МНОГОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

- *Случайным вектором или многомерной СВ* называется упорядоченный набор из nСВ $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$.

Дискретный случайный вектор – это случайный вектор, компоненты которого ДСВ.

Непрерывный случайный вектор – это случайный вектор, компоненты которого НСВ.

Описать многомерную СВ можно с помощью *закона распределения.*

- Для дискретного случайного вектора, имеющего компоненты (X;Y) можно составить *таблицу (матрицу) распределения*, в каждой клетке (i;j) расположены вероятности произведения событий $p_{ij} = P\left((X = x_i)\left(Y = y_j\right)\right)$.

Y X		....		....		
		....		....		
....	....	....	....	....	....	....
		....		....		
....	....	....	....	....	....	....
		....		....		
		....		....		1

- Распределение одномерной СВ X.

$$p_i = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}$$

Распределение одномерной СВ Y

$$q_j = P\left(Y = y_j\right) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}$$

Условное распределение X при условии, что $Y = y_j$

$$p_j(x_i) = \frac{p_{ij}}{q_j}$$

Условное распределение Y при условии, что X= x_i

$$q_i\left(y_j\right) = \frac{p_{ij}}{p_i}$$

Пример

Закон распределения двумерной СВ задан с помощью нижеприведенной таблицы

	-1	0	1	2
1	0,1	0,25	0,3	0,15
2	0,1	0,05	0	0,05

Найти: а) законы распределения одномерных СВ X и У; б) условные законы распределения СВ X при условии У=2 и случайной величины У при условии X=1; в) вычислить P(Y<X).

Решение

а) Случайная величина X может принимать следующие значения:

- X=1 с вероятностью $p_1 = 0{,}1 + 0{,}25 + 0{,}3 + 0{,}15 = 0{,}8;$
- X=2 с вероятностью $p_2 = 0{,}1 + 0{,}05 + 0 + 0{,}05 = 0{,}2.$

Закон распределения СВ X имеет вид:

	1	2
	0,8	0,2

- Закон распределения для СВ Y.

- Y=-1 с вероятностью $p_1 = 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}2;$
- Y=0 с вероятностью $p_2 = 0{,}25 + 0{,}05 = 0{,}3;$
- Y=1 с вероятностью $p_3 = 0{,}3 + 0 = 0{,}3;$
- Y=2 с вероятностью $p_4 = 0{,}15 + 0{,}05 = 0{,}2.$

	-1	0	1	2
	0,2	0,3	0,3	0,2

б) Условный закон распределения СВ X при У=2

$$p_4(x_1) = P(X = 1) = \frac{p_{14}}{q_4} = \frac{0{,}15}{0{,}2} = 0{,}75;$$

$$p_4(x_2) = P(X = 2) = \frac{p_{24}}{q_4} = \frac{0{,}05}{0{,}2} = 0{,}25.$$

	1	2
	0,75	0,25

- ## Условный закон распределения СВ Y при X=1

- $q_1(y_1) = P(Y = -1) = \frac{p_{11}}{p_1} = \frac{0,1}{0,8} = 0,125;$
- $q_1(y_2) = P(Y = 0) = \frac{p_{12}}{p_1} = \frac{0,25}{0,8} = 0,3125.$
- $q_1(y_3) = P(Y = 1) = \frac{p_{13}}{p_1} = \frac{0,3}{0,8} = 0,375;$
- $q_1(y_4) = P(Y = 2) = \frac{p_{14}}{p_1} = \frac{0,15}{0,8} = 0,1875.$

	-1	0	1	2
	0,125	0,3125	0,375	0,1875

в) Для нахождения вероятности P(Y<X) сложим вероятности событий p_{ij} для которых выполнено $y_j < x_i$.

P(Y<X)=0,1+0,25+0,1+0,05+0=0,5

Функцией распределения двумерной СВ называется вероятность совместного выполнения двух неравенств $\{X = x_i\}$ и $\{Y = y_j\}$, т.о.

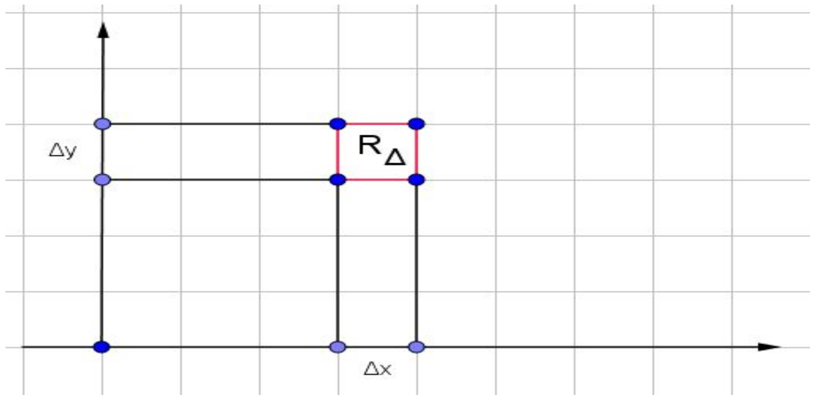
$$F(x, y) = P(X < x, Y < y).$$

Для двумерной дискретной СВ функция распределения вычисляется по формуле $F(x, y) = \sum_i \sum_j p_{ij}$.

Свойства функции распределения

- $0 \leq F(x, y) \leq 1$.
- Функция распределения является неубывающей функцией своих аргументов, т.е.
- при $x_2 > x_1 \quad F(x_2, y) \geq F(x_1, y)$
- при $y_2 > y_1 \quad F(x, y_2) \geq F(x, y_1)$
- $F(x, -\infty) = F(-\infty, x) = F(-\infty, -\infty) = 0$.
- $F(x, \infty) = F_1(x), \quad F(\infty, y) = F_2(y)$, где $F_1(x)$, $F_2(y)$ – функции распределения СВ X и Y.
- $F(\infty, \infty) = 1$.

Для двумерной НСВ можно задать *плотность вероятности* – это выражение $\varphi(x,y) = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P((x,y) \in R_\Delta)}{\Delta x \Delta y}$.



Свойства плотности вероятности

- Плотность вероятности неотрицательная функция своих аргументов, т.е. $\varphi(x,y) \geq 0$ для любых x и y.
- $\varphi(x,y) = F_{xy}(x,y)$.
- $P\big((x,y) \in D\big) = \iint_D \varphi(x,y)dxdy$.
- $F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} \varphi(t,z)dtdz$.
- $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t,z)dtdz = 1$, т.е. объем тела, ограниченного поверхностью распределения и плоскостью xOy равна 1.

Пример

1)Найти плотность вероятности, если функция распределения двумерной НСВ равна $F(x,y) = \left(1 - e^{-3x}\right)\left(1 - e^{-8y}\right)$.

2) Найти функцию распределения, если плотность вероятности двумерной НСВ равна $\varphi(x,y) = \frac{24}{\pi^2(9+x^2)(64+y^2)}$

Решение

1) $F_x(x,y) = \left(\left(1 - e^{-3x}\right)\left(1 - e^{-8y}\right)\right)_x' = \left(1 - e^{-8y}\right)\left(1 - e^{-3x}\right)_x' = \left(1 - e^{-8y}\right)\left(-(-3)e^{-3x}\right) = 3e^{-3x}\left(1 - e^{-8y}\right).$

$$F_{xy}(x,y) = \left(3e^{-3x}\left(1 - e^{-8y}\right)\right)_y' = 3e^{-3x}\left(1 - e^{-8y}\right)_y'$$

$$= 3e^{-3x}\left(-(-8)e^{-8y}\right) = 3e^{-3x} * 8e^{-8y} = 24e^{-3x-8y}$$

$$\varphi(x,y) = 24e^{-3x-8y}.$$

- 2) $F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} \varphi(t,z)dtdz = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} \frac{24}{\pi^2(9+t^2)(64+z^2)}dtdz =$

$$= \frac{24}{\pi^2}\int_{-\infty}^{x}\frac{dt}{(9+t^2)}\int_{-\infty}^{x}\frac{dz}{(64+z^2)} = \frac{24}{\pi^2}\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{x}\frac{dt}{(9+t^2)} *$$

$$* \lim_{b\to-\infty}\int_{b}^{y}\frac{dz}{(64+z^2)} = \frac{24}{\pi^2}\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{x}\frac{dt}{(3^2+t^2)} * \lim_{b\to-\infty}\int_{b}^{y}\frac{dz}{(8^2+z^2)} =$$

$$= \frac{24}{\pi^2}\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{3}arc\,tg\frac{t}{3}\Big|_{a}^{x} * \lim_{b\to-\infty}\frac{1}{8}arc\,tg\frac{z}{8}\Big|_{b}^{y} = \frac{24}{24\pi^2}\lim_{a\to-\infty}\left(arctg\frac{x}{3} -\right.$$

$$\left.- arctg\frac{a}{3}\right)\lim_{b\to-\infty}\left(arctg\frac{z}{3} - arctg\frac{b}{3}\right) = \frac{1}{\pi^2}\left(arctg\frac{x}{3}+\frac{\pi}{2}\right)\left(arctg\frac{z}{3}+\frac{\pi}{2}\right).$$

$$F(x,y) = \left(\frac{1}{\pi^2}\left(arctg\frac{x}{3}+\frac{\pi}{2}\right)\left(arctg\frac{z}{3}+\frac{\pi}{2}\right)\right.$$

СВ X и Y называется *независимыми*, если события $\{X = x_i\}$ и $\left\{Y = y_j\right\}$ независимы для любыхх и у, т.е.

$$F(x, y) = F_1(x)F_2(y)$$

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(x)\varphi_2(y).$$

Иначе СВ называется *зависимыми.*

Зависимость называется *вероятностной,* если каждому значению одной СВ соответствует условное распределение другой.

- *Ковариация СВ X и Y* – это математическое ожидание центрированных случайных величин.

$$cov(X,Y)=M((X-M(X))(Y-M(Y)))$$

$$cov(X,Y)=\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i - M(X))(y_i - M(Y))p_{ij} - \text{для ДСВ} \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\big(x - M(X)\big)\big(y - M(Y)\big)\varphi(x,y)dxdy - \text{для НСВ} \end{cases}$$

Свойства ковариации

- Ковариация двух независимых СВ равна нулю. Обратное вообще говоря неверно.
- $cov(X,Y)=M(XY)-M(X)M(Y)$, где
$$M(XY) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_i p_{ij} - \text{для ДСВ} \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\varphi(x,y)dxdy - \text{для НСВ} \end{cases}.$$
- $|cov(X,Y)| \leq \sigma_x\sigma_y$.

- *Коэффициентом корреляции* СВ называется величина

$$\rho_{xy} = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Свойства коэффициента корреляции

- $-1 \le \rho_{xy} \le 1.$
- Если СВ независимы, то их коэффициент корреляции равен нулю.
- Если $\left|\rho_{xy}\right| = 1$, то между СВX и Y существует линейная функциональная зависимость.

Пример

Определить ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин X и У

	-1	0	1	2
1	0,1	0,25	0,3	0,15
2	0,1	0,05	0	0,05

Решение

Законы распределения одномерных СВ

	1	2			-1	0	1	2
	0,8	0,2			0,2	0,3	0,3	0,2

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 1 * 0{,}8 + 2 * 0{,}2 = 1{,}2$$

$$M\left(X^2\right) = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 p_i = 1^2 * 0{,}8 + 2^2 * 0{,}2 = 1{,}6$$

$$D(X) = M\left(X^2\right) - \left(M(X)\right)^2 = 1{,}6 - 1{,}2^2 = 0{,}16$$

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}16} = 0{,}4$$

- $$M(Y)=\sum_{j=1}^{m} y_j q_j = -1*0{,}2+0*0{,}3+1*0{,}3+2*0{,}2=0{,}5$$

$$M(Y^2)=\sum_{j=1}^{m} {y_j}^2 q_j = (-1)^2*0{,}2+0^2*0{,}3+1^2*0{,}3+2^2*0{,}2=1{,}3$$

$$D(X)=M(X^2)-\left(M(X)\right)^2=1{,}3-0{,}5^2=1{,}05$$

$$\sigma_y=\sqrt{D(Y)}=\sqrt{1{,}05}\approx 1{,}025$$

$$M(XY)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_i p_{ij} = 1*(-1)*0{,}1+(-1)*0*0{,}25+1*1*0{,}3+$$

$$+1*2*0{,}15+2*(-1)*0{,}1+2*0*0{,}05+2*1*0+2*2*0{,}05=0{,}5$$

c$ov(X$,Y)=M(XY)-M(X)M(Y)=0,5-1,2*0,5=-0,1

$$\rho_{xy}=\frac{cov(X,\mathrm{Y})}{\sigma_x\sigma_y}=\frac{-0{,}1}{0{,}4*1{,}025}=-0{,}244$$

Свойства математического ожидания

- $M(XY) = M(X)M(Y) + cov(X,Y)$, если X и Y независимы, то $M(XY) = M(X)M(Y)$.
- $D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2\,cov(X,Y)$, если X и Y независимы, то $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$.

Двумерная СВ (X,Y) имеет двумерное нормальное распределение, если ее совместная плотность равна

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho_{xy}^2}} exp\left\{-\frac{1}{1-\rho_{xy}^2}\left(\frac{(x-a_x)^2}{{\sigma_x}^2} - \frac{2\rho_{xy}(x-a_x)(y-a_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-a_y)^2}{{\sigma_y}^2}\right)\right\}$$

Теорема. Если две нормально распределенные СВ не коррелированы то они независимы.

Т.о. для нормально распределенных СВ «некоррелированность» и «независимость» равносильны.