

СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

СОДЕРЖАНИЕ:

- Что такое система счисления?
- Непозиционные системы счисления
- Позиционные системы счисления
- Перевод в 10-тичную СС
- Перевод из 10-тичной СС
- Перевод из 2-ной в 8-ную и обратно
- Перевод из 2-ной в 16-ную и обратно
- Арифметические операции в позиционных СС
- Сложение и вычитание в 2-ой СС
- Умножение в 2-ой СС
- Сложение и вычитание в 8-ой СС
- Решение примеров

СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

Почему мы используем цифры от 0 до 9? А как можно считать еще? Оказывается, существует множество вариантов! И это зависит от такого понятия, как ***система счисления***.

Система счисления (СС) — способ записи чисел с помощью набора специальных знаков, называемых цифрами.

ВИДЫ СИСТЕМ СЧИСЛЕНИЯ



В *позиционных* системах счисления *величина*, обозначаемая цифрой в записи числа, *зависит* от её *положения* в числе (*позиции*).

211

В *непозиционных* системах счисления *величина*, которую обозначает цифра, *не зависит* от *положения* в числе.

XXI

НЕПОЗИЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Ярким примером фактически *непозиционной системы* счисления является **римская**, в которой в качестве цифр используются латинские буквы:

I обозначает 1, **V** - 5, **X** - 10, **L** - 50, **C** - 100, **D** - 500, **M** - 1000.

Натуральные числа записываются при помощи повторения этих цифр. Например, $II = 1 + 1 = 2$, здесь символ **I** обозначает 1 независимо от места в числе.

Для правильной записи больших чисел римскими цифрами необходимо сначала записать число тысяч, затем сотен, затем десятков и, наконец, единиц.

ПРИМЕР

Число 1789. Одна тысяча M, семь сотен DCC, восемьдесят LXXX, девять IX. Запишем их вместе: MDCCLXXXIX.

$$\text{MDCCLXXXIX} = 1000 + (500 + 100 + 100) + (50 + 10 + 10 + 10) + (10 - 1) = 1789$$

Для изображения чисел в непозиционной системе счисления нельзя ограничиться конечным набором цифр. Кроме того, выполнение арифметических действий в них крайне неудобно.

ПЕРВЫЕ ПОЗИЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Самой первой такой системой, когда счетным "прибором" служили пальцы рук, была **пятеричная**.

Следующей возникла **двенадцатеричная** система счисления. Возникла она в древнем Шумере. Возможно, что она возникала у них из подсчёта фаланг на руке большим пальцем.

На ее широкое использование в прошлом указывает сохранившиеся в ряде стран способы отсчета времени, денег и соотношения между некоторыми единицами измерения. Год состоит из 12 месяцев, а половина суток состоит из 12 часов.

Элементом двенадцатеричной системы в современности может служить счёт дюжинами.

Английский фунт состоит из 12 шиллингов.

Следующая позиционная система счисления была придумана еще в Древнем Вавилоне, причем вавилонская нумерация была **шестидесятеричная**, т.е. в ней использовалось шестьдесят цифр!

В более позднее время использовалась арабами, а также древними и средневековыми астрономами. Шестидесятеричная система счисления, как считают исследователи, являет собой синтез уже вышеупомянутых пятеричной и двенадцатеричной систем.

В настоящее время наиболее распространены *десятичная, двоичная, восьмеричная и шестнадцатеричная* системы счисления.

ДЕСЯТИЧНАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

Десятичная система

счисления — позиционная система счисления по основанию 10.

Предполагается, что основание 10 связано с количеством пальцев на руках у человека.

Наиболее распространённая система счисления в мире.

Для записи чисел используются символы **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9**, называемые арабскими цифрами.

Современные цифры	Арабские цифры	Индийские цифры
0	٠	०
1	١	१
2	٢	२
3	٣	३
4	٤	४
5	٥	५
6	٦	६
7	٧	७
8	٨	८
9	٩	९

ДВОИЧНАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

Двоичная система счисления — позиционная система счисления с основанием 2.

Используются цифры 0 и 1.

Двоичная система используется в цифровых устройствах, поскольку является наиболее простой и удовлетворяет требованиям:

- Чем меньше значений существует в системе, тем проще изготовить отдельные элементы.
- Чем меньше количество состояний у элемента, тем выше помехоустойчивость и тем быстрее он может работать.
- Простота создания таблиц сложения и умножения — основных действий над числами

АЛФАВИТ ДВОИЧНОЙ, ВОСЬМЕРИЧНОЙ, ДЕСЯТИЧНОЙ И ШЕСТНАДЦАТЕРИЧНОЙ СИСТЕМ СЧИСЛЕНИЯ

Система счисления	Основание	Алфавит цифр
Двоичная	2	0, 1
Восьмеричная	8	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
Десятичная	10	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
Шестнадцатеричная	16	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

Количество используемых цифр называется **основанием системы счисления**.

СООТВЕТСТВИЕ ДЕСЯТИЧНОЙ, ДВОИЧНОЙ, ВОСЬМЕРИЧНОЙ И ШЕСТНАДЦАТЕРИЧНОЙ СИСТЕМ СЧИСЛЕНИЯ

p=10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
p=2	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111	10000
p=8	0	1	2	3	4	5	6	7	10	11	12	13	14	15	16	17	20
p=16	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10

При одновременной работе с несколькими системами счисления для их различения основание системы обычно указывается в виде нижнего индекса, который записывается в десятичной системе:

321_{10} — это число 321 в десятичной системе счисления;

101000001_2 — то же число, но в двоичной системе.

Двоичное число 101000001_2 можно расписать в виде:

$$101000001_2 = 1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0.$$

ПЕРЕВОД ЧИСЕЛ В ДЕСЯТИЧНУЮ СИСТЕМУ СЧИСЛЕНИЯ

Чтобы перевести целое число из позиционной системы счисления с основанием p в **десятичную**, нужно справа налево, начиная с 0, расставить разряды, потом каждую цифру умножить на основание системы счисления из которой переводим в степени этого разряда.

Например, переведем число 11001_2 в десятичную систему счисления. Для этого представим это число в виде степеней двойки и произведем вычисления в десятичной системе счисления.

$$11001_2 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 16 + 8 + 0 + 0 + 1 = 25_{10}$$

Рассмотрим еще один пример. Переведем число $12,34_8$ в десятичную систему счисления.

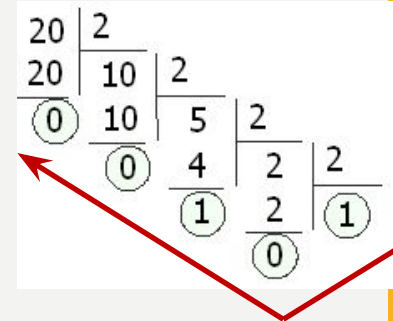
$$12,34_8 = 1 \cdot 8^1 + 2 \cdot 8^0 + 3 \cdot 8^{-1} + 4 \cdot 8^{-2} = 1 \cdot 8 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1/8 + 4 \cdot 1/64 = 10 + 0,375 + 0,0625 = 10,4375_{10}$$

**Перевод целых десятичных
чисел в
2, 8, 16-ую системы счисления**

ПЕРЕВОД ЧИСЕЛ ИЗ ДЕСЯТИЧНОЙ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ В ЛЮБУЮ ДРУГУЮ

Перевод из десятичной системы счисления в систему счисления с основанием p осуществляется последовательным делением десятичного числа и его десятичных частных на p , а затем выписыванием последнего частного и остатков в обратном порядке.

Переведем десятичное число 20_{10} в двоичную систему счисления (основание системы счисления $p=2$). В итоге получили $20_{10} = 10100_2$.



ПЕРЕВОД ЦЕЛОГО ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА МЕТОДОМ ПОЭТАПНОГО ДЕЛЕНИЯ

**ПЕРЕВЕСТИ ДЕСЯТИЧНОЕ ЧИСЛО 26 В
ДВОИЧНУЮ, ТРОИЧНУЮ,
ШЕСТНАДЦАТЕРИЧНУЮ СИСТЕМЫ**

$$26_{10} \rightarrow X_2$$

26		0	↑
13		1	
6		0	
3		1	
1		1	

$$26_{10} = 11010_2$$

$$26_{10} \rightarrow X_3$$

26		2	↑
8		2	
2		2	

$$26_{10} = 222_3$$

$$26_{10} \rightarrow X_{16}$$

26		10	↑
1		1	

$$26_{10} = 1A_{16}$$

Перевести в 2-ую СС

$$263_{10} \rightarrow X_2$$

$$54_{10} \rightarrow X_2$$

$$173_{10} \rightarrow X_2$$

$$219_{10} \rightarrow X_2$$

ЗАДАНИЯ:

- Запишите в развернутом виде числа:

$$1234_{10} =$$

$$345_8 =$$

$$11010_2 =$$

- Переведите числа в десятичную систему счисления:

$$274_8 =$$

$$BE_{16} =$$

$$110101_2 =$$

- Как будет записываться число 24_{10} в двоичной системе счисления? 123_{10} в восьмеричной?

ПЕРЕВОД 2 ↔ 8 СС

Очень просто! Направо и налево от точки откладываем **триады** - группы по три цифры, после чего записываем их в соответствующем 8-ном виде. Неполные триады дополняются нулями.

Пример:

$$1011010 = 001\ 011\ 010_2 = 132_8$$

Обратно - с точностью до наоборот:

$$257_8 = 010\ 101\ 111_2 = 10101111_2$$

СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ЭВМ (С ОСНОВАНИЕМ 2^N)

Перевести число 1100101001101010111_2
в восьмеричную систему счисления

001	100	101	001	101	010	111
1	4	5	1	5	2	7

Получаем 1451527_8

ПЕРЕВОД 2 ↔ 16 СС

Очень просто! Направо и налево от точки откладываем **тетрады** - группы по четыре цифры, после чего записываем их в соответствующем 16-ном виде. Неполные тетрады дополняются нулями.

Пример:

$$1011010110_2 = 0010\ 11\ 01\ 0110_2 = 132_8$$

Обратно - с точностью до наоборот:

$$257_8 = 010\ 101\ 111_2 = 10101111_2$$

Перевести число 1100101001101010111_2
в шестнадцатеричную систему счисления

0110	0101	0011	0101	0111
6	5	3	5	7

Получаем 65357_{16}

ПЕРЕВЕСТИ ЧИСЛО ИЗ ВОСЬМЕРИЧНОЙ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ В ШЕСТНАДЦАТЕРИЧНУЮ

$$1451527_8 \longrightarrow X_{16}$$

$$X=65357$$

**Арифметические
операции в
позиционных системах
счисления**

Все позиционные системы счисления «одинаковы», а именно, во всех них выполняются арифметические операции по одним и тем же правилам:

- **справедливы одни и те же законы арифметики:**

-коммутативный (переместительный): $m + n = n + m$

$$m \cdot n = n \cdot m$$

-ассоциативный (сочетательный): $(m + n) + k = m + (n + k) = m + n + k$

$$(m \cdot n) \cdot k = m \cdot (n \cdot k) = m \cdot n \cdot k$$

-дистрибутивный (распределительный): $(m + n) \cdot k = m \cdot k + n \cdot k$

- **справедливы правила сложения, вычитания и умножения столбиком;**

- **правила выполнения арифметических операций опираются на таблицы сложения и умножения.**

Сложение в двоичной системе счисления:

$$0+0=0 \quad 0+1=1$$

перенос

$$1+0=1$$

$$1+1=10_2$$

$$1+1+1=11_2$$

1 1 1 1 1

$$\begin{array}{r} + \quad 10110_2 \\ 111011_2 \\ \hline \end{array}$$

$$1010001_2$$

Сложение
в 10-ой СС

$$\begin{array}{r} 99 \\ + \quad 1 \\ \hline 100 \end{array}$$

Вычитание в двоичной системе счисления:

$$0-0=0 \quad 1-1=0$$

$$1-0=1 \quad 10_2-1=1$$

заем

$$\begin{array}{r}
 0 \ 1 \ 1 \ 10_2 \ 0 \ 10_2 \\
 \cdot \qquad \qquad \cdot \\
 \underline{1000101_2} \\
 \quad \underline{11011_2} \\
 \hline
 0101010_2
 \end{array}$$

Вычитание
в 10-ой СС

$$\begin{array}{r}
 \underline{100} \\
 \quad \underline{1} \\
 99
 \end{array}$$

УМНОЖЕНИЕ В ДВОИЧНОЙ СИСТЕМЕ СЧИСЛЕНИЯ:

<i>*</i>	<i>0</i>	<i>1</i>
<i>0</i>	0	0
<i>1</i>	0	1

$$\begin{array}{r}
 101101_2 \\
 * \quad 101_2 \\
 \hline
 + \quad 101101 \\
 000000 \\
 101101 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$11100001_2$$

$$\begin{array}{r}
 11011_2 \\
 * \quad 1101_2 \\
 \hline
 10101111_2
 \end{array}$$

Арифметические операции в 8-

сложение

СС

1 1 1

$$\begin{array}{r} 156_8 \\ + 662_8 \\ \hline 1040_8 \end{array}$$

$$6 + 2 = 8 = 1 * 8 + 0$$

Перенос 1 в след. разряд

Перенос 1 в след. разряд

$$5 + 6 + 1 = 12 = 1 * 8 + 4$$

$$1 + 6 + 1 = 8 = 1 * 8 + 0$$

Перенос 1 в след. разряд

Арифметические операции в 8-

вычитание

СС

$$\begin{array}{r} \overset{\bullet}{2} \overset{\bullet}{1} 5 6_8 \\ - \quad 6 6 2_8 \\ \hline 1 2 7 4_8 \end{array}$$

$$6 - 2 = 4$$

заем

$$5 - 6 + 1 * 8 = 7$$

заем

$$0 - 6 + 1 * 8 = 2$$

ЗАДАНИЯ

ЗАДАНИЕ №1

1. Переведите числа данные в десятичной СС в двоичную , а затем в шестнадцатеричную СС:

а) **14325**

б) **3125**

2. Переведите данное число в десятичную СС:

а) **101101011**

б) **10010011010101**

ОТВЕТ НА ЗАДАНИЕ №1

1. $143,25_{10} \longrightarrow 10001111_2 \longrightarrow 8F_{16}$

$312_{10} \longrightarrow 100111000_2 \longrightarrow 138_{16}$

2. $10110101_2 \longrightarrow 181_{10}$

$100100110_2 \longrightarrow 294_{10}$

ЗАДАНИЕ №2

Переведите в восьмеричную и шестнадцатеричную СС:

110010_2

1011010011_2

1101111011_2

101000010_2

ОТВЕТ НА ЗАДАНИЕ № 2

- $110010,101_2 = 62,5_8 = 32, A_{16}$
- $1011010011,01_2 = 1323,2_8 = 2D3,4_{16}$
- $1101111011,01_2 = 1573,2_8 = 37B,4_{16}$
- $101000010,0111_2 = 502,34_8 = 142,7_{16}$

ЗАДАНИЕ №3

1. Сложите данные числа:

$$110011001_2 + 111011101_2$$

2. Выполните вычитание:

$$1101100110_2 - 110000010_2$$

3. Выполните умножение:

$$1001111_2 \times 1000100_2$$

ОТВЕТ НА ЗАДАНИЕ №3

$$\begin{array}{r} 1. \ 110\ 011\ 001,0010_2 \\ + \ 111\ 011\ 101,0101_2 \\ \hline \end{array}$$

$$1\ 101\ 110\ 110,0111_2$$

$$\begin{array}{r} 2. \ 1\ 101\ 100\ 110,0100_2 \\ - \ 110\ 000\ 010,1011_2 \\ \hline \end{array}$$

$$0\ 111\ 100\ 011,1001_2$$

$$\begin{array}{r} 3. \ 1\ 001\ 111_2 \\ \quad \times \ 1\ 000\ 100_2 \\ \hline \end{array}$$

$$1\ 010\ 011\ 111\ 100_2$$

ЗАДАНИЕ №4

1. Переведите число данное в десятичной СС в двоичную , а затем в шестнадцатеричную СС:

а) 670_{10} б) 162_{10}

2. Переведите данное число в десятичную СС:

а) 1111100111_2 б) 1001011_2

ОТВЕТ НА ЗАДАНИЕ №4

$$1. 670_{10} \longrightarrow 1010011110_2 \longrightarrow 29E_{16}$$

$$162_{10} \longrightarrow 10100010_2 \longrightarrow A2_{16}$$

$$2. 1111100111_2 \longrightarrow 999_{10}$$

$$1001011_2 \longrightarrow 75_{10}$$