ТЕМА 3. **ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА.**

План лекции:

1. Векторы. Линейные операции над векторами.
2. Линейная зависимость и независимость векторов.
3. Понятие базиса. Координаты вектора.
4. Разложение вектора по базису.

- **1.Векторы. Линейные операции над векторами.**
- **Определение 1.** ***n*-мерным вектором** называется упорядоченный набор из ***n*** действительных чисел, записываемый в виде
- $$\overline{X} = (x_1; x_2; x_3; \ldots; x_n),$$
- числа $x_1; x_2; x_3; \ldots; x_n$ – координаты
- вектора.

- **Размерность вектора** определяется числом его координат, например:

$\bar{x} = (1; 3)$ – **двумерный вектор,**

$\bar{y} = (1; 0; -5)$ – **трехмерный вектор.**

$\bar{z} = (3; 2; -1; 4; 7)$ – **пятимерный,** и т.д.

Координаты вектора можно расположить в строку или в столбец.

В первом случае $\overline{X} = (x_1; x_2; x_3; \ldots; x_n)$ –

- вектор строка (матрица-строка),
- во втором случае

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ –}$$

- – вектор – столбец (матрица-столбец).

- **Определение 2**.Два вектора и называются **равными**, если они имеют одинаковую размерность и равные соответствующие координаты.

$$\overline{X} = (x_1; x_2; x_3; \ldots; x_n)$$

$$\overline{Y} = (y_1; y_2; y_3; \ldots; y_n)$$

-
- $\overline{X} = \overline{Y}$, если

$$x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots\ldots, x_n = y_n$$

- **Определение 3**. Суммой векторов
- $$\overline{X} = (x_1; x_2; x_3; \ldots; x_n)$$

$$\overline{Y} = (y_1; y_2; y_3; \ldots; y_n)$$

называется вектор

$$\overline{X} + \overline{Y} = x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots\ldots, x_n + y_n$$

Определение 4. Произведением вектора

$$\overline{X} = (x_1; x_2; x_3; \ldots; x_n)$$

на действительное число λ называется вектор

$$\lambda \cdot \overline{X} = (\lambda x_1; \lambda x_2; \ldots; \lambda x_n)$$

- **Замечание.**
- Введенные операции над **n** - мерными векторами аналогичны операциям над матрицами. Поэтому **n** – мерные векторы можно рассматривать как *матрицы – строки* или как *матрицы – столбцы* и совершать над векторами матричные операции.

- Линейные операции над любыми векторами удовлетворяют следующим свойствам.
- 1. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$ – коммутативное (переместительное) свойство суммы.
- 2.$(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \mathbf{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \mathbf{z})$ – ассоциативное (сочетательное) свойство суммы.
- 3. $\alpha(\beta \boldsymbol{x}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{x}$ – ассоциативное относительно числового множителя свойство.
- 4. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ – дистрибутивное (распределительное) относительно суммы векторов свойство.

- 5$(\alpha + \beta)\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{x}$ - дистрибутивное относительно суммы числовых множителей свойство.
- 6.Существует нулевой вектор $\mathbf{0} = (0,0,\cdots,0)$ такой, что $\boldsymbol{x} + \mathbf{0} = \boldsymbol{x}$ для любого вектора $\boldsymbol{x}$ (особая роль нулевого вектора).
- 7.Для любого вектора существует противоположный вектор (-$\boldsymbol{x}$) такой ,что
- $\boldsymbol{x} + (-\,\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}.$
- 8. 1 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ для любого вектора $\boldsymbol{x}$ (особая роль числового множителя 1).

- **2.Линейная зависимость и независимость векторов *n*-мерного пространства.**

- **Определение 1.**
- Совокупность всевозможных n-мерных векторов с действительными координатами называется n-мерным векторным пространством и обозначается R^n.

- **Определение 2.** Линейной комбинацией
- векторов $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_m$ называется сумма вида
- $$\lambda_1 \cdot \overline{A}_1 + \lambda_2 \cdot \overline{A}_2 + \ldots + \lambda_m \cdot \overline{A}_m ,$$
- где λ_i – действительные числа, называемые коэффициентами.
- Линейная комбинация векторов также является вектором, так как она образуется из них с помощью операций сложения и умножения на число.

- Если же все коэффициенты

- $$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0,$$
-

то система векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a}_m$ называется *линейно независимой.*

- На вопрос о линейной зависимости или независимости системы векторов иногда можно ответить, используя следующие теоремы:

- **Теорема 1**. Для того, чтобы система векторов

$$\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_m}$$

- была *линейно зависимой*, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из них был представлен в виде линейной комбинации остальных.
- **Теорема 2.** В **n**-мерном пространстве любая система, содержащая более чем **n** векторов, является *линейно зависимой*.

- **Теорема 3**.Если определитель, составленный из координат векторов, отличен от нуля, то система векторов *линейно независима*.

Если указанные теоремы не дают ответа на вопрос о линейной зависимости или независимости векторов, то необходимо решать систему уравнений относительно

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m,$$

либо определять ранг системы векторов.

- **Пример 3**. Дана система из трех векторов трехмерного пространства:

$$\overline{a_1} = (1;0;-1); \quad \overline{a_2} = (1;-1;1); \quad \overline{a_3} = (1;-3;-1).$$

- Установить, является ли данная система линейно зависимой или нет.
- .

- **Решение:** Составим определитель из координат векторов и вычислим его.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1+3-1+3 \neq 0$$

- Так как определитель отличен от нуля, то согласно теореме 3 вектора линейно независимы.
- **Ответ**: векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}$ и $\overline{a_3}$
- линейно независимы

- **Пример 4**. Выяснить, являются ли векторы

$$\overline{a_1} = (0;1;-1;3), \quad \overline{a_2} = (1;-2;1;4) \quad и \quad \overline{a_3} = (2;-3;1;11)$$

- линейно зависимыми.
- **Решение:** Составим линейную комбинацию:

$$\lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \lambda_3 \overline{a_3} = \overline{0}$$

- или

$$\lambda_1\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\3\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\4\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}2\\-3\\1\\11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

- Необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases}\lambda_2+2\lambda_3=0\\ \lambda_1-2\lambda_2-3\lambda_3=0\\ -\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\\ 3\lambda_1+4\lambda_2+11\lambda_3=0\end{cases}$$

- Эта система имеет бесконечное множество решений:

$$\lambda_1 = -c; \quad \lambda_2 = -2c \quad \lambda_3 = c$$

- Значит векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}$ и $\overline{a_3}$ линейно зависимы.
- Действительно, получаем

$$-c\overline{a_1} - 2c\overline{a_2} + c\overline{a_3} = \overline{0}$$

- $$-c\left(\overline{a_1} + 2\overline{a_2} - \overline{a_3}\right) = 0$$

откуда

$$\overline{a_3} = \overline{a_1} + 2\overline{a_2}$$

- т.е. вектор $\overline{a_3}$ линейно выражается через векторы $\overline{a_1}$ и $\overline{a_2}$.

- **Ранг и базис системы векторов.**
-
- **Определение 1**. **Рангом** системы векторов называется максимальное число линейно независимых векторов этой системы.

Система из **n**- векторов **n**-мерного векторного пространства линейно независима тогда и только тогда, когда определитель, составленный из координат этих векторов, отличен от нуля.

- Таким образом, чтобы установить, является ли данная система векторов линейно независимой или нет, надо составить матрицу из координат этих векторов и вычислить ее ранг.

- Если ранг матрицы равен числу векторов в системе, то система векторов линейно независима

- .

- Для системы из n-векторов n-мерного пространства достаточно вычислить определитель, составленный из координат этих векторов.
- Если определитель не равен нулю, то система векторов линейно независима.
- В противном случае линейно зависима.

- **Определение 2**. **Базисом** системы векторов

$$\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a}_m$$

- называется совокупность линейно независимых векторов данной системы, число которых равно ее рангу.

- **Определение 3**. Любая система n линейно независимых векторов n-мерного векторного пространства называется базисом этого пространства.

- **Определение 4**. Линейно независимые векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a}_m$
- образуют базис рассматриваемого векторного пространства, если любой вектор $\overline{a}$ этого пространства является линейной комбинацией этих векторов, т.е.

$$\overline{a} = \lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \cdots + \lambda_m \bar{a}_m = 0$$

где λ_i - некоторые числа

- В этом случае говорят, что вектор $\bar{a}$
- разложен по данному базису, а числа λ_i
- называют координатами вектора $\bar{a}$
- по данному базису.
- При изменении базиса координаты вектора могут измениться

- **Пример 1**. Найти ранг системы векторов:

$$\overline{a_1} = (3,1,8,-7);$$

$$\overline{a_2} = (1,2,1,1);$$

$$\overline{a_3} = (2,-3,-9,-12);$$

$$\overline{a_4} = (-2,-4,-2,-2);$$

- **Решение:** Составим определитель из координат векторов данной системы:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -3 & -4 \\ 8 & 1 & -9 & -2 \\ -7 & 1 & -12 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 8 & 1 & -9 & 0 \\ -7 & 1 & -12 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

- т.к. содержит нулевой столбец.

- Значит векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$ и $\overline{a_4}$
- линейно зависимы. Поэтому ранг не равен 4.
- Вычислим определитель третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 8 & 1 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -5 & 0 & -7 \\ 5 & 0 & -11 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^3 \cdot M_{12} =$$

$$= -\begin{vmatrix} -5 & -7 \\ 5 & -11 \end{vmatrix} = -(55+35) = -90 \neq 0$$

- Так как определитель не равен нулю значит 3 вектора линейно независимы, т.е. .

$$r(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \overline{a_4}) = 3$$

- **Пример 3**. Разложить вектор $\overline{X}(5;-6)$
- по базису $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, где

$$\overline{a_1} = (-2;3); \quad \overline{a_2} = (1;-1);$$

- **Решение:** Запишем разложение вектора $\overline{X}$
- по базису $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$:

$$\overline{X} = \lambda_1 \overline{a}_1 + \lambda_2 \overline{a}_2 \quad (1)$$

- Для нахождения координат λ_1 и λ_2 подставим в равенство (1) координаты данных векторов:

$$(5;-6) = \lambda_1(-2;3) + \lambda_2(1;-1)$$

- Отсюда получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} -2\lambda_1 + \lambda_2 = 5 \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 = -6 \end{cases}$$

- Сложим эти уравнения, получим решение:

$$\begin{cases} -2\lambda_1 + \lambda_2 = 5 \\ \lambda_1 = -1 \end{cases}$$

$$\lambda_2 = 5 + 2\lambda_1 = 5 - 2 = 3$$

Итак, разложение вектора $\overline{x}$ по базису $\overline{a_1}, \overline{a_2}$ имеет вид:

$$\overline{X} = -\overline{a_1} + 3\overline{a_2},$$

т.е. $\overline{x} = (-1;3)$ в базисе $\overline{a_1}, \overline{a_2}$.

- ***Благодарю***
- ***за***
- ***внимание!***