5 больше 3 (**B - и**).


10 делится на 2 или 5 больше 3 (A ИЛИ B - истина).

- 10 не делится на 2 (**A - л**). 5 больше 3 (**B - и**).

10 не делится на 2 или 5 больше 3 (A ИЛИ B - истина).

- 10 не делится на 2 (**A - л**). 5 не больше 3 (**B - л**).

10 не делится на 2 или 5 не больше 3 (A ИЛИ B - ложь).

- 
- Кроме базовых логических функций используются и другие, например функции логического следования (импликации) логического равенства (эквивалентности).

Импликация (логическое следование)

- «Если Вася идет гулять, то Маша сидит дома».
- **A** – «Вася идет гулять».
- **B** – «Маша сидит дома».

$$A \rightarrow B = 1$$



А если Вася не идет гулять?

- Маша может не сидеть дома (пойти гулять) ($B=0$), а может сидеть дома ($B=1$)

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

В естественном языке: соответствует обороту "если ..., то ..."

■ Примеры:

- Данный четырёхугольник — квадрат (**A - и**). Около данного четырёхугольника можно описать окружность (**B - и**).

Если данный четырёхугольник квадрат, то около него можно описать окружность (**A B - и**).

- Данный четырёхугольник — не квадрат (**A - л**). Около данного четырёхугольника можно описать окружность (**B - и**). Если данный четырёхугольник не квадрат, то около него можно описать окружность (**A B - и**).
- Данный четырёхугольник — квадрат (**A - и**). Около данного четырёхугольника нельзя описать окружность (**B - л**). Если данный четырёхугольник квадрат, то около него можно описать окружность (**A B - л**).
- Данный четырёхугольник — не квадрат (**A - л**). Около данного четырёхугольника нельзя описать окружность (**B - л**). Если данный четырёхугольник не квадрат, то около него нельзя описать окружность (**A B - и**).

Логическое равенство (эквивалентность)

- Логическое равенство это логическая функция от двух переменных, которая принимает истинное значение тогда и только тогда, когда оба высказывания одновременно либо ложны либо истинны.

- Обозначение эквивалентности

$$A \sim B$$



A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

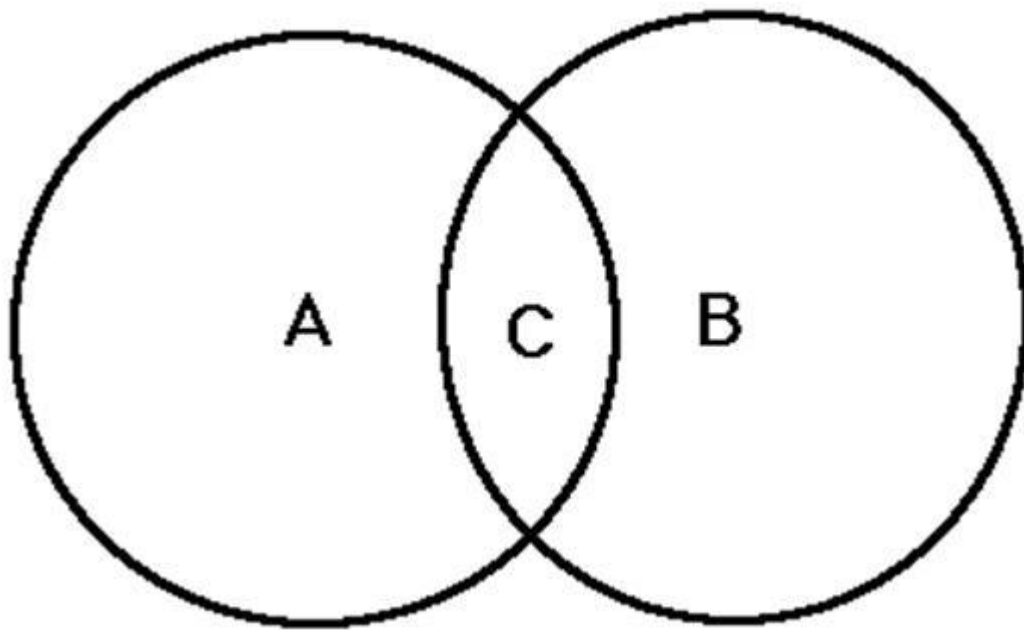
Вопрос 3. Основные законы логики

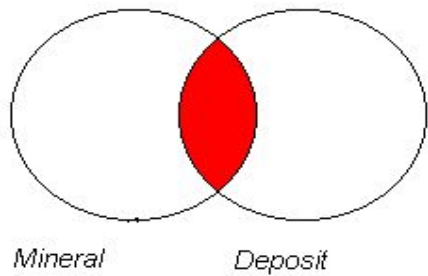
- Для преобразования логических выражений используют законы алгебры логики:
- Закон тождества
- $A = A$
- Закон непротиворечия
- Закон исключенного третьего

название	для И	для ИЛИ
двойного отрицания	$\overline{\overline{A}} = A$	
исключения третьего	$A \cdot \overline{A} = 0$	$A + \overline{A} = 1$
операции с константами	$A \cdot 0 = 0, A \cdot 1 = A$	$A + 0 = A, A + 1 = 1$
повторения	$A \cdot A = A$	$A + A = A$
поглощения	$A \cdot (A + B) = A$	$A + A \cdot B = A$
переместительный	$A \cdot B = B \cdot A$	$A + B = B + A$
сочетательный	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	$A + (B + C) = (A + B) + C$
распределительный	$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
законы де Моргана	$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$	$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

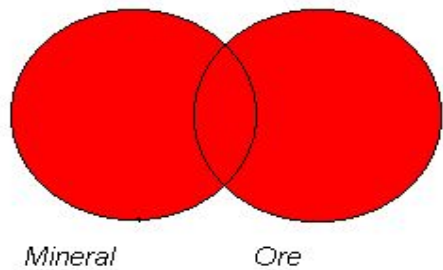
Таблицы истинности

- Таблица истинности - это один из способов вычислений в формальной логике. Таблица позволяет определить истинность какого-нибудь сложного логического высказывания по истинности его фрагментов.

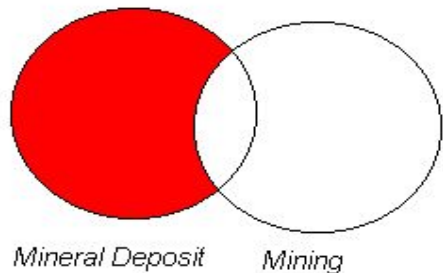




AND Articles will contain mineral and deposit



OR Articles will contain either mineral or ore



NOT Articles will contain mineral deposit but not mining