

Предел функции в точке и на бесконечности

Предел функции (предельное значение функции) в заданной точке, предельной для области определения функции, — такая величина, к которой стремится рассматриваемая функция при стремлении её аргумента к данной точке. Записывается предел следующим образом

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

Определение: Если число A_1 есть предел функции $y = f(x)$ при x , стремящемся к числу a так, что x принимает только значения меньше числа a , то число A_1 называется левым пределом функции $y = f(x)$ в точке a . $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A_1$.

Определение: Если число A_2 есть предел функции $y = f(x)$ при x , стремящемся к числу a так, что x принимает только значения больше числа a , то число A_2 называется правым пределом функции $y = f(x)$ в точке a . $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A_2$.

Теорема 1: Если существуют пределы функций $y = f(x)$ и $y = q(x)$ при x , стремящемся к числу a , то существует предел их суммы, равный сумме пределов этих функций.

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + q(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} q(x)$$

Теорема 2: Если существуют пределы функций $y = f(x)$ и $y = q(x)$ при x , стремящемся к числу a , то существует предел их произведения, равный произведению пределов этих функций.

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot q(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} q(x)$$

Теорема 3: Если существуют пределы функций $y = f(x)$ и $y = q(x)$ при x , стремящемся к числу a и $\lim_{x \rightarrow a} q(x) \neq 0$, то существует предел их отношения, равный отношению пределов этих функций.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} q(x)}$$

Следствие:

$$1. \lim_{x \rightarrow a} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n; \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$$

$$3. P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x^1 + a_n; \lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$$

$$4. F(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x^1 + a_n}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_{n-1} x^1 + b_n}, \lim_{x \rightarrow a} F(x) = F(a)$$

Определение. Функция $y = f(x)$ называется бесконечно малой при $x \rightarrow a$ ($x \rightarrow \infty$), если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется бесконечно большой при $x \rightarrow a$ ($x \rightarrow \infty$), если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$.

При вычислении пределов зачастую появляются выражения, значение которых не определено. Такие выражения называют **неопределённостями**.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{0}{0} = \frac{0}{0}$$

Основные виды неопределённостей: $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0 \cdot \infty$; $\infty - \infty$.

для раскрытия неопределенностей используют следующее:

- упрощают выражение функции: раскладывают на множители, преобразовывают функцию с помощью формул сокращенного умножения, тригонометрических формул, умножают на сопряженное, что позволяет в дальнейшем сократить и т.д., и т.п.;
- если предел при раскрытии неопределенностей существует, то говорят, что функция сходится к указанному значению, если такого предела не существует, то говорят, что функция расходится.

Пример: Вычислим предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

Разложим числитель на множители: $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$$

Парная работа.

№36.3(1, 3,5) №36.9(1,3)

Предел функции в точке. Тест

1. Найдите предел функции $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{x^2 + 3x}$

A) ∞ B) \emptyset C) $1/18$ D) 0

2. Найдите предел функции $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 2x^2 + 5x + 3)$

A) 8 B) 7 C) 5 D) 6

3. Найдите предел функции $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{x^2 - x}$

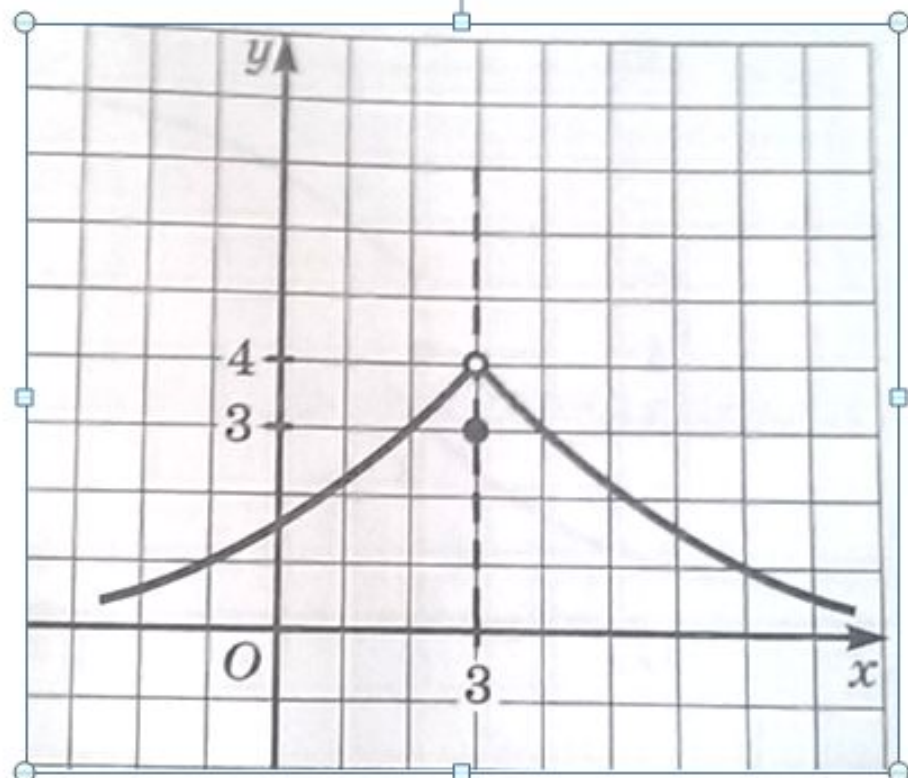
A) -4 B) ∞ C) 1 D) 0

4. Найдите предел функции $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 6x + 5}$

A) 0 B) $2,5$ C) 1 D) ∞

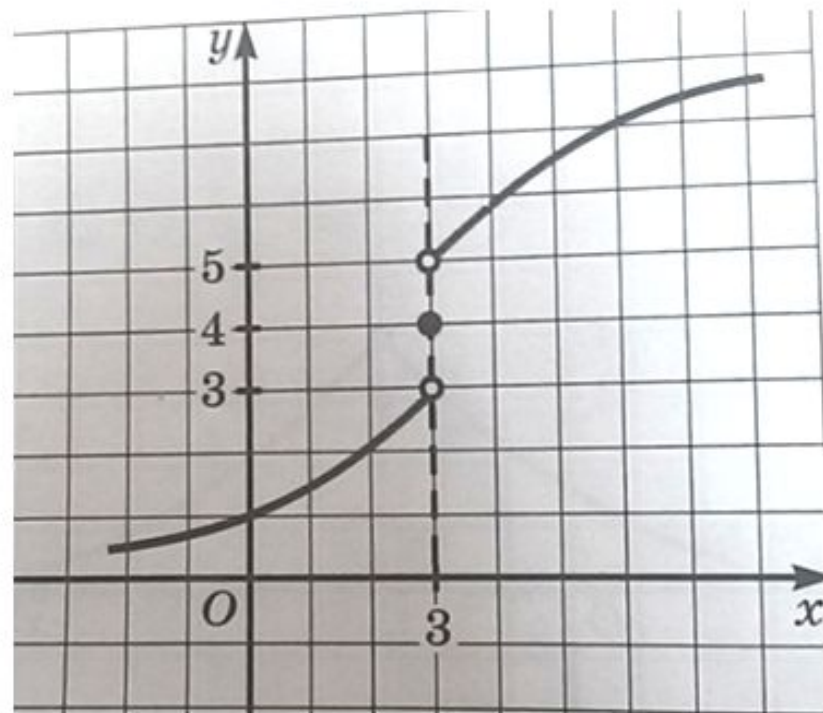
5. По графику найдите предел функции $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

$x \rightarrow 3$



- A) 3 B) 4 C) \emptyset D) ∞

5. По графику найдите предел функции $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$



- A) 5 B) 4 C) \emptyset D) 3

Самопроверка

№	Отвѣты	Балл
1	D	1
2	B	1
3	A	2
4	B	3
5	B	1
6	C	2

Рефлексия:

1. С какими новыми понятиями вы сегодня познакомились на уроке?
2. Довольны ли вы результатом? Что удивило или заинтересовало на уроке?

Домашнее задание

§36 №36.3(2, 4, 6) №36.9(2, 4)