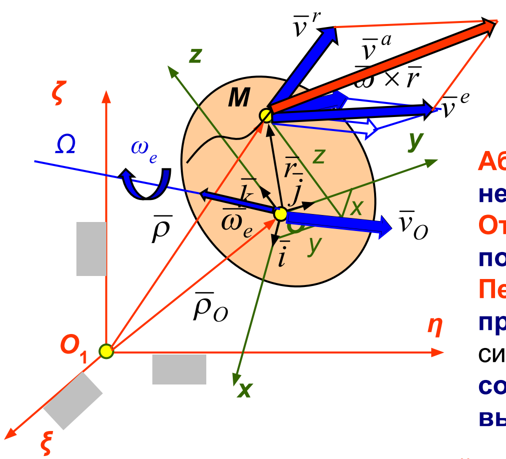
- **Сложное движение точки – такое движение, при котором точка участвует одновременно в двух или нескольких движениях.**

Примеры сложного движения точки (тела): лодка, переплывающая реку; человек, идущий по движущемуся эскалатору; камень подвижной кулисы, поршень качающегося цилиндра; шары центробежного регулятора Уатта.

Для описания сложного движения точки или для представления движения в виде сложного используются **неподвижная система отсчета $O_1\xi\eta\zeta$**, связанная с каким-либо условно неподвижным телом, например, с Землей, и **подвижная система отсчета $Oxyz$**, связанная с каким-либо движущимся телом.



Абсолютное движение (*a*) - движение **точки**, рассматриваемое относительно **неподвижной** системы отсчета. **Относительное движение (*r*)** - движение **точки**, рассматриваемое относительно **подвижной** системы отсчета.

Переносное движение (*e*) - движение **подвижной системы отсчета**, рассматриваемое относительно **неподвижной системы отсчета**.

Абсолютная скорость (ускорение) **точки v^a (a^a)** - **скорость** (ускорение) точки, **вычисленная** относительно **неподвижной** системы отсчета.

Относительная скорость (ускорение) **точки v^r (a^r)** – **скорость** (ускорение) точки, **вычисленная** относительно **подвижной** системы отсчета.

Переносная скорость (ускорение) **точки v^e (a^e)** – **скорость** (ускорение) точки, **принадлежащей** подвижной системе координат или твердому телу, с которым жестко связана подвижная система координат, **совпадающей** с рассматриваемой движущейся точкой в данный момент времени и **вычисленная** относительно **неподвижной системы отсчета**.

Теорема о сложении скоростей – абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей точки.

В любой момент времени справедливо соотношение:

$$\boxed{\bar{\rho} = \bar{\rho}_O + \bar{r} = \bar{\rho}_O + x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}.}$$

Продифференцируем это соотношение по времени имея в виду, орты ***i***, ***j***, ***k*** изменяют свое направление в общем случае движения свободного тела, с которым связана подвижная система координат:

$$\frac{d\bar{\rho}}{dt} = \frac{d\bar{\rho}_O}{dt} + \frac{d\bar{r}}{dt} = \underbrace{\boxed{\frac{d\bar{\rho}_O}{dt}}}_{\bar{v}_O} + \underbrace{\boxed{\frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k}}}_{\bar{v}^r} + \boxed{x\frac{d\bar{i}}{dt} + y\frac{d\bar{j}}{dt} + z\frac{d\bar{k}}{dt}}.$$

Здесь первое слагаемое (**v_O**) - скорость полюса *O*; следующие три – **относительная скорость точки (v^r).**

Для последних трех слагаемых следует определить производные по времени от ортов ***i***, ***j***, ***k***:

$$\boxed{\frac{d\bar{i}}{dt} = (\bar{\omega}_e \times \bar{i});}$$

Подставим векторные произведения в последние три слагаемые:

$$x(\bar{\omega}_e \times \bar{i}) + y(\bar{\omega}_e \times \bar{j}) + z(\bar{\omega}_e \times \bar{k}) = \bar{\omega}_e \times (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) = \boxed{\bar{\omega}_e \times \bar{r}.}$$

Сумма первого и последнего слагаемого – скорость точки свободного тела есть **переносная скорость точки (v^e)**:

$$\boxed{\bar{v}^e = \bar{v}_O + \bar{\omega}_e \times \bar{r}.}$$

Таким образом, с учетом того, что производная по времени радиуса-вектора ***ρ*** есть абсолютная скорость, получаем:

$$\boxed{\bar{v}^a = \bar{v}^r + \bar{v}^e.}$$

Модуль вектора абсолютной скорости:

$$\boxed{|\bar{v}^a| = \sqrt{|\bar{v}^r|^2 + |\bar{v}^e|^2 + 2|\bar{v}^r||\bar{v}^e|\sin(\bar{v}^r, \bar{v}^e)}.}$$

- **Теорема о сложении ускорений (теорема Кориолиса)** **– абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме относительного, переносного и кориолисова ускорений точки.**

Было получено ранее соотношение для скорости:

$$\frac{d\bar\rho}{dt} = \frac{d\bar\rho_O}{dt} + \dot x\bar i + \dot y\bar j + \dot z\bar k + x\frac{d\bar i}{dt} + y\frac{d\bar j}{dt} + z\frac{d\bar k}{dt}.$$

Продифференцируем это соотношение по времени еще раз:

$$\frac{d^2\bar\rho}{dt^2} = \underbrace{\boxed{\frac{d^2\bar\rho_O}{dt^2}}}_{\bar a_O} + \underbrace{\boxed{\ddot x\bar i + \ddot y\bar j + \ddot z\bar k}}_{\bar a^r} + \underbrace{\boxed{\dot x\frac{d\bar i}{dt} + \dot y\frac{d\bar j}{dt} + \dot z\frac{d\bar k}{dt} + \dot x\frac{d\bar i}{dt} + \dot y\frac{d\bar j}{dt} + \dot z\frac{d\bar k}{dt}}}_{\bar a^c} + \boxed{x\frac{d^2\bar i}{dt^2} + y\frac{d^2\bar j}{dt^2} + z\frac{d^2\bar k}{dt^2}}.$$

Здесь первое слагаемое ($\boldsymbol{a}_O$) - ускорение полюса O; следующие три – **относительное ускорение точки ($\boldsymbol{a}^r$).**

Для последних трех слагаемых следует определить вторые производные по времени от ортов подвижной системы координат ***i***, ***j***, ***k***:

$$\frac{d^2\bar i}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\bar\omega_e \times \bar i) = \frac{d\bar\omega_e}{dt}\times\bar i + \bar\omega_e\times(\bar\omega_e\times\bar i);$$

$$\frac{d^2\bar j}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\bar\omega_e \times \bar j) = \frac{d\bar\omega_e}{dt}\times\bar j + \bar\omega_e\times(\bar\omega_e\times\bar j);$$

$$\frac{d^2\bar k}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\bar\omega_e \times \bar k) = \frac{d\bar\omega_e}{dt}\times\bar k + \bar\omega_e\times(\bar\omega_e\times\bar k).$$

Подставим эти выражения в последние три слагаемые и сгруппируем:

$$\frac{d\bar\omega_e}{dt}\times x\bar i + \bar\omega_e\times(\bar\omega_e\times x\bar i) + \frac{d\bar\omega_e}{dt}\times y\bar j + \bar\omega_e\times(\bar\omega_e\times y\bar j) + \frac{d\bar\omega_e}{dt}\times z\bar k + \bar\omega_e\times(\bar\omega_e\times z\bar k) = \boxed{\bar\varepsilon_e\times\bar r + \bar\omega_e\times(\bar\omega_e\times\bar r)}.$$

Сумма первого и полученных двух слагаемых – ускорение точки свободного тела есть **переносное ускорение точки ($\boldsymbol{a}^e$)**:

$$\boxed{\bar a^e = \bar a_O + \bar\varepsilon_e\times\bar r + \bar\omega_e\times(\bar\omega_e\times\bar r).}$$

В оставшихся шести слагаемых сложим одинаковые члены, подставим векторные произведения для первых производных по времени от ортов и сгруппируем:

$$2\left[\dot x\frac{d\bar i}{dt} + \dot y\frac{d\bar j}{dt} + \dot z\frac{d\bar k}{dt}\right] = 2\left[\dot x(\bar\omega_e\times\bar i) + \dot y(\bar\omega_e\times\bar j) + \dot z(\bar\omega_e\times\bar k)\right] = \boxed{2(\bar\omega_e\times\bar v^r).}$$

Полученная компонента ускорения представляет собой **кориолисово ускорение ($\boldsymbol{a}^c$)**:

$$\boxed{\bar a^c = 2(\bar\omega_e\times\bar v^r).}$$

Таким образом, с учетом того, что вторая производная по времени радиуса-вектора $\boldsymbol{\rho}$ есть абсолютное ускорение, получаем:

$$\boxed{\bar a^a = \bar a^r + \bar a^e + \bar a^c.}$$

- **Величина и направление ускорения Кориолиса:**

Модуль вектора кориолисова ускорения:

$$\boxed{\left|\bar a^c\right| = 2\omega_e v^r \sin(\bar\omega_e, \bar v^r).}$$

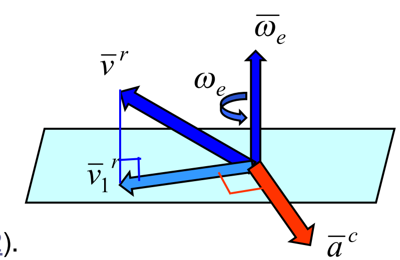
Ускорение Кориолиса обращается в ноль в двух случаях:

1. Угловая скорость переносного движения равна 0 (поступательное переносное движение).
2. Вектор угловой скорости параллелен вектору относительной скорости (синус угла между векторами обращается в 0).

Направление вектора кориолисова ускорения:

Определяется по одному из трех правил:

1. По определению векторного произведения (см. п.3.2).
2. По правилу правой руки (см. п.3.2).
3. **По правилу Жуковского**:



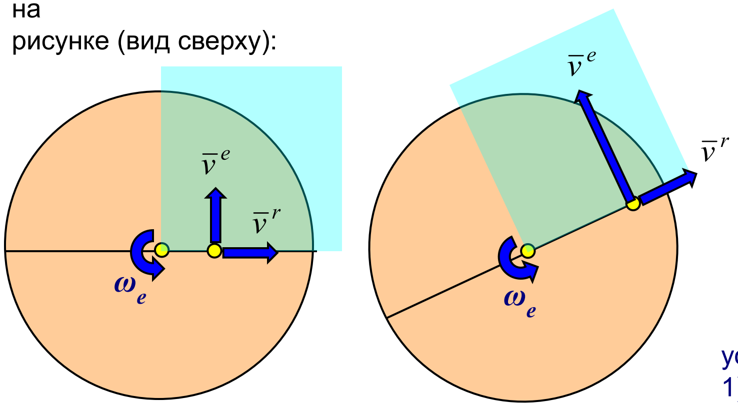
а) Спроецировать вектор относительной скорости на плоскость, перпендикулярную вектору угловой скорости.

б) Повернуть проекцию вектора относительной скорости на прямой угол в сторону дуговой стрелки угловой скорости.

■ **Причины возникновения ускорения Кориолиса:** Формально ускорение Кориолиса было выведено группировкой слагаемых произведений, содержащих проекции относительной скорости и производные по времени от ортов подвижной системы координат. При этом ранее было получено удвоенное число таких слагаемых.

Для прояснения физических причин возникновения ускорения Кориолиса рассмотрим качественный пример, в котором специально будем полагать постоянными вектор относительной скорости (в подвижной системе координат) и вектор угловой переносной скорости (вращения подвижной системы координат относительно неподвижной оси):

Пусть в некоторый момент времени положение точки и вектора относительной и переносной скоростей таковы, как они изображены на рисунке (вид сверху):



Через некоторое время точка удалится от оси вращения и тело повернется на некоторый угол.
В результате:

1) **относительная скорость изменится по направлению** из-за наличия переносной угловой скорости и
2) **переносная линейная скорость изменится по величине** из-за наличия относительной скорости, изменяющей расстояние точки до оси вращения.

Таким образом, можно считать что существует две причины возникновения ускорения Кориолиса:
1) переносная угловая скорость влияет на относительную скорость, а
2) относительная скорость в свою очередь влияет на переносную линейную скорость.

Возможно, это поможет запомнить коэффициент, равный двум, в формуле, определяющей ускорение Кориолиса.

$$\boxed{\overline{a}^c = 2(\overline{\omega}_e \times \overline{v}^r).}$$

■ **Примеры определения направления ускорения Кориолиса** удобно рассмотреть для случаев различного положения движущихся точек по поверхности Земли, вращающейся относительно своей оси: