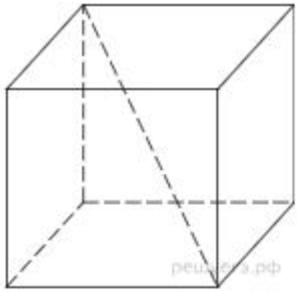
# Стереометрия

# Тип 1. Куб

Объем куба равен $24\sqrt{3}$. Найдите его диагональ.



**Решение.**

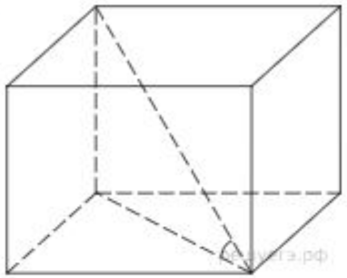
Если ребро куба равно $a$, то его объем и диагональ даются формулами $V = a^3$ и $d = a\sqrt{3}$. Следовательно,

$$d^3 = (a\sqrt{3})^3 = a^3 \cdot 3\sqrt{3} = 24\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} = 216.$$

Тогда диагональ равна 6.

# Тип 2. Прямоугольный параллелепипед

Одна из граней прямоугольного параллелепипеда — квадрат. Диагональ параллелепипеда равна $\sqrt{8}$ и образует с плоскостью этой грани угол 45°. Найдите объем параллелепипеда.

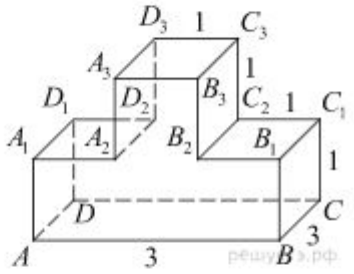


**Решение.**

Ребро параллелепипеда, лежащее напротив угла в 45°, равно $\sqrt{8}\sin 45^\circ = 2$, поскольку образует с заданной диагональю и диагональю одной из граней (эта грань является квадратом по условию) равнобедренный треугольник. Диагональ грани, которая является квадратом, тоже равна 2. Значит, площадь этого квадрата равна половине произведения диагоналей $S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$. Тогда объем параллелепипеда равен $V = 2 \cdot 2 = 4$.

# Тип 3. Элементы составных многогранников

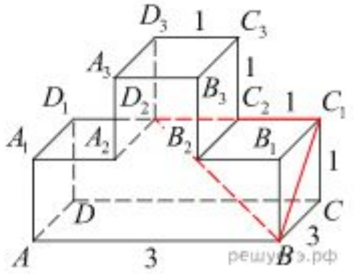
На рисунке изображён многогранник, все двугранные углы многогранника прямые. Найдите квадрат расстояния между вершинами $B$ и $D_2$.




**Решение.**

Рассмотрим прямоугольный треугольник $BC_1D_2$. По теореме Пифагора

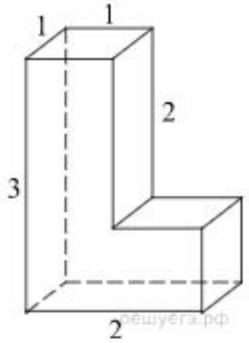
$$BD_2^2 = BC_1^2 + C_1D_2^2 = BC^2 + CC_1{}^2 + (C_1C_2 + D_3C_3)^2 = 9 + 1 + 4 = 14.$$




Ответ: 14.

# Тип 4. Площадь поверхности составного многогранника

Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



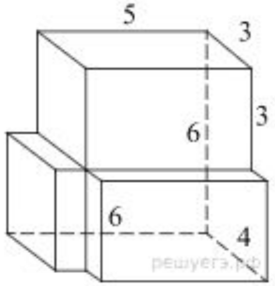

**Решение.**

Площадь поверхности заданного многогранника равна разности площади поверхности прямоугольного параллелепипеда с ребрами 2, 3, 1 и двух площадей прямоугольников со сторонами 2, 1:

$$2 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 1 = 12 + 6 = 18.$$

# Тип 5. Объем составного многогранника

Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



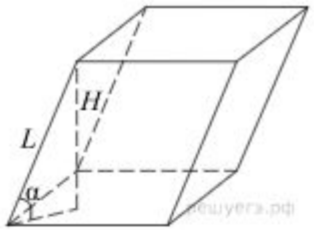

**Решение.**

Объем данного многогранника равен сумме объемов параллелепипедов со сторонами (5, 3, 3), (6, 3, 3) и (1, 3, 5):

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = 5 \cdot 3 \cdot 3 + 6 \cdot 3 \cdot 3 + 1 \cdot 3 \cdot 5 = 45 + 54 + 15 = 114.$$

# Тип 6. Призма

Гранью параллелепипеда является ромб со стороной 1 и острым углом 60°. Одно из ребер параллелепипеда составляет с этой гранью угол в 60° и равно 2. Найдите объем параллелепипеда.




**Решение.**

Объем параллелепипеда $V = Sh = SL\sin\alpha$, где $S$ — площадь одной из граней, а $L$ — длина ребра, составляющего с этой гранью угол α. Площадь ромба с острым углом в 60° равна двум площадям равностороннего треугольника. Вычислим объем:

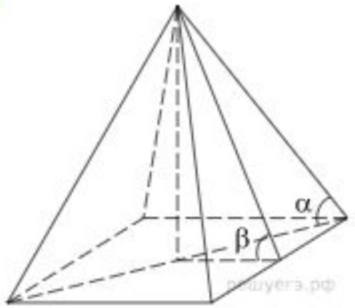
$$V = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}.$$

# Тип 7. Пирамида

В правильной четырёхугольной пирамиде боковое ребро равно 22, а тангенс угла между боковой гранью и плоскостью основания равен $\sqrt{14}$. Найти сторону основания пирамиды.

**Решение.**

Введём обозначения углов, как показано на рисунке. Пусть $R$ — длина половины диагонали. В силу связи основных углов в правильной пирамиде:




$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta/\sqrt{2} = \sqrt{7},$$

поэтому

$$a = \sqrt{2}R = \sqrt{2}\cdot l\cos\alpha.$$

Вычислим $\cos\alpha$

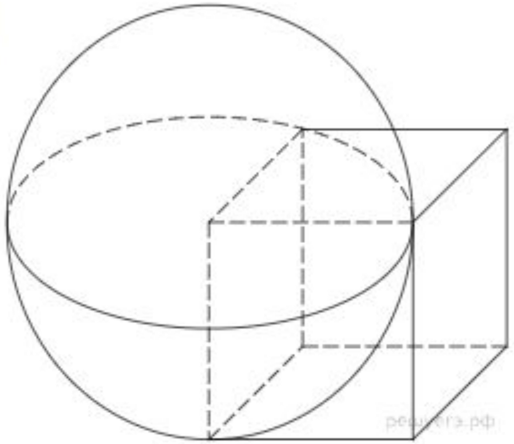
$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}} = \frac{1}{\sqrt{8}}.$$

Получаем, что

$$a = \sqrt{2}\cdot l\cos\alpha = \sqrt{2}\cdot 22\cdot\frac{1}{\sqrt{8}} = 11.$$

# Тип 8. Комбинации тел

Вершина $A$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1,6 является центром сферы, проходящей через точку $A_1$. Найдите площадь $S$ части сферы, содержащейся внутри куба. В ответе запишите величину $S/\pi$.



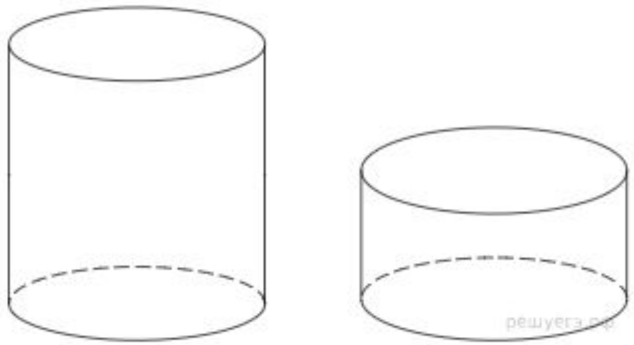
**Решение.**

Так как ребро куба равно радиусу сферы, в кубе содержится 1/8 часть сферы и, соответственно, 1/8 ее поверхности, равная

$$\frac{1}{8}S = \frac{1}{8}\cdot 4\pi R^2 = \frac{\pi}{2}\cdot 1,6^2 = 1,28\pi.$$

# Тип 9. Цилиндр

Одна цилиндрическая кружка вдвое выше второй, зато вторая в полтора раза шире. Найдите отношение объема второй кружки к объему первой.




**Решение.**

Обозначим площадь и высоту второй кружки за $S_2$ и $V_2$. Тогда объем первой кружки

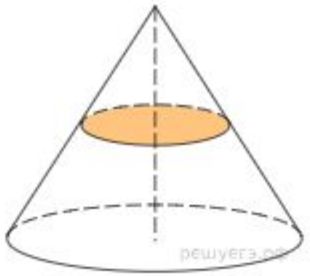
$$V_1 = S_1 H_1 = \pi {R_1}^2 H_1 = \pi \left(\frac{2}{3} R_2\right)^2 2H_2 = \frac{8}{9} V_2.$$

Тогда

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{9}{8} = 1{,}125.$$

# Тип 10. Конус

Площадь полной поверхности конуса равна 12. Параллельно основанию конуса проведено сечение, делящее высоту в отношении 1:1, считая от вершины конуса. Найдите площадь полной поверхности отсечённого конуса.



**Решение.**

Исходный и отсеченный конус подобны с коэффициентом подобия 2. Площади поверхностей подобных тел относятся как квадрат коэффициента подобия. Поэтому площадь отсеченного конуса в 4 раза меньше площади поверхности исходного. Тем самым, она равна 3.

# Тип 11. Шар

Радиусы трех шаров равны 6, 8 и 10. Найдите радиус шара, объем которого равен сумме их объемов.

**Решение.**

Объём шара вычисляется по формуле $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Поэтому сумма объёмов трёх шаров равна

$$\frac{4}{3}\pi \cdot 6^3 + \frac{4}{3}\pi \cdot 8^3 + \frac{4}{3}\pi \cdot 10^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 \cdot (3^3 + 4^3 + 5^3) = \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 \cdot 6^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 12^3.$$

Следовательно, искомый радиус равен 12.