Помехоустойчивое кодирование

Модели каналов

Постановка задачи

Код: $A = \{\boldsymbol{x}_m\},\ m = 1, \ldots, M,\ A \in X^n$

Скорость кода: $R = \log M/n = k/n$ бит/символ

Пропускная способность:

$$R < C \Rightarrow P_e \to 0$$

$$R > C \Rightarrow P_e > \delta > 0$$

Модели каналов

Входной алфавит $X=\{x\}$, выходной алфавит $Y=\{y\}$

Модель: $p(\mathbf{y}\,|\,\mathbf{x}) \ \ \forall\ \mathbf{y} \in Y^n, \mathbf{x} \in X^n$

Стационарный канал: $p(\boldsymbol{y}_{j+1}^{j+n}|\boldsymbol{x}_{j+1}^{j+n})$

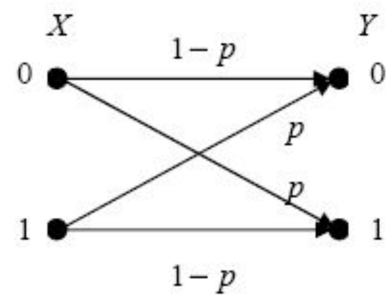
не зависят от положения во времени (от *j)*

Канал без памяти:

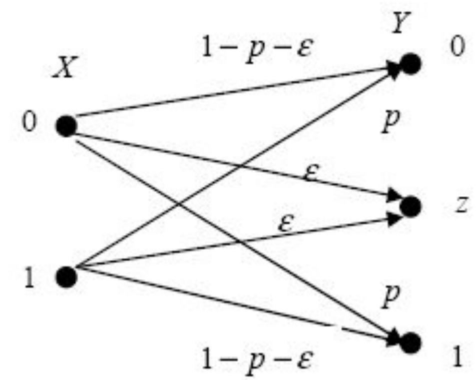
$$p(\boldsymbol{y}_{j+1}^{j+n}|\boldsymbol{x}_{j+1}^{j+n}) = \prod_{i=j+1}^{j+n} p(y_i|x_i)$$

Примеры

Диаграммы переходов и матрицы переходных вероятностей



а) ДСК



б) ДСтК

$$\begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots & p_{0,L-1} \\ p_{10} & p_{11} & \cdots & p_{1,L-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{K-1,0} & p_{K-1,1} & \cdots & p_{K-1,L-1} \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1-p-\varepsilon & \varepsilon & p \\ p & \varepsilon & 1-p-\varepsilon \end{bmatrix}$$

Взаимная информация

$$(x, y) \in XY \qquad I(x;y) = I(x) - I(x|y)$$

Свойство *Симметричность:* $I(x;y) = I(y;x)$.

Свойство *Если x и y независимы, то* $I(x,y) = 0$.

Средняя взаимная информация:

$$I(X;Y) = \mathrm{M}\left[I(x;y)\right] \qquad I(X;Y) = \sum_{x\in X}\sum_{y\in Y} p(x,y)\log\frac{p(y|x)}{p(y)}$$

Информационная емкость канала

$$C_0 = \sup_n \max_{\{p(\boldsymbol{x})\}} \frac{1}{n} I(X^n; Y^n)$$

$$C_0 = C \qquad ?$$

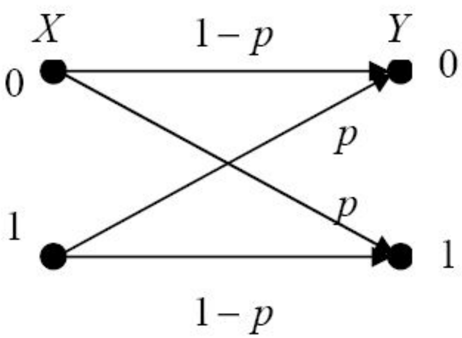
Симметричные каналы

ДПК называется *симметричным по входу*, если все строки его матрицы переходных вероятностей могут быть получены перестановками элементов первой строки.

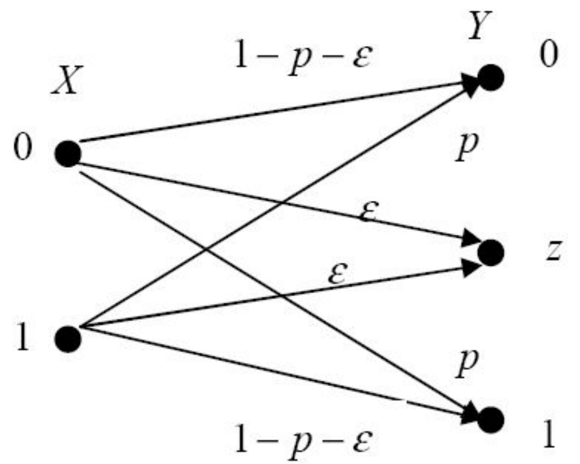
ДПК называется *симметричным по выходу*, если все столбцы его матрицы переходных вероятностей могут быть получены перестановками элементов первого столбца.

ДПК называется *полностью симметричным*, если он симметричен одновременно по входу и по выходу.

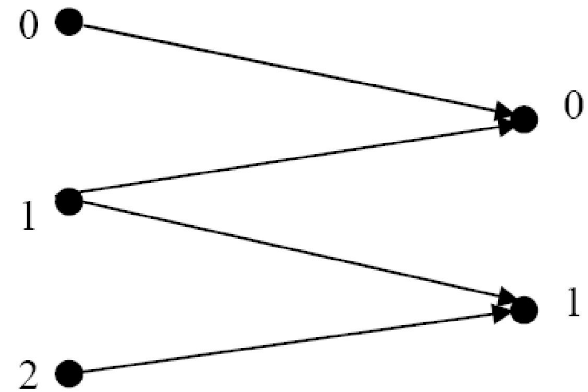
Примеры



$$P = \begin{Vmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{Vmatrix}$$

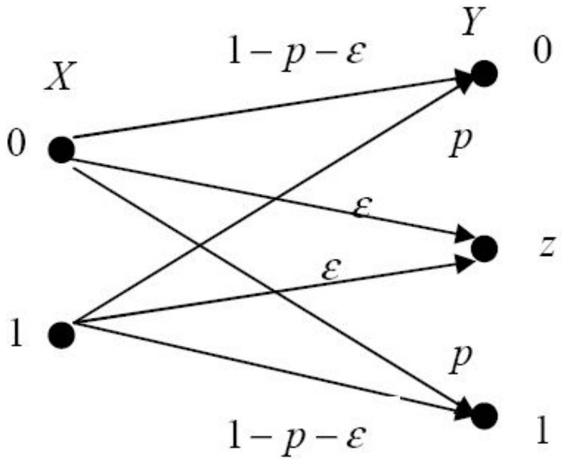


$$P = \begin{Vmatrix} 1-p-\varepsilon & \varepsilon & p \\ p & \varepsilon & 1-p-\varepsilon \end{Vmatrix}$$



$$P = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Канал со стираниями



$$p_x(0) = p_x(1) = 1/2$$

$$p_y(0) = p_y(1) = \frac{1-\varepsilon}{2}, \quad p_y(z) = \varepsilon.$$

$$C_0 = (1-\varepsilon)\left(1 - \eta\left(\frac{p}{1-\varepsilon}\right)\right)$$

Пропускная способность такая же как если бы декодер заранее знал, какие позиции будут стерты

Формулировка прямой теоремы кодирования

Теорема *Для дискретного постоянного канала с информационной емкостью C_0 для любых $\varepsilon, \delta > 0$ существует достаточно большое число n_0 такое, что для любого натурального числа $n \geq n_0$ существует код длины n со скоростью $R \geq C_0 - \delta$, средняя вероятность ошибки которого $P_e \leq \varepsilon$.*

Для доказательства теоремы нужно

1. Построить ансамбль случайных кодов с заданной длиной и скоростью.
2. Указать правило декодирования.
3. Оценить среднюю по ансамблю кодов вероятность ошибки и доказать, что вероятность ошибки убывает с увеличением длины кодов.

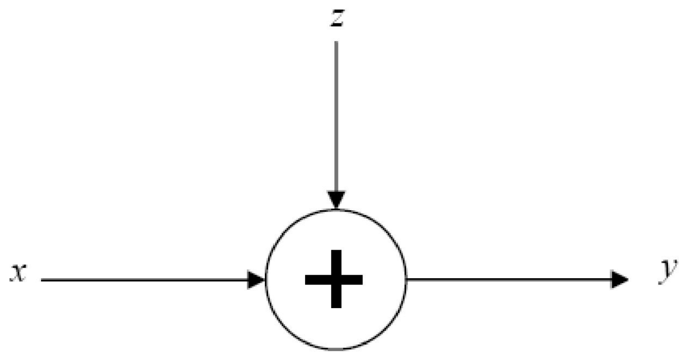
Непрерывные каналы дискретного времени

$$f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}) = f(y_1, \ldots, y_n | x_1, \ldots, x_n).$$

Канал без памяти

$$f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i|x_i)$$

Канал с аддитивным шумом



$$\boldsymbol{y} \;=\; \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}$$

$$f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{z})$$

Аддитивный канал без памяти

$$f(\boldsymbol{z}) = \prod_{i=1}^{n} f(z_i)$$

Ограничения

Энергией входной последовательности $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)$ называется величина $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

Мощностью или средней энергией на отсчет называют величину

$$E(\boldsymbol{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}$$

Информационной емкостью непрерывного стационарного канала дискретного времени с ограничением E на мощность входных сигналов называется величина

$$C_0 = \sup_n \max_{f(\boldsymbol{x}):\mathbf{M}[E(\boldsymbol{x})] \leq E} \frac{1}{n} I(X^n; Y^n).$$

Информационная емкость

Теорема *Информационная емкость непрерывного стационарного канала дискретного времени без памяти с ограничением E на мощность входных сигналов равна*

$$C_0 = \max_{f(x):\mathbf{M}[E(x)]\leq E} I(X;Y).$$

Гауссовский канал с аддитивным шумом

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0}} e^{-\frac{z^2}{2N_0}}$$

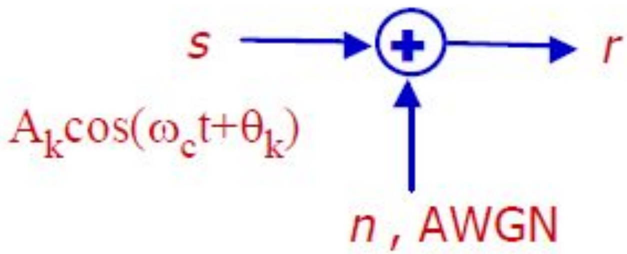
Теорема *Информационная емкость гауссовского стационарного канала дискретного времени без памяти с ограничением E на мощность входных сигналов равна*

$$C_0 = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{E}{N_0} \right)$$

Следствие: для произвольного распределения шума

$$C_0 \leq \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{E}{N_0} \right)$$

Шеннон Shannon



$$C = \log_2(1 + P_S/P_n)$$
$$= \log_2(1 + SNR)$$

(bits/channel use)