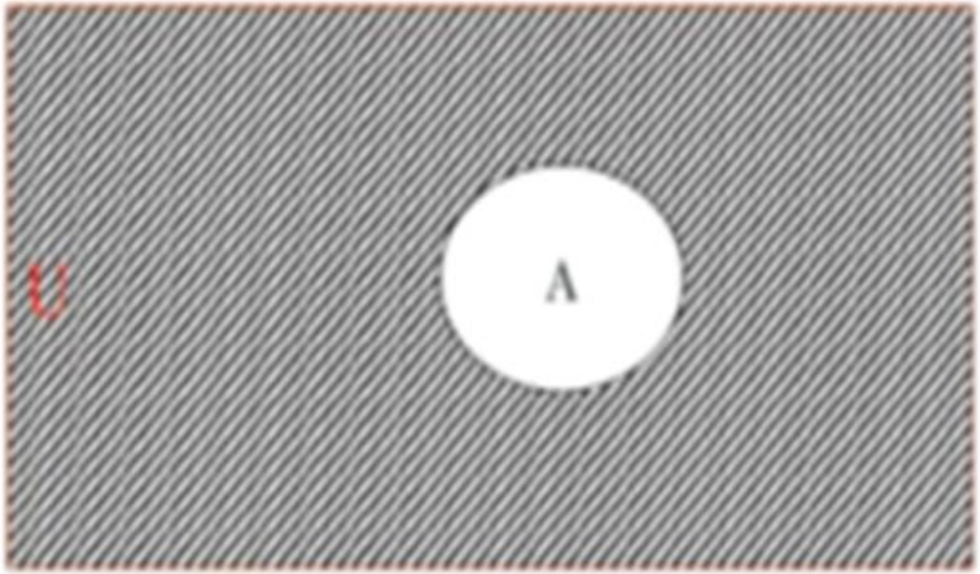
Теория множеств

ИСПО

Теория по множествам

- Если A – подмножество множества U, то *дополнением* множества A до множества U есть множество ¬ A , состоящее из тех и только тех элементов U, которые не принадлежат A,

$\neg A = U \setminus A = \{x \mid x \in U \text{ и } x \notin A\}$.



Законы

Для упрощения решений можно пользоваться следующими законами

1)

1. Если в задании формула **тождественно истинна (равна *1*),** и
2. после упрощения ***A*** **без отрицания**
то используется закон:

$$A_{min} = \neg B$$

где *B* — известная часть выражения.

1. Если в задании формула **тождественно истинна (равна *1*),** и
2. после упрощения ***A*** **с отрицанием**
то используется закон:

$$A_{max} = B$$

где *B* — известная часть выражения.

Законы

2)

1. Если в задании формула **тождественно ложна (равна *0*),** и
2. после упрощения ***A*** **без отрицания**
то используется закон:

$$A_{max} = \neg B$$

где *B* — известная часть выражения.

1. Если в задании формула **тождественно ложна (равна *0*),** и
2. после упрощения ***A*** **с отрицанием**
то используется закон:

$$A_{min} = B$$

где *B* — известная часть выражения

Задача 1

- Элементами множеств A, P, Q являются натуральные числа, причём P = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20},

  Q = {3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30}.

- Известно, что выражение

$$((x \in A) \to (x \in P)) \land ((x \in Q) \to \neg (x \in A))$$

- истинно (то есть принимает значение 1) при любом значении переменной x. Определите наибольшее возможное количество элементов во множестве A.

Решение.

- Введем обозначения:

$(x \in P) \equiv P$; $(x \in Q) \equiv Q$; $(x \in A) \equiv A$;

- Тогда, применив преобразование импликации, получаем:

$\mathbf{(\neg A + P) \cdot (\neg Q + \neg A) = \neg A + \neg\, Q \cdot P}$ (распределительный закон)

Требуется, чтобы $\mathbf{\neg A + \neg Q \cdot P = 1.}$

Решение(продолжение)

Если в задании формула тождественно истинна (равна *1*), и после упрощения *A* <u>с отрицанием</u>, то используется закон:

$\mathbf{A_{max} = B}$ где *B* — известная часть выражения, т.е. ¬Q · P

Выражение ¬Q · P истинно, когда x ∈ {2, 4, 8, 10, 14, 16, 20}.

Тогда ¬A должно быть истинным, когда x ∈ {1, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 21, 22, 23,...}.

Следовательно, максимальное количество элементов в множестве A будет, если A включает в себя все элементы множества ¬Q · P, таких элементов семь.

- **Ответ: 7.**

Задание 2

Элементами множества А являются натуральные числа. Известно, что выражение

$(x \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}) \to (((x \in \{4, 8, 12, 116\}) \wedge \neg(x \in A)) \to \neg(x \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}))$

истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной x.

Определите наименьшее возможное значение суммы элементов множества А.

Решение

1) Заметим, что в задаче, кроме множества A, используются еще два множества. Обозначим их **P и Q**:

$$P = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \quad Q = \{4, 8, 12, 116\}$$

2) для того, чтобы упростить понимание выражения, обозначим отдельные высказывания буквами

$$\mathbf{A}\colon\ x \in A, \qquad \mathbf{P}\colon x \in P, \quad \mathbf{Q}\colon x \in Q$$

3) перейдем к более простым обозначениям

$$\mathbf{P} \to (\mathbf{Q} \cdot \overline{\mathbf{A}} \to \overline{\mathbf{P}})$$

Решение(продолжение)

1) раскрываем обе импликации по формуле $A \to B = \overline{A} + B$:

$$\mathbf{P} \to (\overline{\mathbf{Q} \cdot \overline{\mathbf{A}}} + \overline{\mathbf{P}}) = \overline{\mathbf{P}} + \overline{\mathbf{Q} \cdot \overline{\mathbf{A}}} + \overline{\mathbf{P}} = \overline{\mathbf{Q} \cdot \overline{\mathbf{A}}} + \overline{\mathbf{P}}$$

2) теперь используем закон де Моргана $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$:

$$\overline{\mathbf{Q}} + \mathbf{A} + \overline{\mathbf{P}}$$

Решение(продолжение)

1) поскольку это выражение должно быть равно 1, то A должно быть истинным везде, где ложно $\overline{\mathbf{Q}} + \overline{\mathbf{P}}$
2) тогда минимальное допустимое множество A – это $A_{\min} = \overline{\overline{\mathbf{Q}} + \overline{\mathbf{P}}} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}$ (по закону де Моргана)

(Если в задании формула тождественно истинна (равна *1*), и после упрощения *A* <u>без отрицания</u>
то используется закон:

$$3)\ A_{\min} = \neg B$$

где *B* — известная часть выражения.)

Решение(продолжение)

1) переходим ко множествам

$\mathbf{Q} = \{4, 8, 12, 116\}$

$\mathbf{P} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$

2) тогда $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}$ – это все натуральные числа, которые входят одновременно в $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{P}$; они выделены жёлтым цветом: $\{4, 8, 12\}$

3) именно эти числа и должны быть «перекрыты» множеством $A_{\min}$, поэтому минимальный состав множества А – это $A_{\min} = \{4, 8, 12\}$, сумма этих чисел равна 24

Ответ: 24.