Степенная функция. Свойства и графики

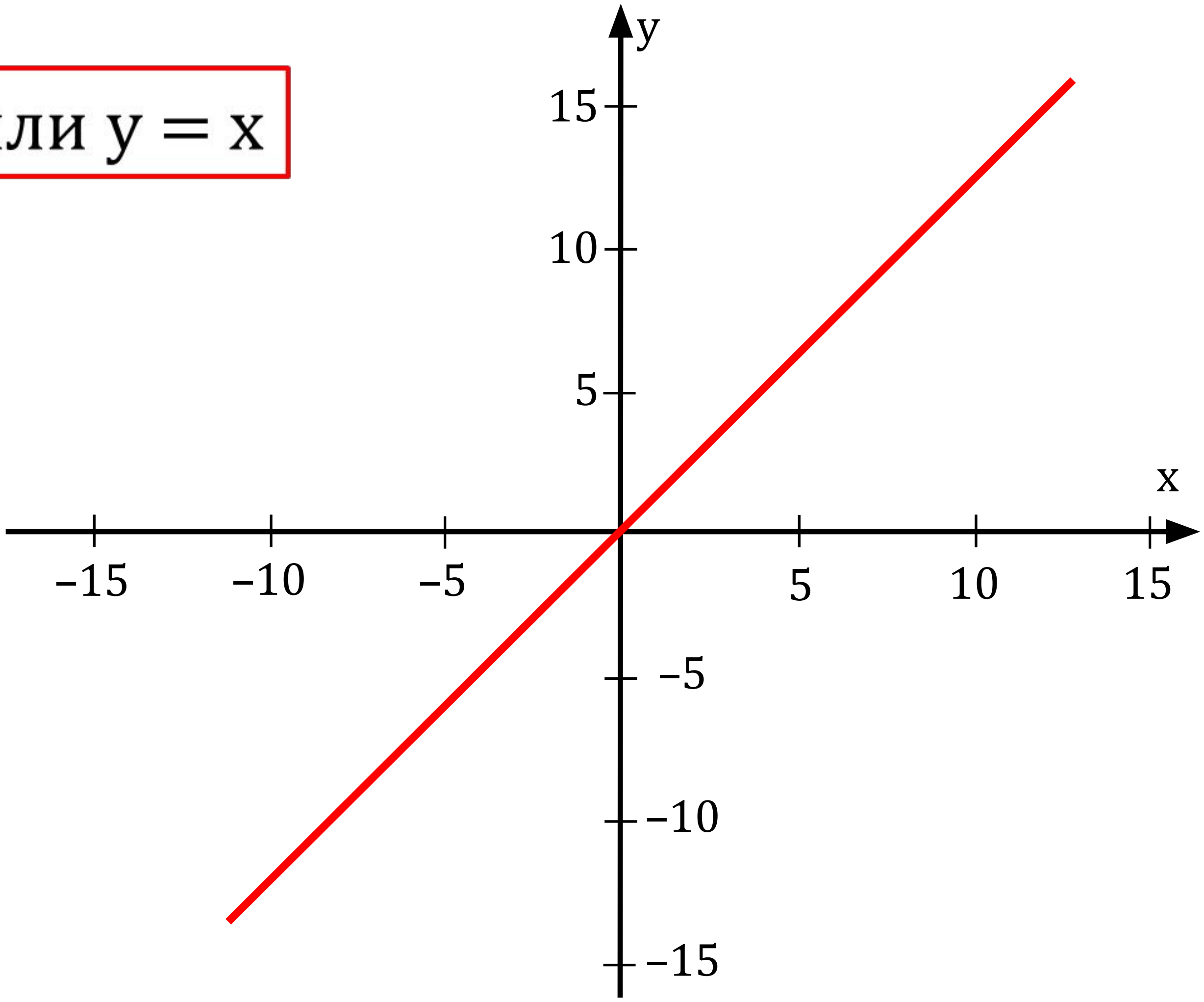
Если $\frac{p}{q}$ – обыкновенная дробь, $q \neq 1$, $a \geq 0$, то $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.

$$1{,}3^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{1{,}3^3}.$$

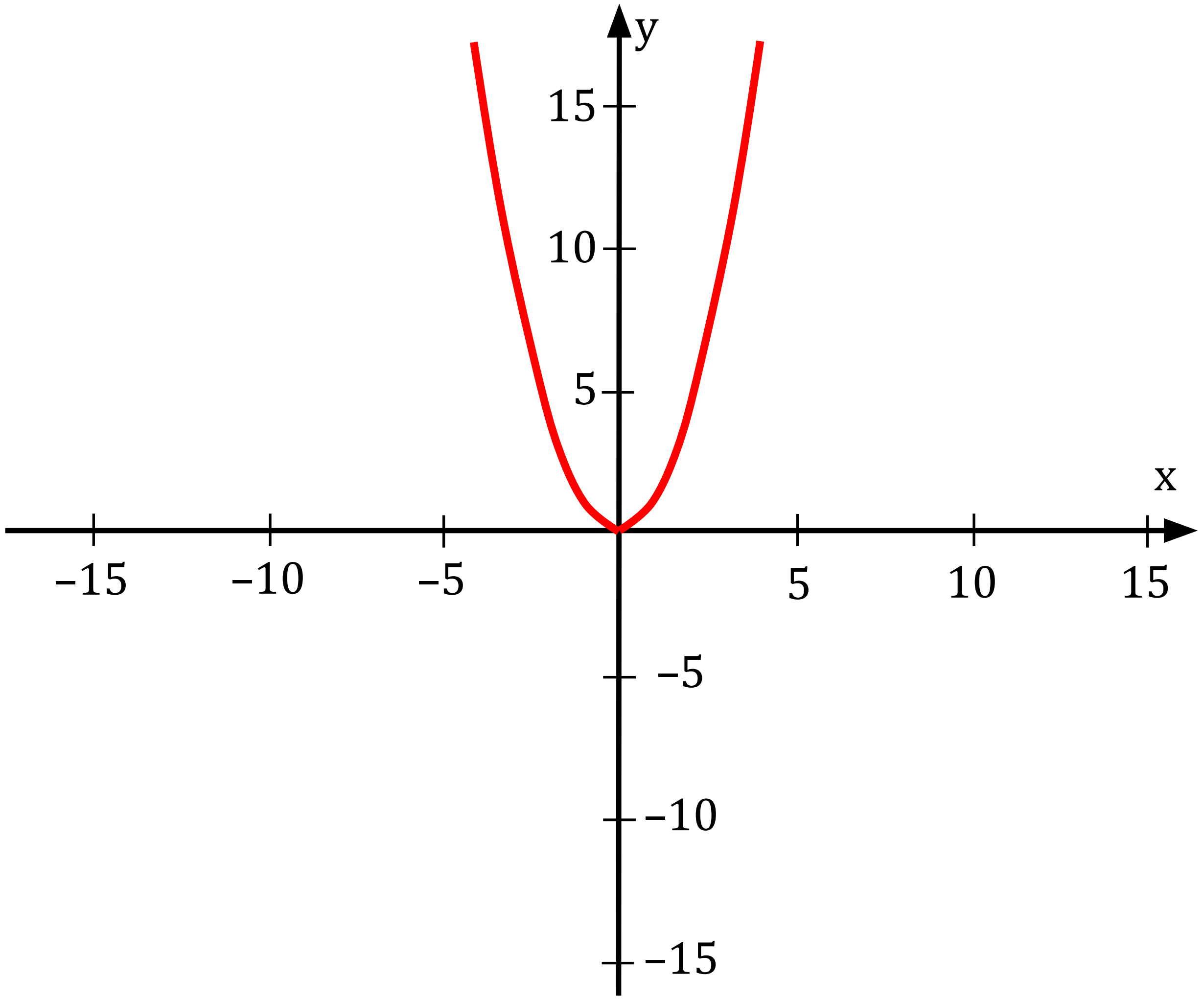
Функция $y = x^k$, где $k \in D$ – степенная функция.

Рассмотрим случай, если k – рациональный (дробный) показатель.

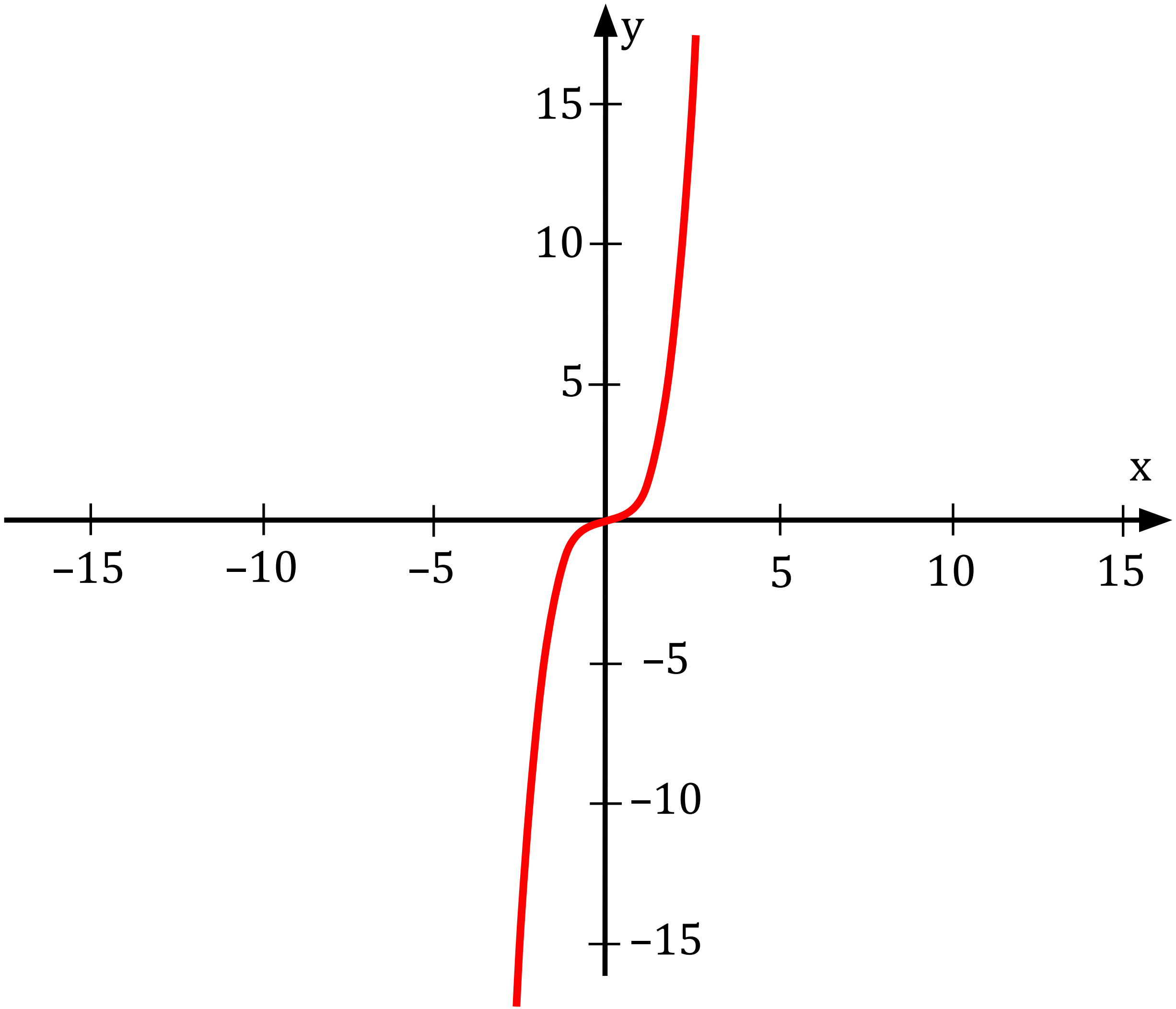
$y = x^1$ или $y = x$



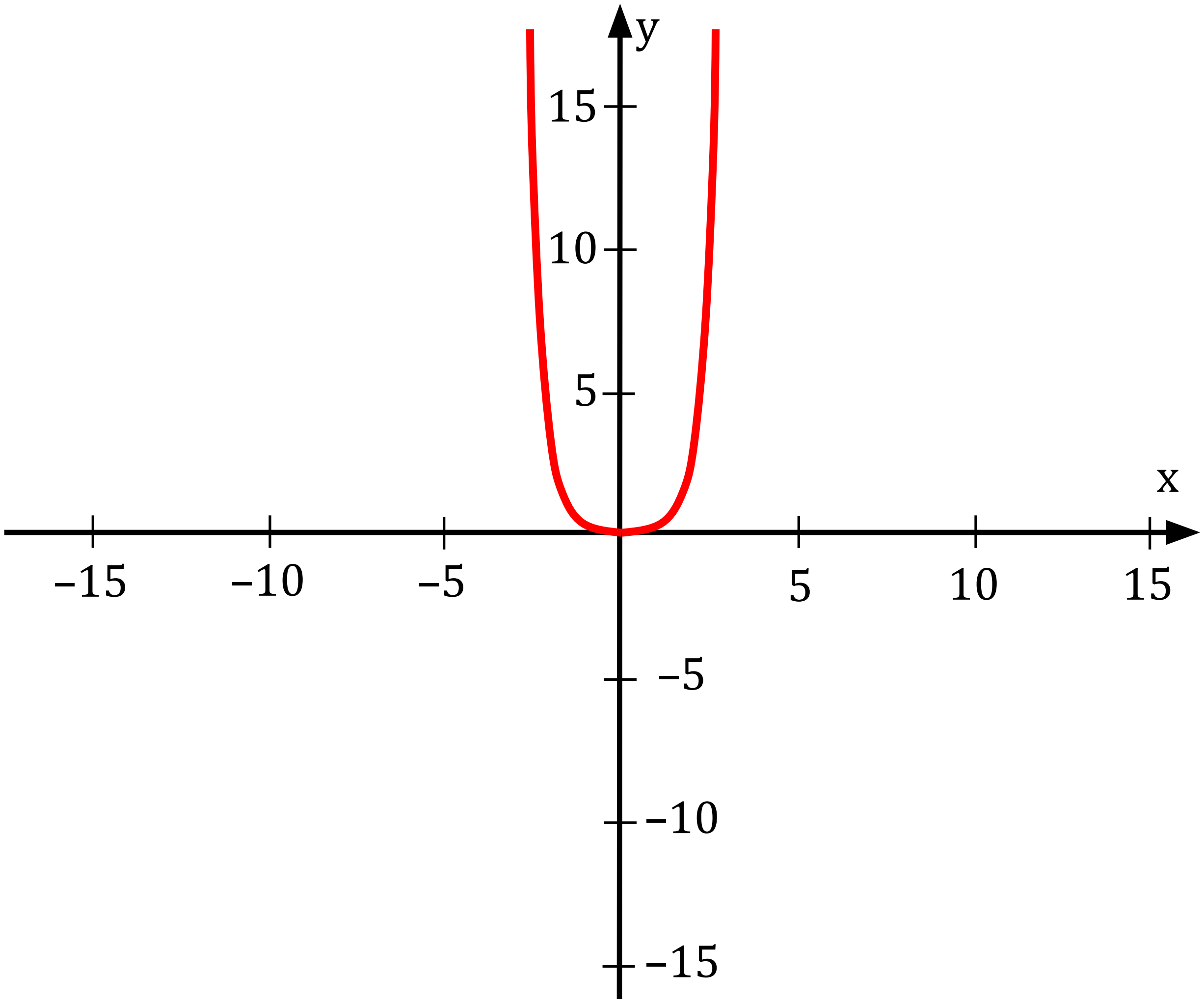
$$\boxed{y = x^2}$$



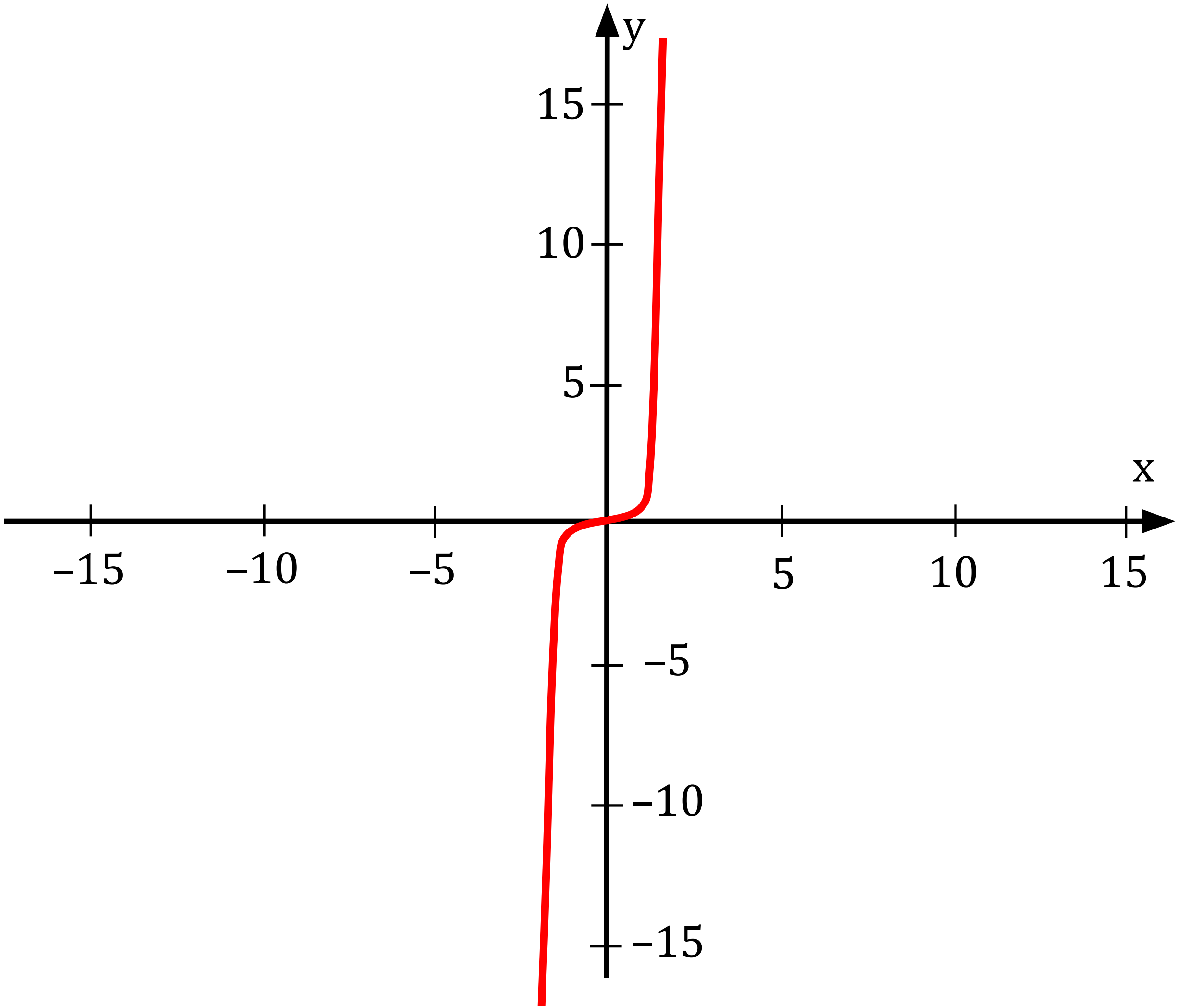
$$\boxed{y = x^3}$$



$$\boxed{y = x^6}$$

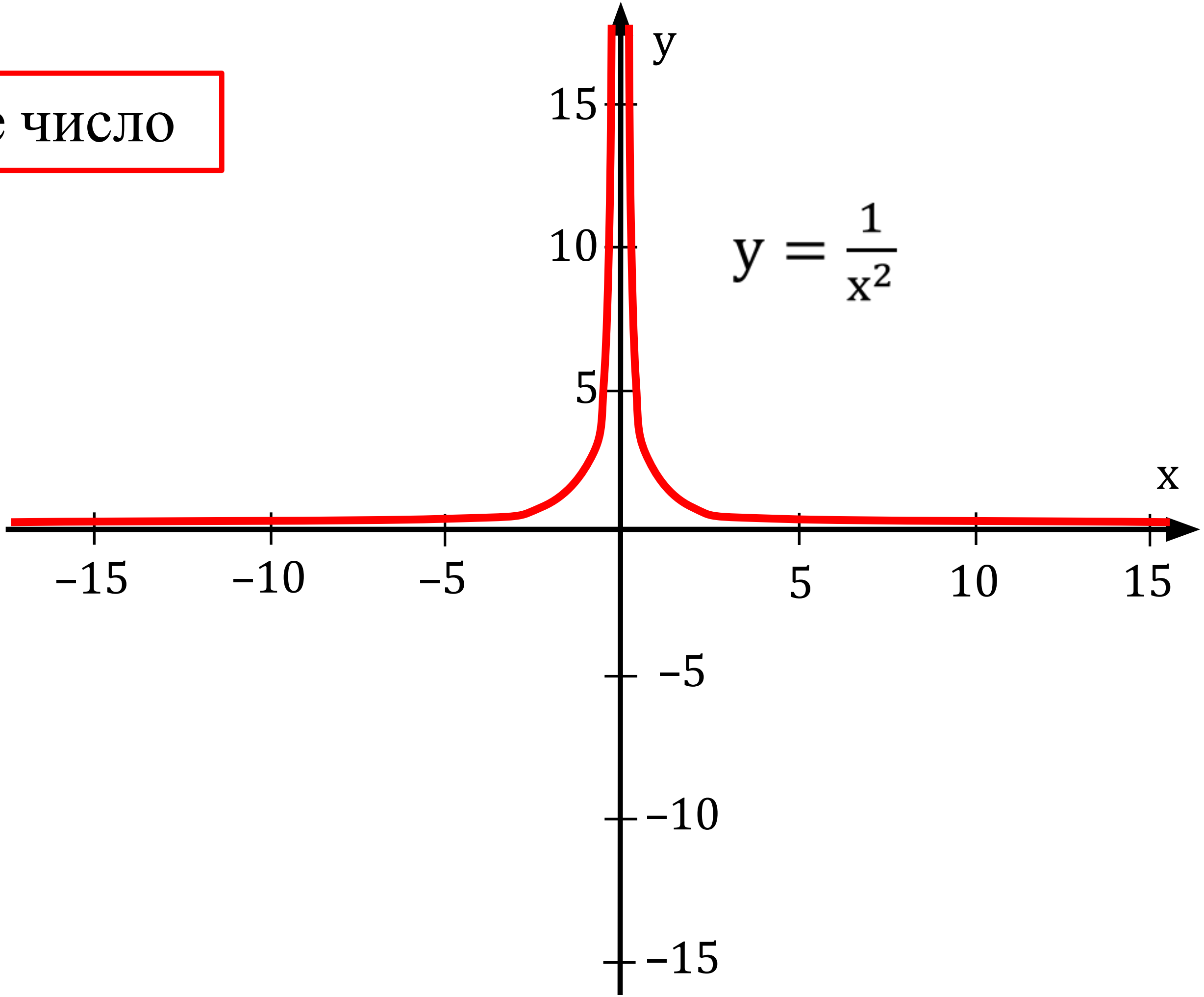


$$y = x^7$$

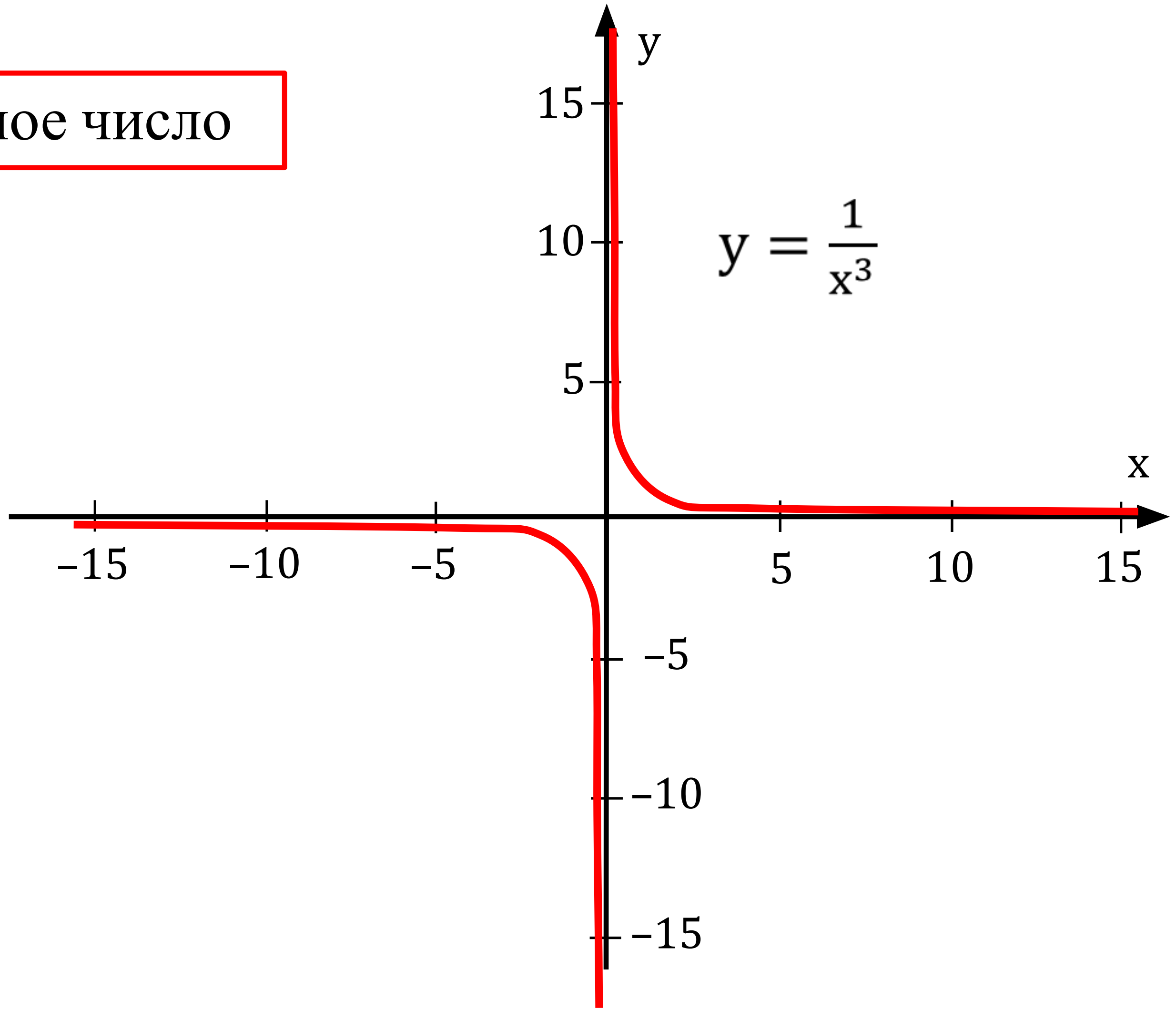


При $k = -n$, $n \in Z$, $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ – степенная функция с целым отрицательным показателем.

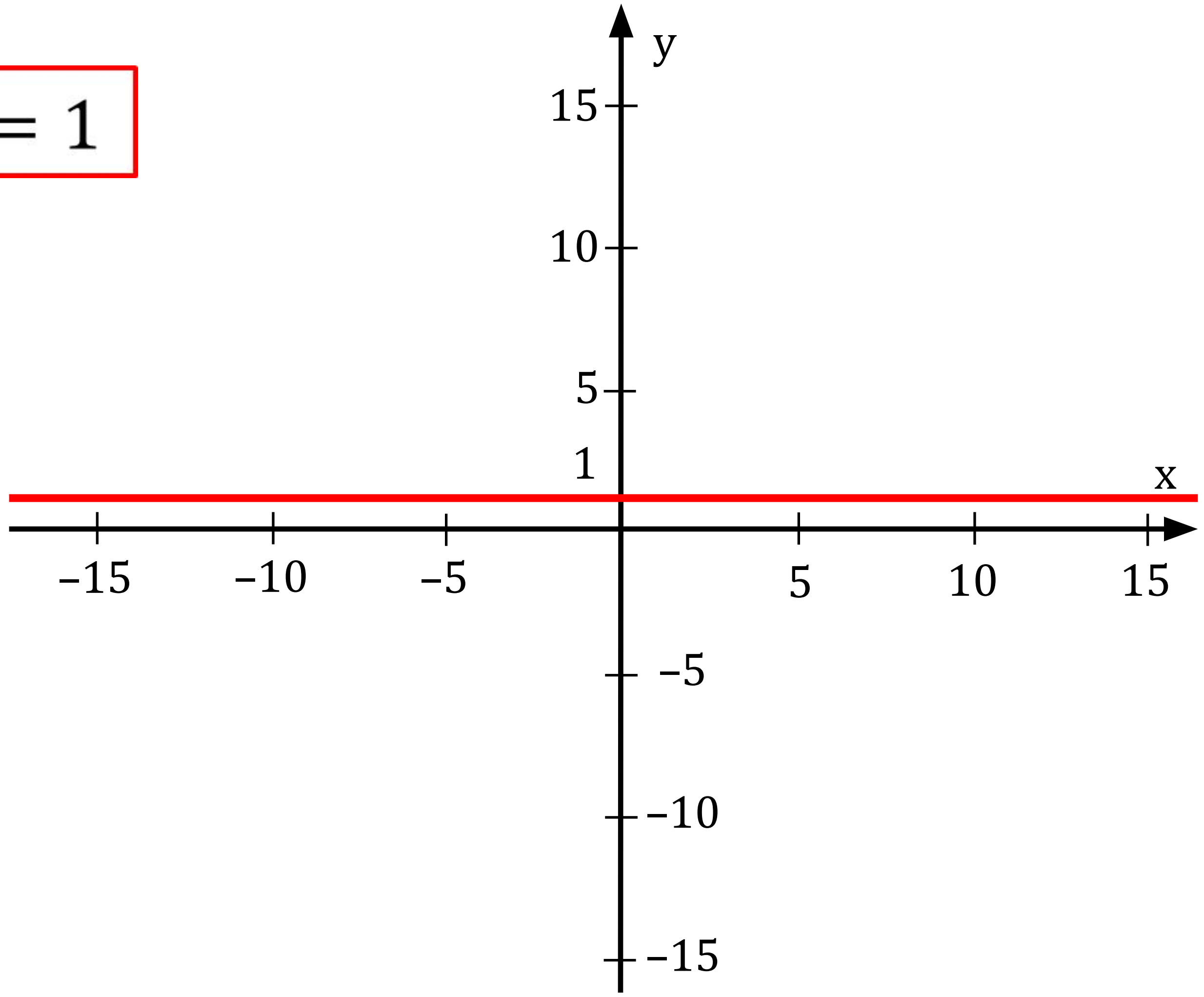
n – чётное число



n – нечётное число



$$\boxed{y = x^0 = 1}$$

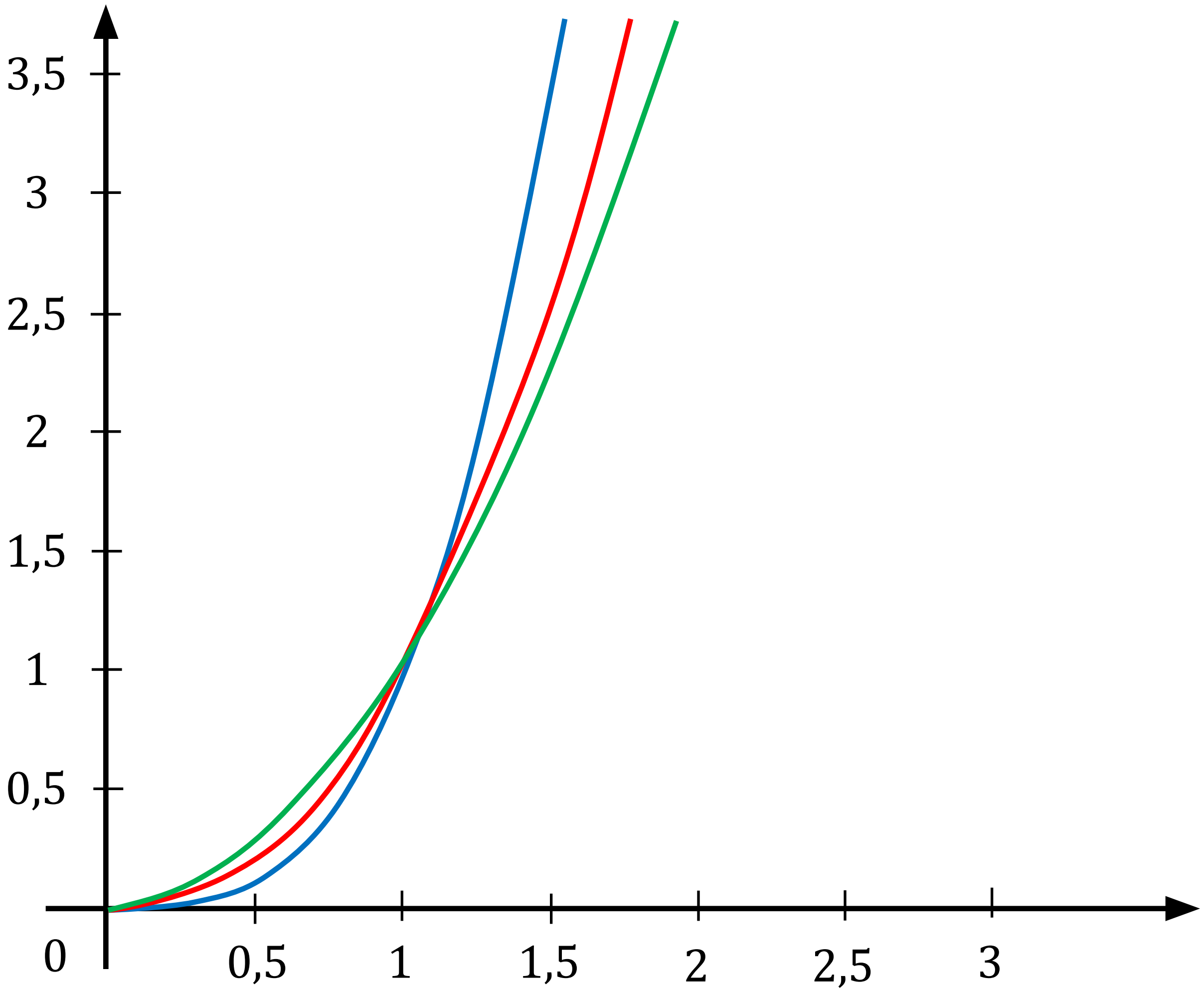


$y = x^{2,3}$

$D = [0, +\infty)$

$y = x^2$

$y = x^3$



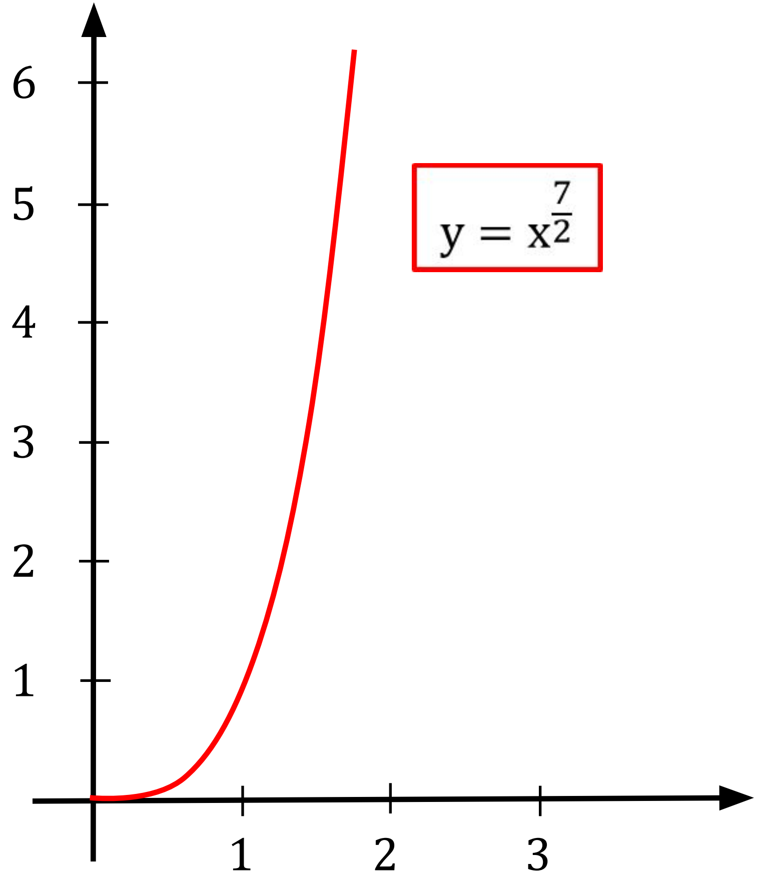
1. Если $0 < x < 1$, то $x^5 < x^4 < x^3 \Rightarrow \sqrt{x^5} < \sqrt{x^4} < \sqrt{x^3}$.

$$\boxed{x^3 < x^{2,3} < x^2}$$

2. Если $x > 1$, то $x^3 < x^4 < x^5 \Rightarrow \sqrt{x^3} < \sqrt{x^4} < \sqrt{x^5}$.

$$\boxed{x^2 < x^{2,3} < x^3}$$

$y = x^k$, где $k = \frac{m}{n}$, $\frac{m}{n}$ – неправильная дробь ($m > n$).



Свойства функции $y = x^{\frac{m}{n}}$, $\frac{m}{n}$ – неправильная дробь, $\frac{m}{n} > 1$:

1. $D = [0, +\infty)$.

2. Ни чётная, ни нечётная.

3. Возрастает на $[0, +\infty)$.

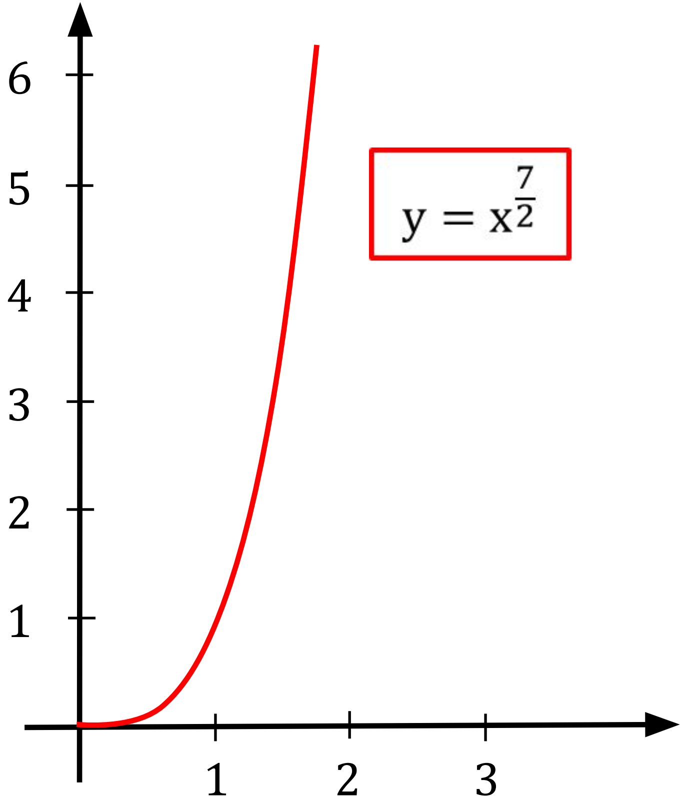
4. Ограничена снизу, сверху не ограничена.

5. $y_{наим}$=0, наибольшего значения не имеет.

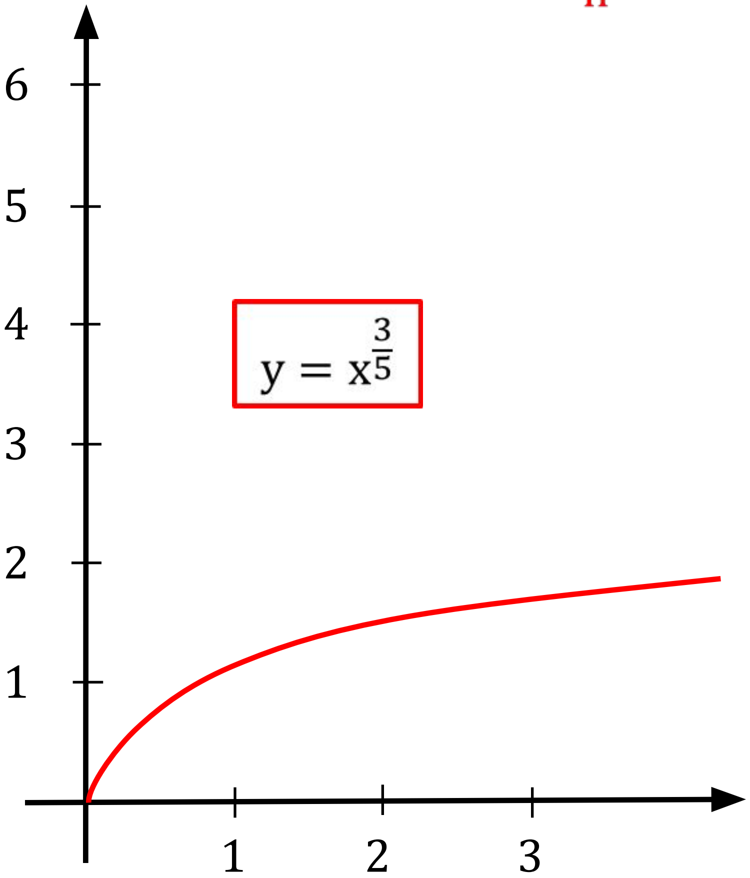
6. Непрерывна.

7. $E = [0, +\infty)$.

8. Выпукла вниз.



$y = x^k$, где $k = \frac{m}{n}$, $\frac{m}{n}$ – правильная дробь ($m < n$) и $0 < \frac{m}{n} < 1$.



Свойства функции $y = x^{\frac{m}{n}}$, $\frac{m}{n}$ – правильная дробь, $0 < \frac{m}{n} < 1$:

1. $D = [0, +\infty)$.

2. Ни чётная, ни нечётная.

3. Возрастает на $[0, +\infty)$.

4. Снизу ограничена осью абсцисс,

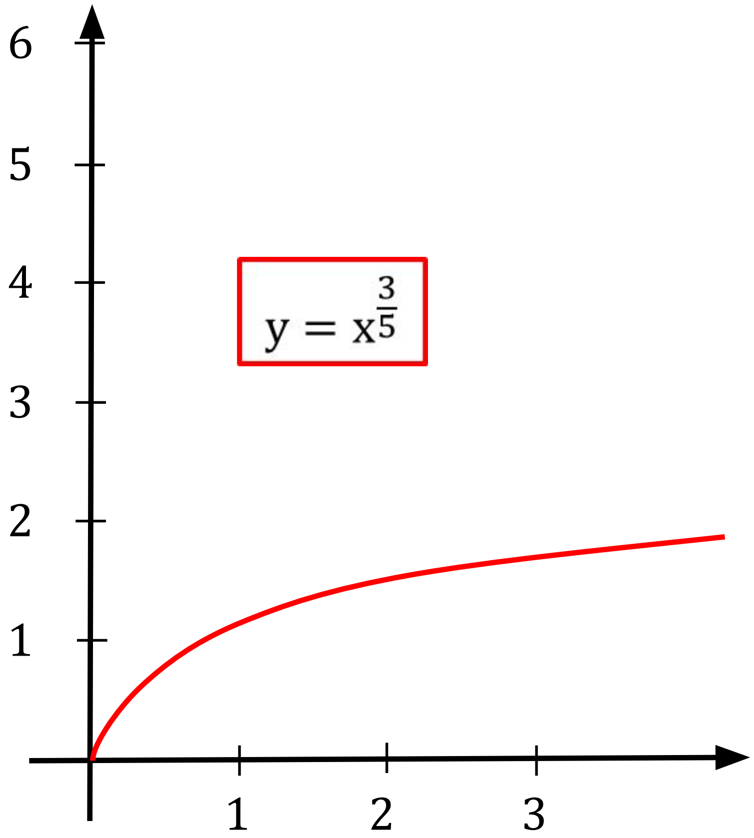
 сверху не ограничена.

5. $y_{наим}$=0, наибольшего значения не имеет.

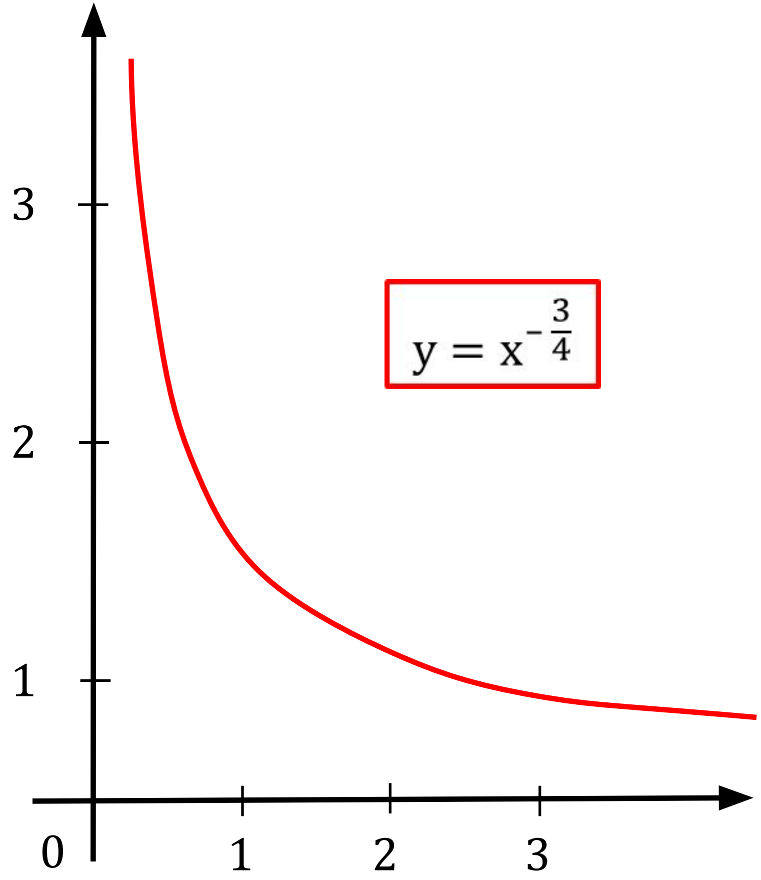
6. Непрерывна.

7. $E = [0, +\infty)$.

8. Выпукла вверх.



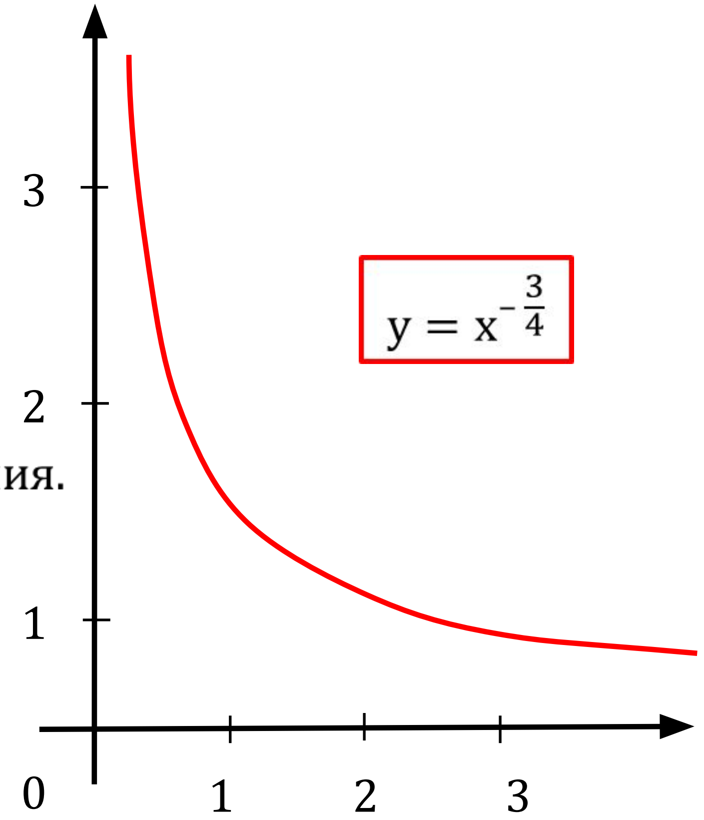
$$y = x^{-\frac{m}{n}}$$



Свойства функции $y = x^{-\frac{m}{n}}$, $x > 0$:

1. $D = (0, +\infty)$.
2. Ни чётная, ни нечётная.
3. Убывающая.
4. Снизу ограничена осью абсцисс,

   сверху не ограничена.
5. Не имеет наименьшего и наибольшего значения.
6. Непрерывна на $(0, +\infty)$.
7. $E = (0, +\infty)$.
8. Выпукла вниз.



$$y' = (x^n)' = nx^{n-1}$$

Теорема.

Если $x > 0$, r – рациональное число, то $(x^r)' = rx^{r-1}$.

$$(a^{-3})' = -3a^{-4};$$

$$(x^{-\frac{2}{3}})' = -\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}-\frac{3}{3}} = -\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}.$$

Формула для интегрирования степенной функции:

$$r \neq 1$$

$$\boxed{\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C}$$

Функция $y = \frac{x^{r+1}}{r+1}$ первообразная для функции $y = x^r$.

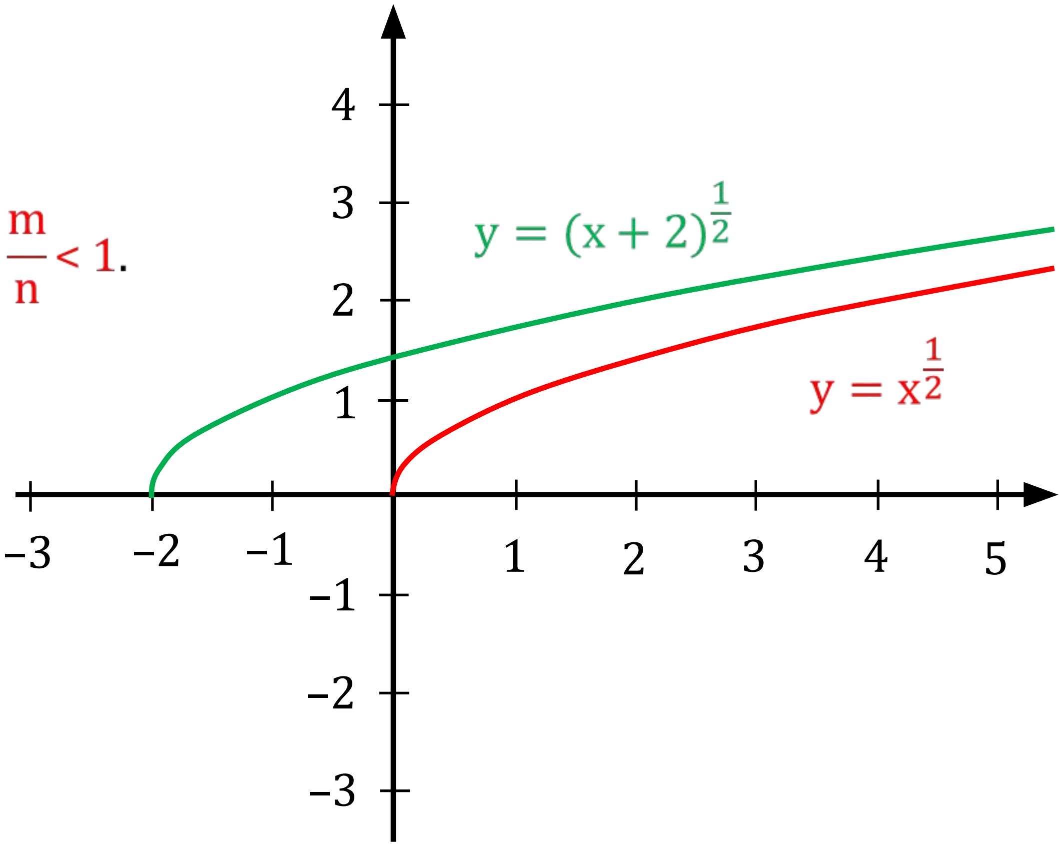
Пример. Построить график функции $y = (x+2)^{\frac{1}{2}}$.

Решение.

$y = x^{\frac{1}{2}}$ – частный случай

для функции вида $y = x^{\frac{m}{n}}$,

где $\frac{m}{n}$ – правильная дробь и $0 < \frac{m}{n} < 1$.



Спасибо

за внимание!