



# Электричество и магнетизм

## Лекция 07

Законы постоянного тока.

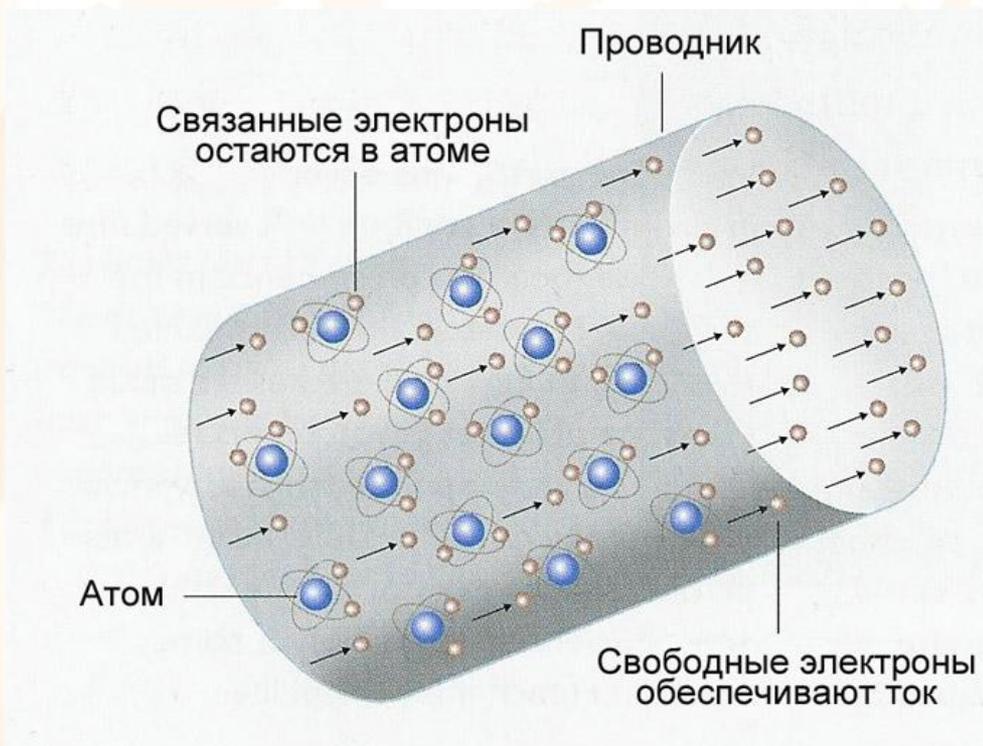
Электрические схемы постоянного тока

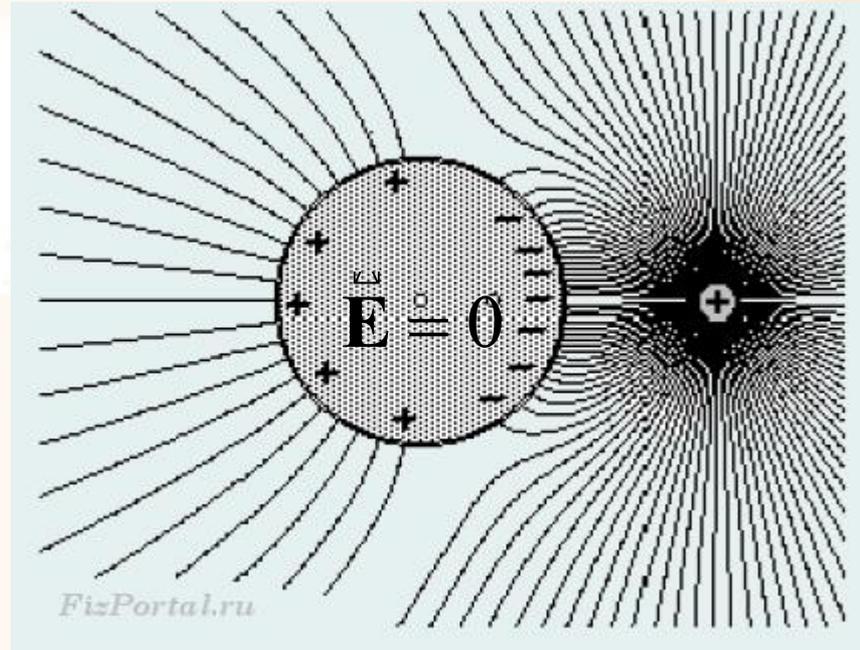
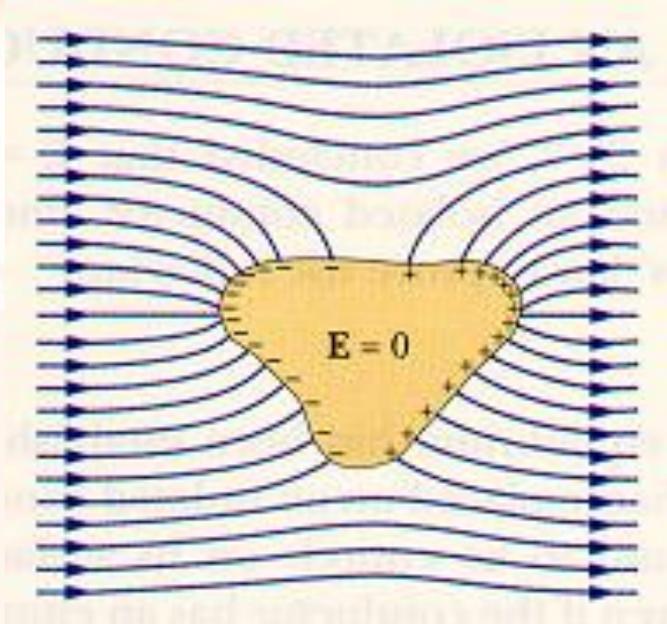
13 октября 2021 года

Лектор: доцент НИЯУ МИФИ,  
Ольчак Андрей Станиславович



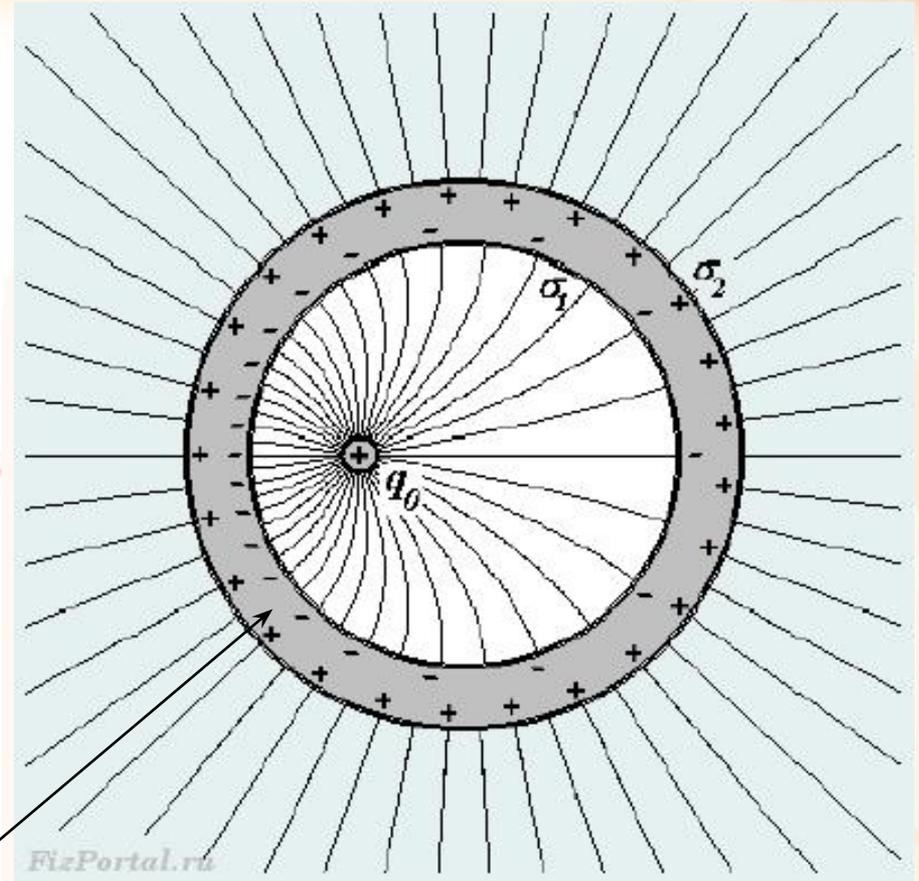
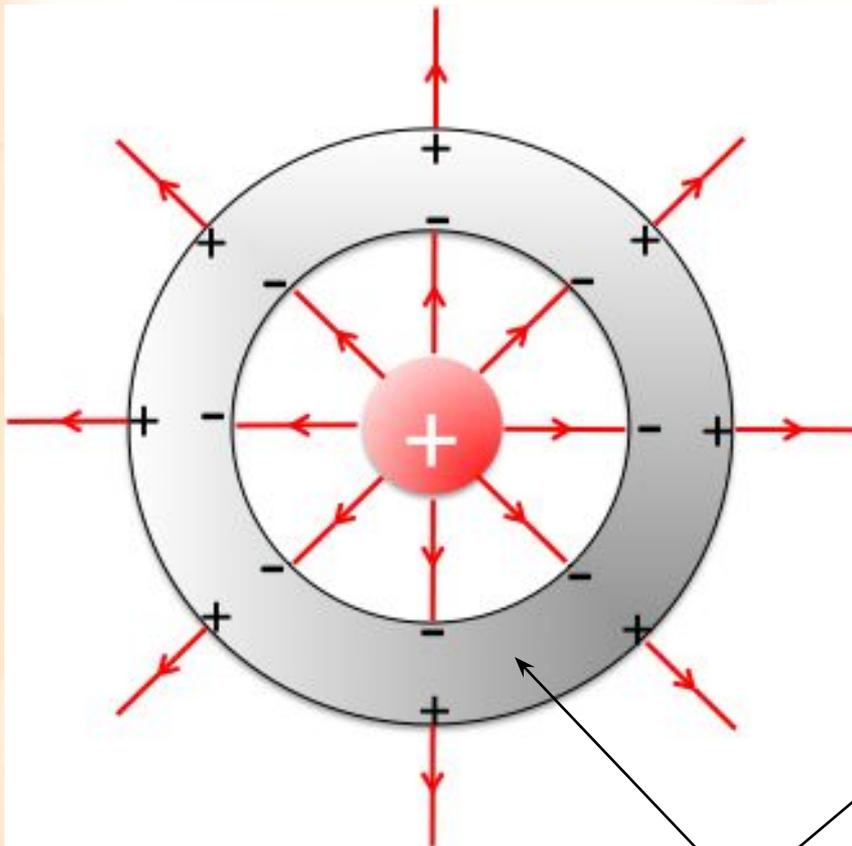
**Проводник** – вещество, где есть способные легко перемещаться (свободные) электрические заряды и возможен электрический ток (упорядоченное направленное движение электрических зарядов).



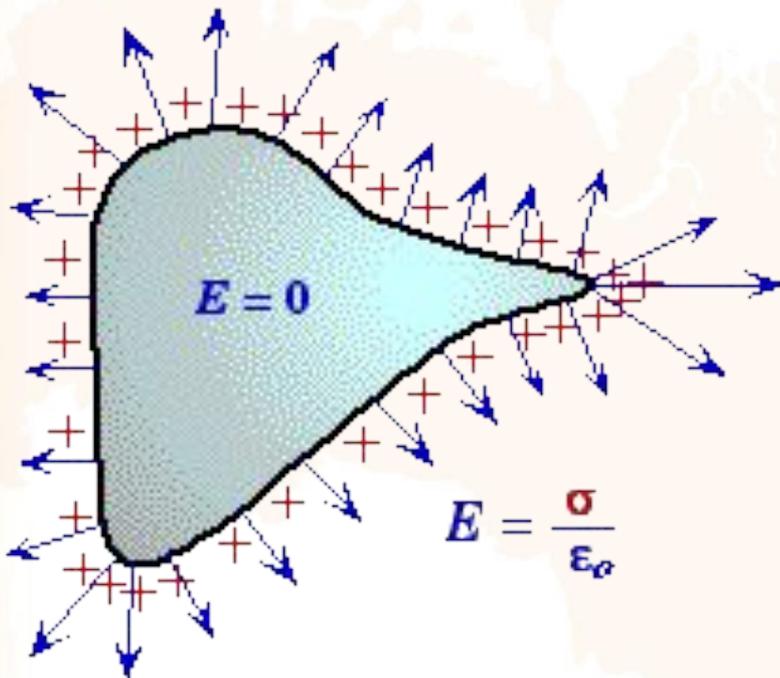


$$\vec{E} = 0 \quad \vec{E} = -\nabla\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \text{const}$$
$$(\nabla, \vec{E}) = \rho/\varepsilon_0 = 0 \Rightarrow \rho = 0$$

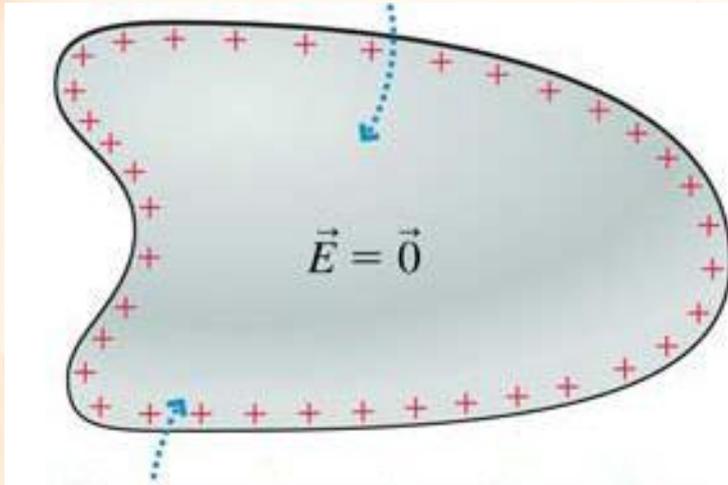
Свободные заряды в проводнике, помещенном в эл. поле, перераспределяются так, что внутри проводника  $\mathbf{E} = 0$ , а на поверхности – перпендикулярна таковой.



$$\vec{E} = 0$$



- 1) Свободные заряды располагаются на поверхности проводника
- 2) Внутри проводника  $\vec{E} = 0$ ,  $\varphi = \text{const}$ ,  $\rho = 0$ .
- 3) Снаружи проводника вектор  $\vec{E}$  ортогонален его поверхности, причём  $E_n = \sigma / (\epsilon \epsilon_0)$ ,  $E_\tau = 0$ .



Электроемкостью уединённого проводника называется коэффициент пропорциональности между зарядом и потенциалом проводника

$$q = C\varphi$$

$$C = \frac{q}{\varphi}, \Phi = \frac{\text{Кл}}{\text{В}}$$

Ёмкость проводника зависит от его размеров и формы, но не зависит ни от заряда, ни от потенциала проводника.

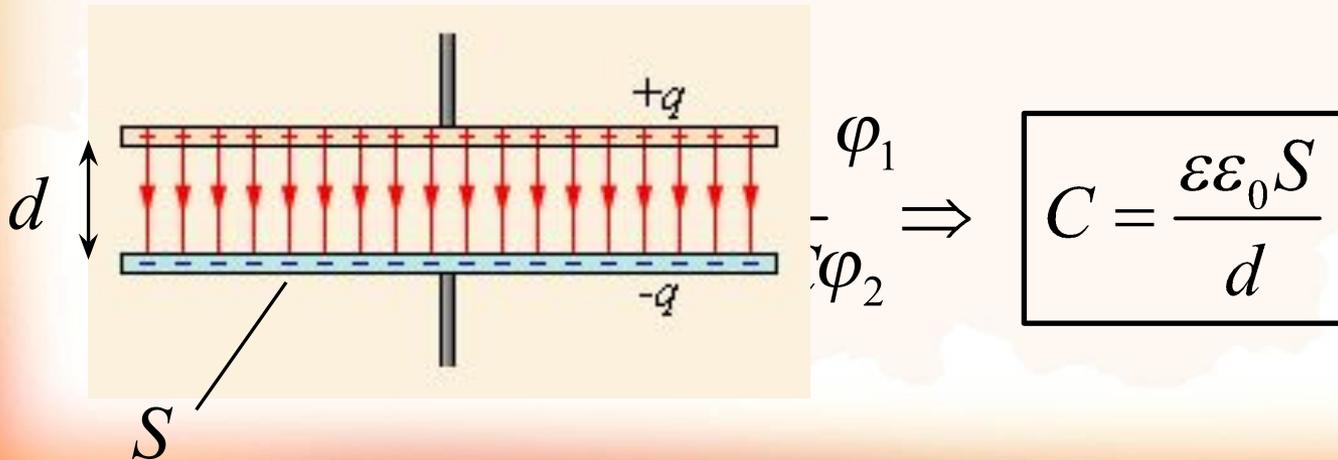
Электроемкость проводящего шара (сферы)  $C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R$



Электрический конденсатор = любая пара проводников, заряженных равными по величине и противоположными по знаку зарядами.

Емкость конденсатора = коэффициент пропорциональности между зарядом обкладок и напряжением на конденсаторе.

$$\boxed{q = CU} \Rightarrow C = \frac{q}{U}, \Phi = \frac{\text{Кл}}{\text{В}}$$

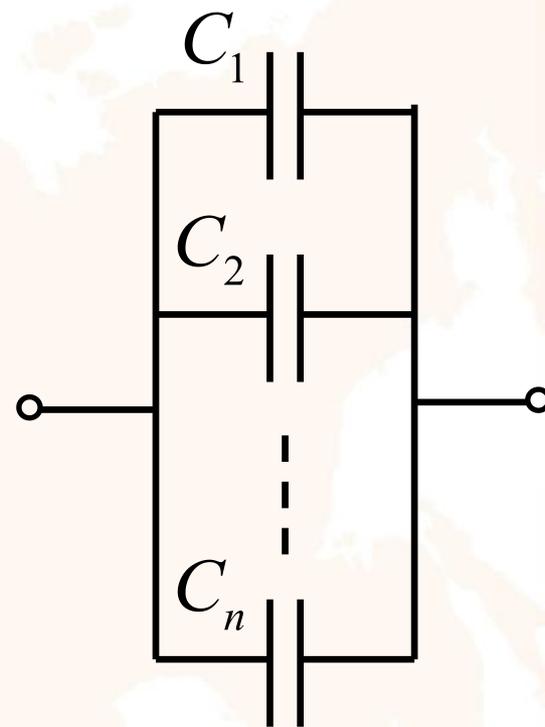




## Последовательное и параллельное соединение конденсаторов



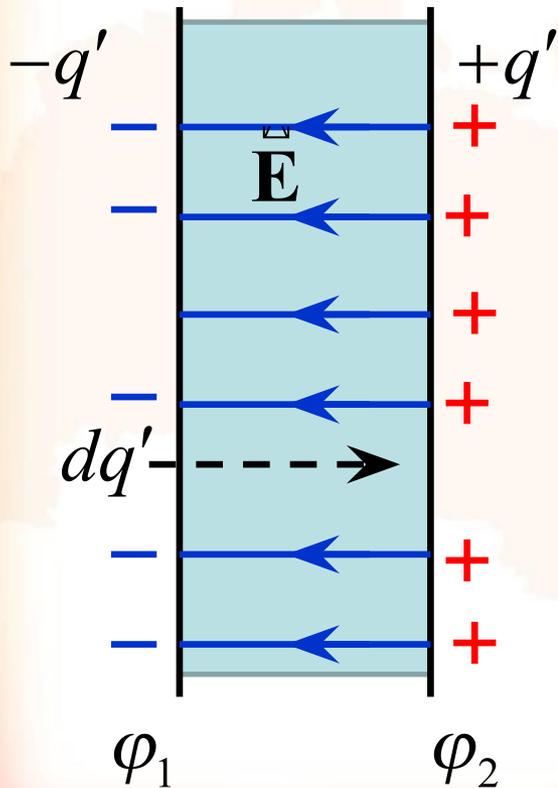
$$\frac{1}{C_{\text{общ}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$$



$$C_{\text{общ}} = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$



## Электрическая энергия заряженного конденсатора



$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2} \quad U = \varphi_2 - \varphi_1$$

$w$  [Дж/м<sup>3</sup>] – плотность энергии электрического поля :

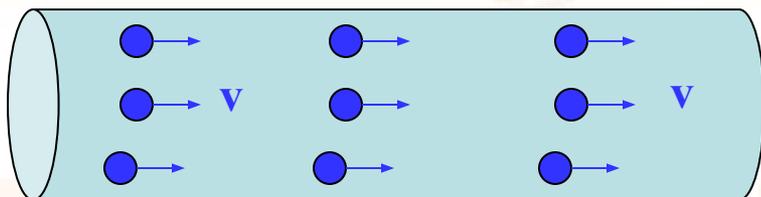
$$w = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 / 2 = \mathbf{ED} / 2$$

В изотропной среде  $\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \mathbf{E}$

В анизотропной среде  $D_j = \varepsilon_0 \varepsilon_{ij} E_i$



# Постоянный электрический ток

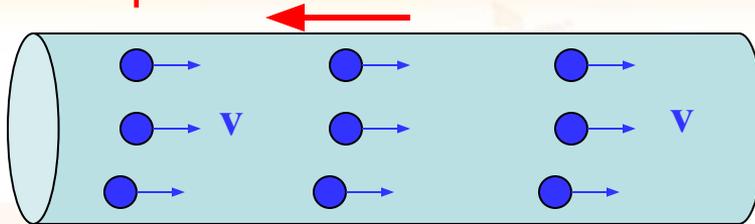


**Электрический ток** – направленное упорядоченное движение свободных электрических зарядов (носителей тока) в веществе под действием внешнего электрического поля.

Электрический ток невидим, но проявляется своим действием - нагреванием проводника, возникновением магнитного поля и др.



направление эл. поля и тока



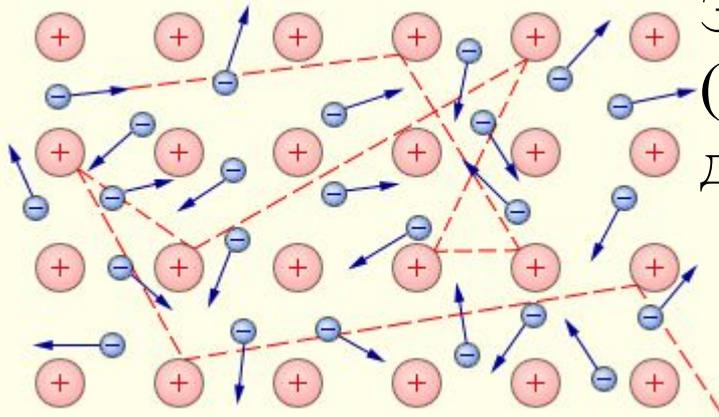
**Электрический ток** – направленное упорядоченное движение свободных электрических зарядов (носителей тока) в веществе под действием внешнего электрического поля.

Свободные заряды в принципе могут иметь как отрицательный, так и положительный заряд. За направление тока исторически принято считать направление движения **положительных** зарядов.

В металлах (основная категория проводников) свободные заряды - это **отрицательно заряженные электроны**. Условное направление тока в металлах получается **противоположным** реальному направлению движения электронов.



**Электрический ток** – направленное упорядоченное движение свободных электрических зарядов (носителей тока) в веществе под действием внешнего электрического поля.



Электроны в металле: скорость дрейфа (упорядоченного направленного движения)  $\sim 0,1 - 1$  мм/с.

При комнатной температуре скорость их *неупорядоченного* теплового движения  $\sim 10^6$  м/с.

$$\underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{v}}_{\text{хаот}} + \underline{\mathbf{v}}_{\text{дрейф}} \quad \langle \underline{\mathbf{v}}_{\text{хаот}} \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle \underline{\mathbf{v}} \rangle = \underline{\mathbf{v}}_{\text{дрейф}}$$



## Исторические опыты, подтверждающие наличие свободных электронов в металлах



~1900: Профессор студенту: «Что такое электрический ток»

Студент: «Профессор, я учил!.. Знал!.. Но забыл..»

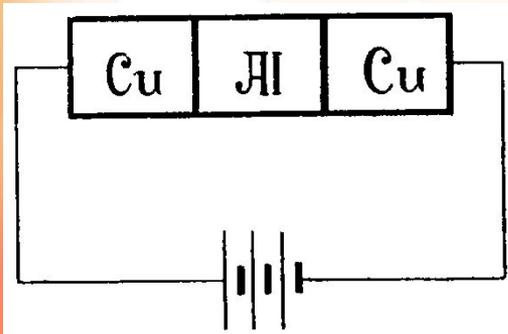
Профессор: «Жаль! Кроме вас-то никто не знал и не знает..»

Термин «электрон» как название фундаментальной неделимой единицы заряда был предложен Дж. Дж. Стоуни в 1894 году (сама единица введена им в 1874 году).

Открытие электрона как частицы: Э. Вихерт и Дж. Дж. Томсон, (1897). Они установили, что отношение заряда к массе для катодных лучей не зависит от материала источника.

Заряд электрона был непосредственно измерен в экспериментах А. Ф. Иоффе (1913) и Р. Милликена (1911). Сегодня значение заряда электрона определяются в СИ точно:

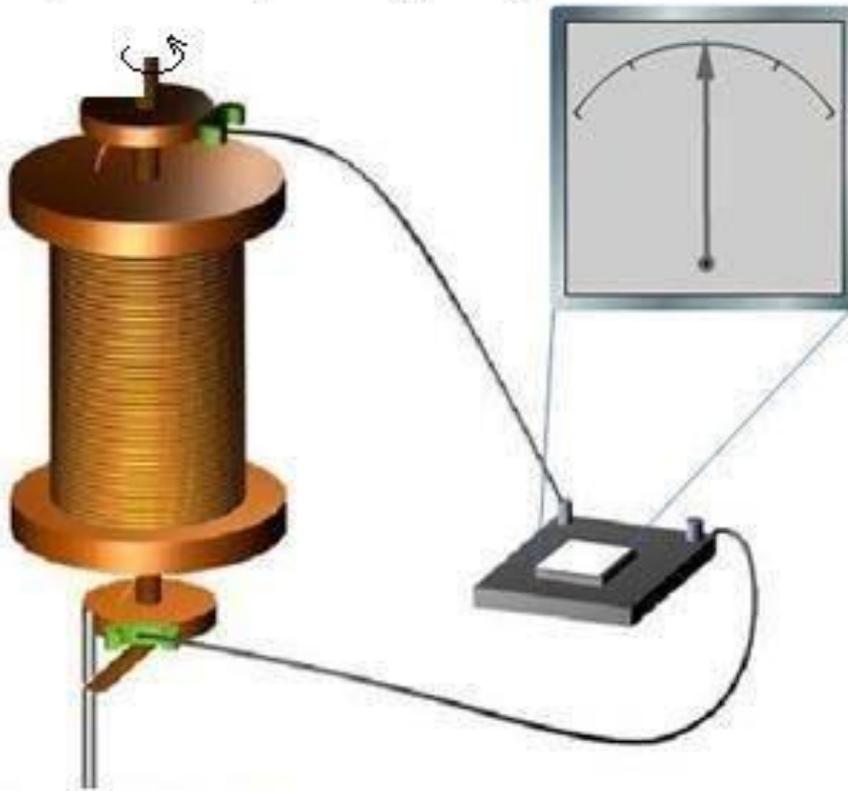
$$e = 1,602176634 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$$



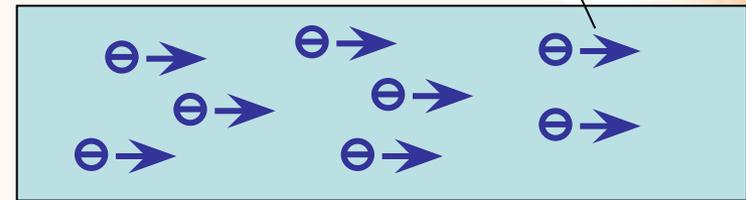
Опыт Рикке (1901): в течение года электрический ток пропускали три состыкованных цилиндра (2 медных и 1 алюминиевый). Общий заряд, прошедший через эту систему составил 3,5 миллиона Кл, но проникновения металлов друг в друга обнаружено не было, Вес цилиндров сохранился с точностью до ~0,03 мг.

Опыт Манделъштама - Папалекси (1913)  
и Толмена - Стюарта (1916)

Удельный заряд электрона  $\frac{e}{m} = 1,76 \cdot 10^{11}$  Кл / кг

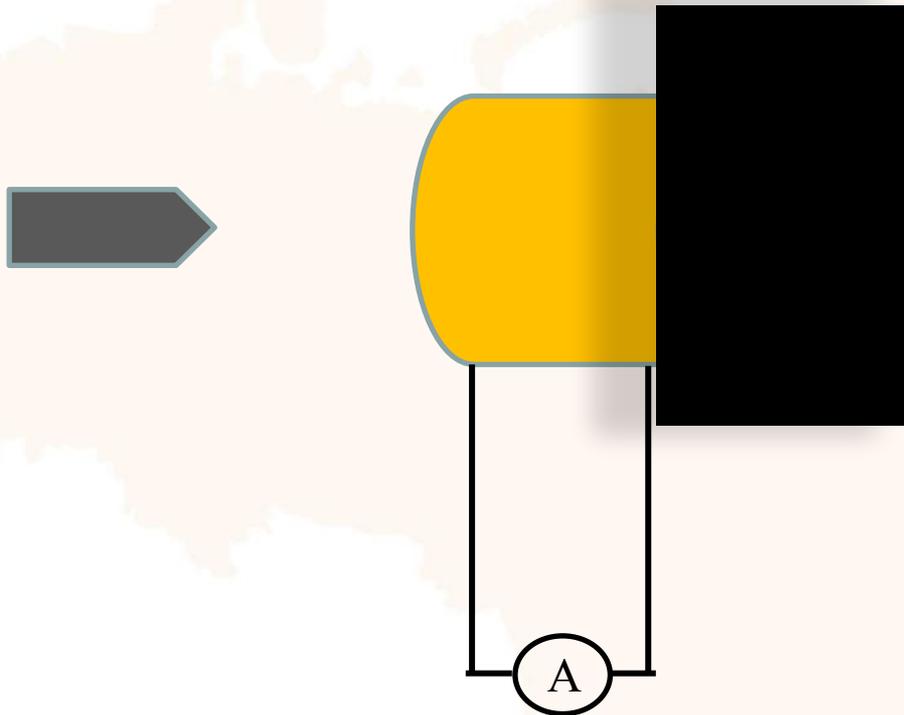


$$\vec{a} \quad \vec{F}_{in} = -m_e \vec{a}$$

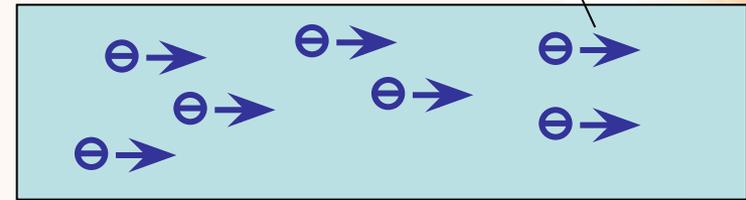


Наблюдали инерцию электронов при ускорении проводника.

## Опыт Марахтанова-Духопельникова (МГТУ им. Баумана, 2009)



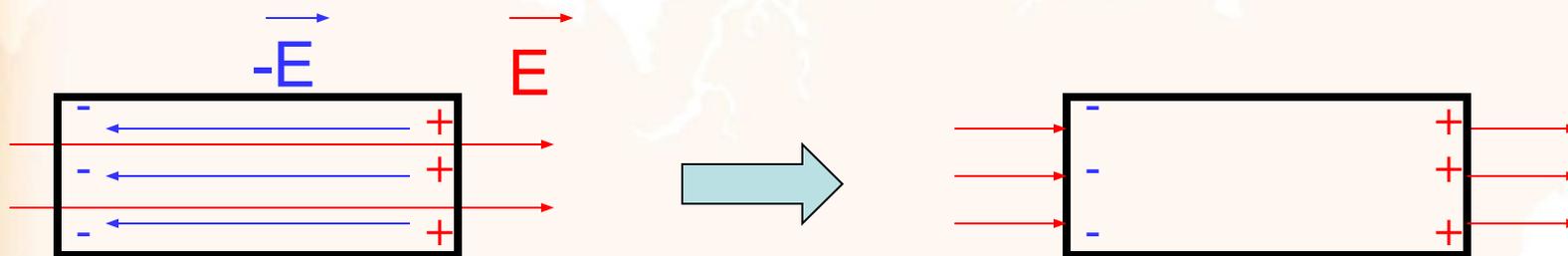
$$\vec{a} \quad \vec{F}_{in} = -m_e \vec{a}$$



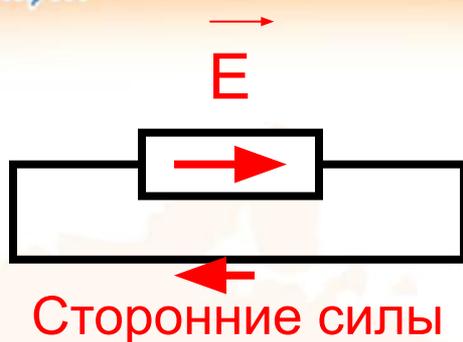
Наблюдали инерцию электронов при резком торможении проводника.



Если приложить к проводнику внешнее электрическое поле  $E$  - возникнет упорядоченное направленное движение свободных зарядов - электрический ток.



В *изолированном* проводнике, однако, этот ток очень быстро кончится. Часть свободных зарядов сместится к поверхности и создаст внутри проводника встречное поле  $E$ , полностью компенсирующее внешнее. В итоге - внутри проводника поле будет равно нулю и ток прекратится.



Для существования *длительного* электрического тока необходимо не только наличие свободных заряженных частиц (проводник) и электрическое поле  $E$ , приводящее эти заряды в движение. Необходима также *возможность для зарядов совершать движение по замкнутому контуру*

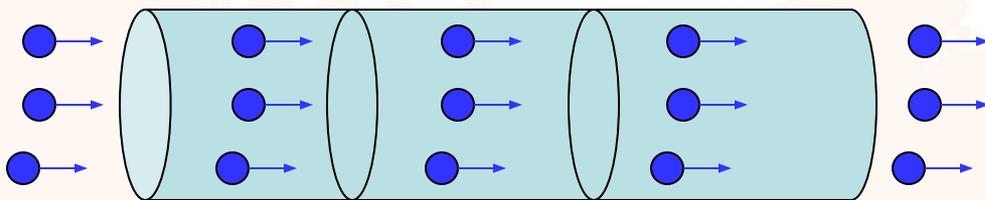
Для последнего условия необходимо:

- наличие *замкнутой проводящей цепи*;
- наличие в этой цепи *сторонних НЕлектростатических сил*, перегоняющих заряды против действия электрического поля.

Сторонние силы могут иметь разную природу: электромагнитную, химическую, термическую и др. - только не электростатическую!



Рассмотрим цилиндрический отрезок проводника, по которому протекает электрический ток. Предположим, что условия для длительного протекания тока нам удалось создать.

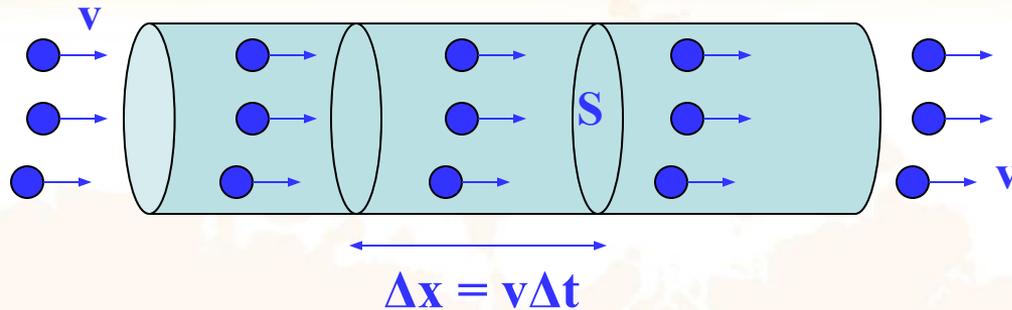


Если заряды нигде не скапливаются, то проводник остается в среднем электронейтральным и количество зарядов, проходящих через любое поперечное сечение проводника в единицу времени будет одинаково.

Сила тока  $I$  равна отношению заряда  $\Delta q$ , проходящему через поперечное сечение проводника за интервал времени  $\Delta t$ , к этому интервалу времени:

$$I = \Delta q / \Delta t \quad [\text{Ампер}] = [\text{Кл/с}] = [A]$$

*Сила тока - величина алгебраическая. Знак  $I$  зависит от условного выбора положительного направления тока*



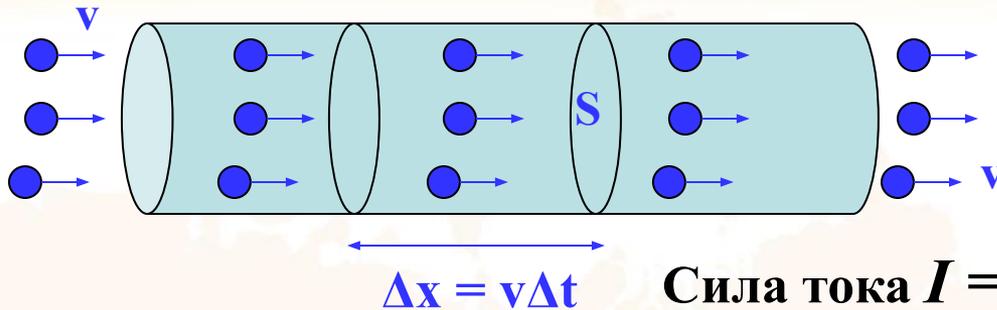
Рассматриваем

- → цилиндрический отрезок
- → проводника длины  $L$  с
- → площадью поперечного сечения  $S$ .

Предположим, что все заряды движутся с одинаковой скоростью дрейфа  $v$ . За время  $\Delta t$  через любое поперечное сечение проводника пройдет количество заряда  $\Delta q = enS\Delta x = enSv\Delta t$ , где  $e$  - заряд частиц - носителей тока,  $n$  - объемная плотность свободных зарядов в проводнике [ $1/\text{м}^3$ ].

Сила тока в проводнике составит:  $I = \Delta q / \Delta t = enSv$  [A]

Пример: в медной проволоке сечением  $S = 10^{-6} \text{ м}^2$  носители тока (электроны) имеют заряд  $e = 1,6 \times 10^{-19}$  Кл. Объемная плотность свободных электронов в меди составляет  $n = 8,5 \times 10^{28} \text{ м}^{-3}$ . Средняя скорость упорядоченного движения электронов в медной проволоке при токе  $I = 1 \text{ А}$  равна  $v = 7 \times 10^{-5} \text{ м/с}$  - всего лишь (!)



$$\Rightarrow I = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$$

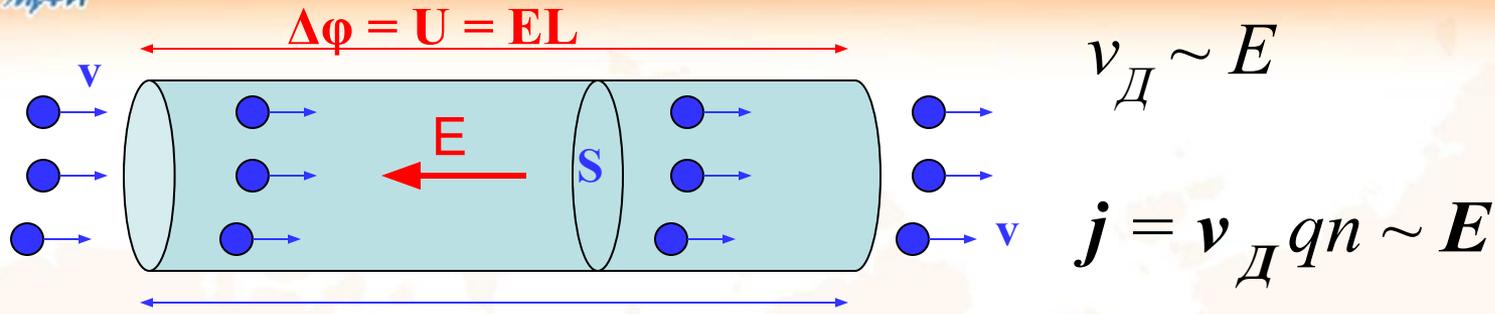
Сила тока  $I = \Delta q / \Delta t = qnSv$  [A]

Плотность тока  $\mathbf{j} = \Delta q / S\Delta t = qn\mathbf{v}$  [A/m<sup>2</sup>]

**Плотность электрического тока** = вектор, параллельный вектору дрейфовой скорости  $\mathbf{v}_d$ . Величина плотности тока равна количеству заряда, пронесимого в единицу времени через площадку единичной площади, перпендикулярной направлению тока.

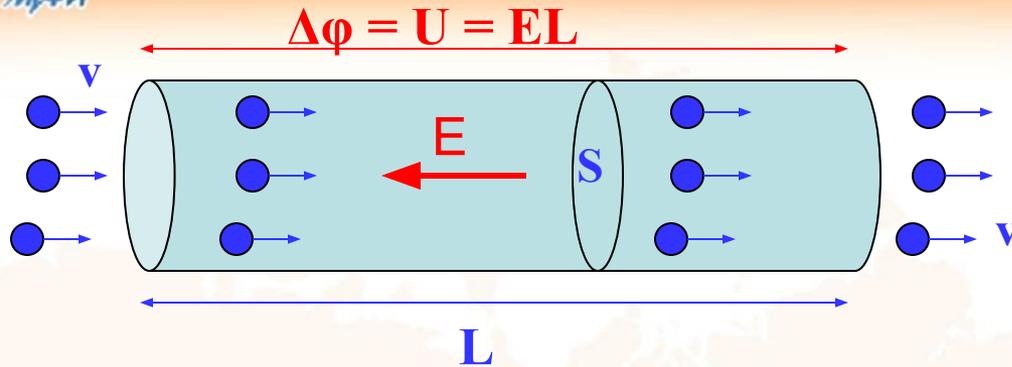
Если носители тока – электроны, то  $\mathbf{j} = -en\mathbf{v}_d$

$$\mathbf{j} = \sum_i q_i n_i \mathbf{v}_{di}$$



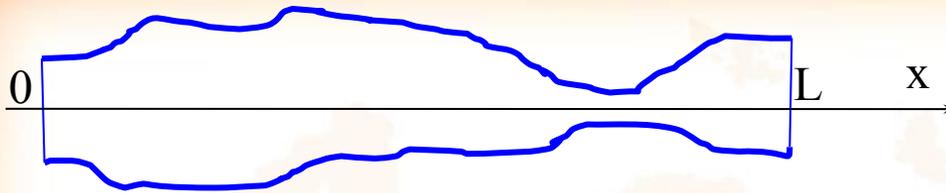
$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad \mathbf{E} = \rho \mathbf{j} \quad \Rightarrow$  закон Ома (опыт.) в локальной форме  
 $\sigma$  - проводимость,  $\rho = 1/\sigma$  - удельное сопротивление вещества

$I = jS = \sigma ES, \quad U = EL \quad \Rightarrow \quad I = U/R$  - закон Ома для  
 проводника с сопротивлением  $R = \rho L/S$



$\mathbf{j} = \sigma(x)\mathbf{E}$      $\mathbf{E} = \rho(x)\mathbf{j}$      $\Rightarrow$  закон Ома в локальной форме  
 $\sigma$  - проводимость,  $\rho = 1/\sigma$  - удельное сопротивление вещества

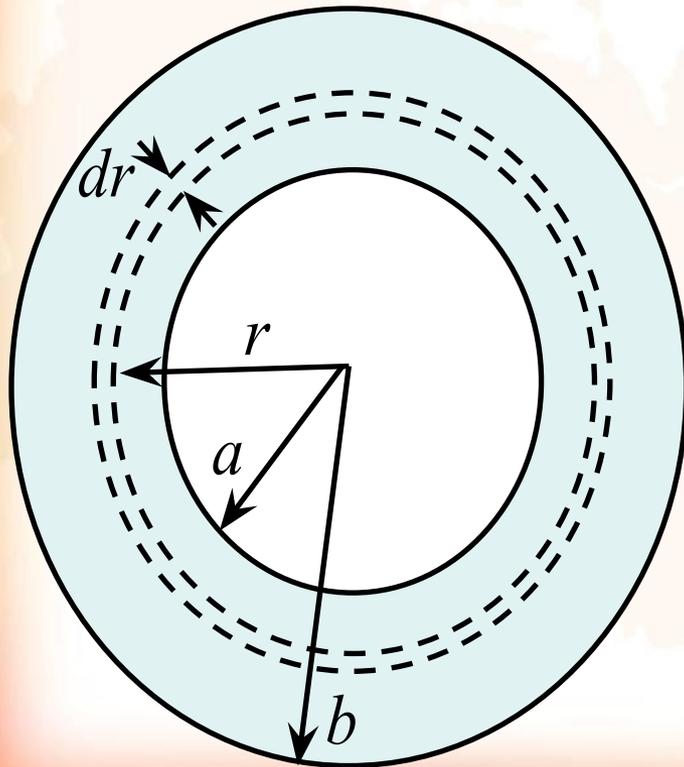
$$R = \int_0^L dx \rho(x)/S$$



$$R = \int dx \rho(x)/S(x)$$

*ПРИМЕР* решения задачи:

Пространство между обкладками сферического конденсатора с радиусами обкладок  $a$  и  $b$  ( $a < b$ ) заполняют однородным проводящим веществом с удельным сопротивлением  $\rho$ . Найти электрическое сопротивление этой системы.



$$R = \rho \frac{l}{S} \Rightarrow dR = \rho \frac{dr}{4\pi r^2}$$

$$R = \rho \int_a^b \frac{dr}{4\pi r^2} = \frac{\rho}{4\pi} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

*ПРИМЕР* решения задачи:



В классической теории электропроводности П. Друде (1900) удельное сопротивление металла примерно равно  $\rho \sim (kTm_e)^{1/2} / e^2 n_e l$ , где  $l$  - длина свободного пробега электрона в металле

## *Проблемы классической теории*

- Теоретическое значение удельной электропроводности  $\rho$  согласуется с экспериментальной величиной, если длина свободного пробега электронов в металле порядка 10 – 100 нм, что намного больше расстояний между атомами.
- Теория предсказывает зависимость удельного сопротивления от температуры  $\rho \sim (T)^{1/2}$ , а на опыте получается зависимость  $\rho \sim T$ .
- На эксперименте не наблюдается заметного вклада свободных электронов в теплоёмкость металла, которая предсказывается классической теорией.
- Классическая теория не предсказывает явления сверхпроводимости



$$\rho = \rho_0(1 + \alpha(T - T_0))$$

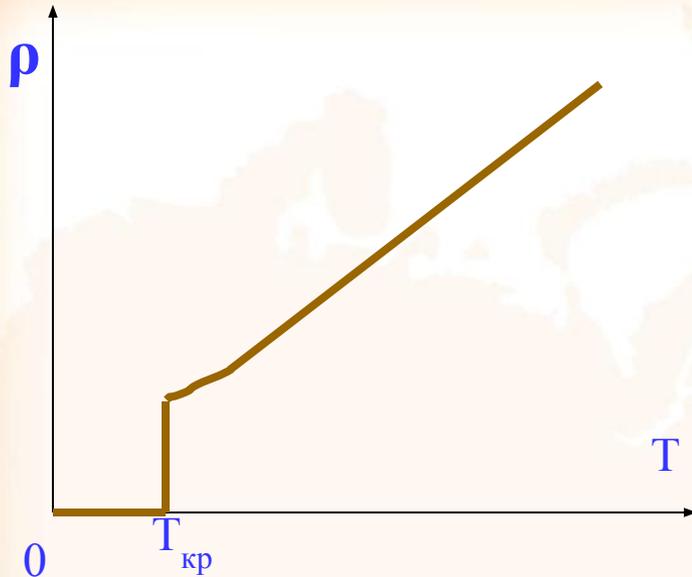
$\alpha$  - температурный коэффициент сопротивления.

В **ЧИСТЫХ МЕТАЛЛАХ**

$$\rho = \rho_0 \alpha T, \quad \alpha \sim 1/273 \text{ K}^{-1}$$

В некоторых сплавах температурный коэффициент сопротивления может быть значительно ниже. Например в **константане**  $\alpha \sim 10^{-5} \text{ K}^{-1}$

В жидких проводниках (**растворы солей и электролитов**) сопротивление с ростом температуры не растет, а падает. Например, для 10% раствора поваренной соли  $\alpha \sim -0,02 \text{ K}^{-1} < 0$

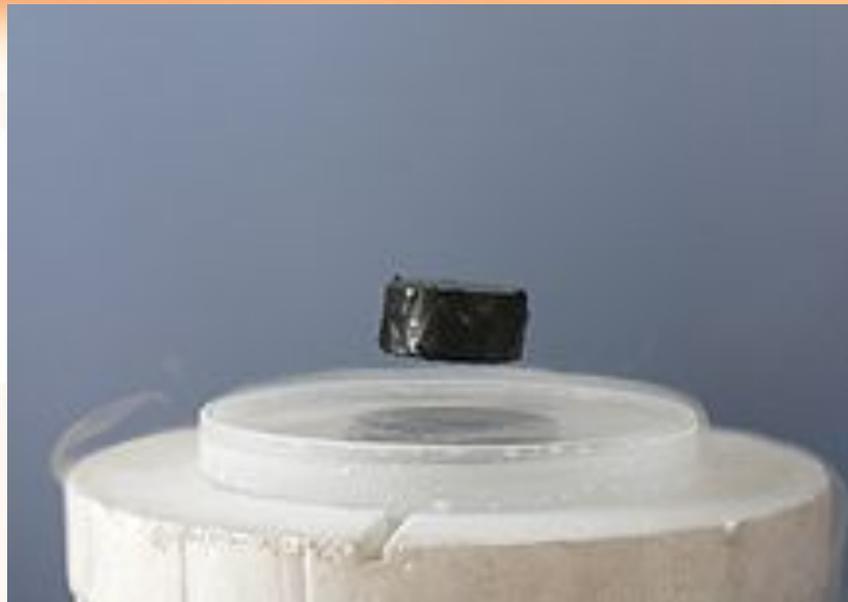
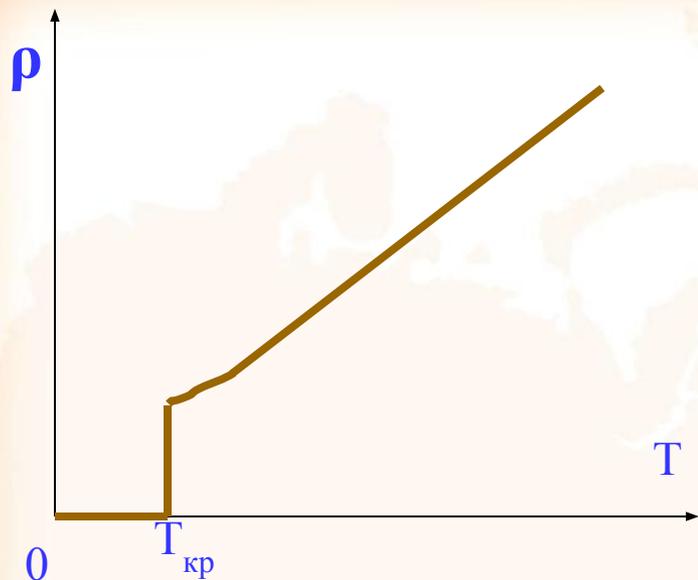


При охлаждении проводников (главным образом металлических) до некоторой критической температуры  $T_{кр}$  их сопротивление падает до нуля.

(Г. Каммерлинг-Оннес, 1911 - экспериментальное открытие, ртуть Hg,  $T_{кр} = 4,1$  К  
Теоретическое объяснение - Дж.Бардин, Л.Купер, Дж. Шриффер, 1957)

Для разных металлов и сплавов величина  $T_{кр}$  может составлять от долей градуса Кельвина (для вольфрама - 0,01 К) до  $\sim 10$  К (сплав никеля и титана).

В 1986 году открыли класс сложных оксидных соединений (т.н. сверхпроводящие керамики, пример -  $YBa_2Cu_3O_7$ ), для которых  $T_{кр}$  может достигать  $\sim 100$  К. (Й. Беднорц, К. Мюллер – Нобелевская премия, 1987)

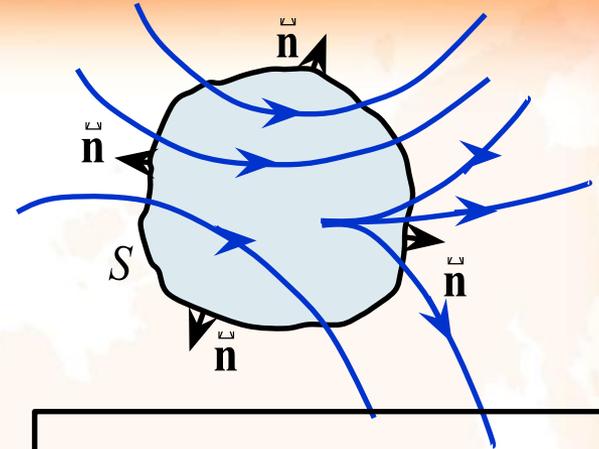


**Не забывайте смотреть курс «Физика в опытах»!**

**Зачет по этому курсу остается необходимым условием допуска к экзамену!**



Уравнение непрерывности – это математическая запись закона сохранения электрического заряда при наличии токов в среде. Сила тока через замкнутую поверхность положительна, если больше заряда «вытекает», чем «втекает»

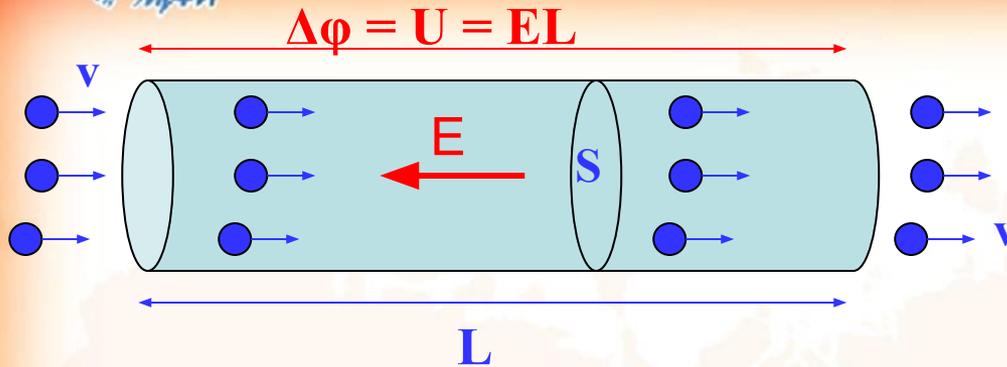


$$\oint_S \vec{j} d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad \oint_S \vec{j} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Если ток (и плотность заряда) не зависят от времени, то

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0$$



$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad \mathbf{E} = \rho \mathbf{j} \quad \Rightarrow$$

закон Ома в локальной форме

$\sigma$  - проводимость,  $\rho = 1/\sigma$  - удельное сопротивление вещества

$P_l = dA/dt = Fv = qEv$  - мощность производимой полем

механической работы по перемещению заряда  $q$  со скоростью  $v$

Мощность электрической силы, действующей на все подвижные заряды в единице объёма:  $P = nP_d = nq\mathbf{E}\mathbf{v}$

$$\mathbf{j} = qn\mathbf{v}_d \Rightarrow \boxed{P = \mathbf{j}\mathbf{E}} \quad \mathbf{E} = \rho \mathbf{j} \Rightarrow \boxed{P = \rho j^2}$$

- закон Джоуля - Ленца в локальной форме.  $P$  [Вт/м<sup>3</sup>].

Если ток (скорость дрейфа) не меняется, а работа производится

$$P = dQ_{y\partial} / dt = \text{удельная мощность тепловыделения}$$



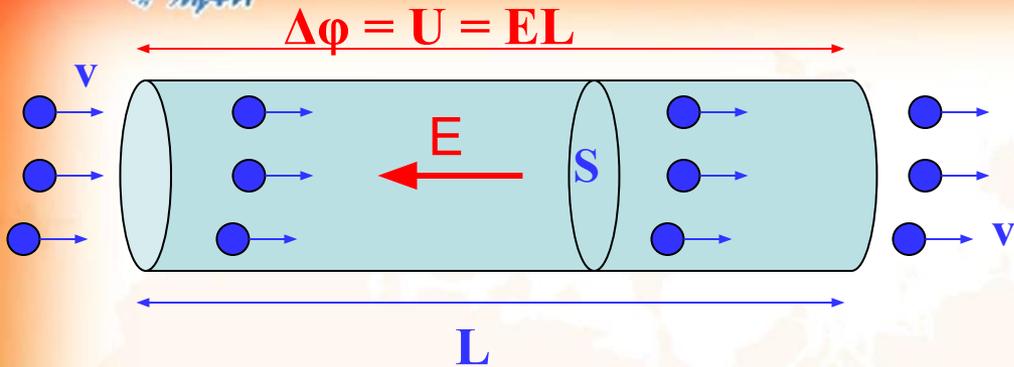
# Закон Джоуля - Ленца



$$Q_{\text{уд}} = \rho j^2 \quad \frac{dQ}{dt} = Q_{\text{уд}} V = \rho j^2 l S = \rho \frac{I^2}{S^2} l S = \frac{\rho l}{S} I^2 = RI^2$$

$$\Rightarrow Q = \int_0^t RI^2 dt$$

Закон Джоуля – Ленца (1841)

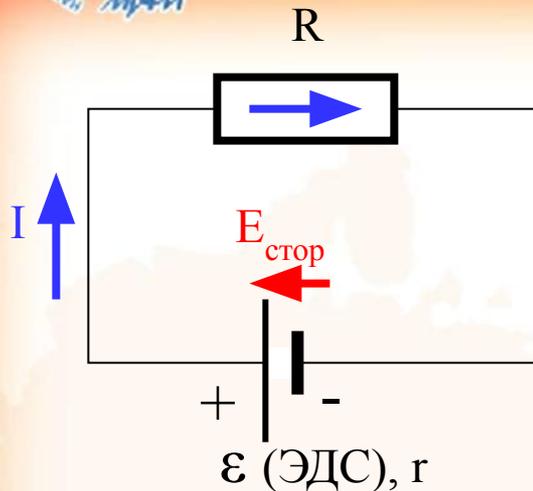


Обозначение проводника с сопротивлением  $R$  (резистора) на электрических[ схемах

$I = jS = \sigma ES$ ,  $U = EL \Rightarrow I = U/R$  - закон Ома для проводника с сопротивлением  $R = \rho L/S$

$dQ/dt = RI^2 = UI = U^2/R$  - закон Джоуля-Ленца для проводника с сопротивлением  $R$

$$\Rightarrow Q = \int_0^t RI^2 dt$$

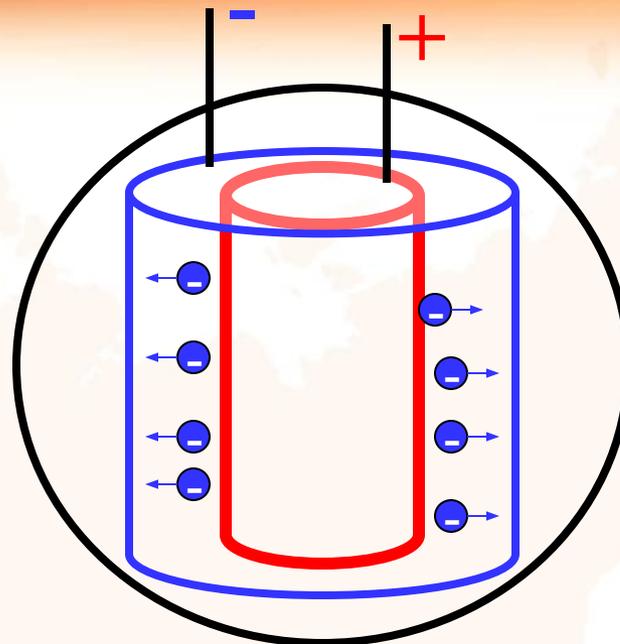
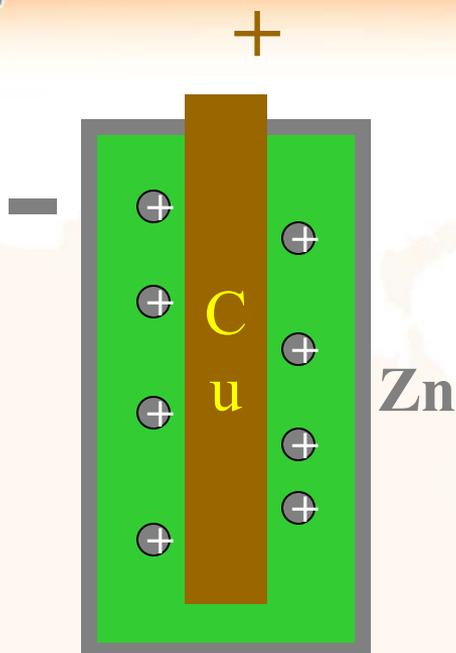


Силы *НЕ* электростатической природы, действующие на заряды в электрической цепи, называются **сторонними силами**.

На рисунке – обозначение на схеме элемента создающего электродвижущую стороннюю силу (ЭДС)

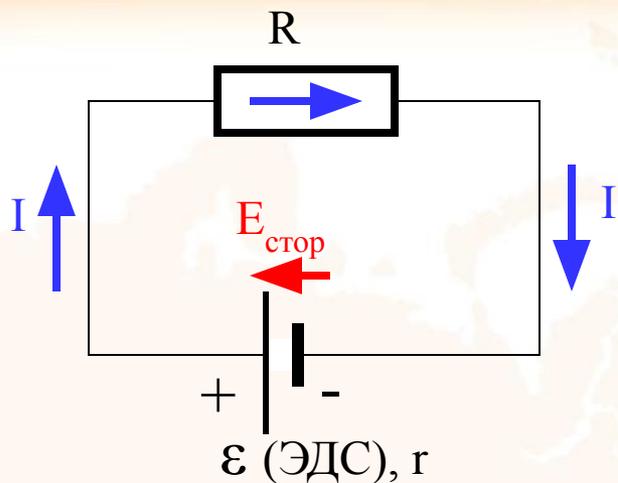
ЭДС на данном участке цепи называется работа сторонних сил по перемещению заряда, отнесённая к величине этого заряда.

$$\mathcal{E} = \frac{A_{\text{стор}}}{q} \quad \text{В} = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}}$$



**Источник тока** - устройство, перегоняющее заряды против действия электрического поля с помощью **сторонних сил**.

Сторонние силы могут иметь разную природу: электромагнитную (генераторы), химическую (аккумуляторы, батарейки), тепловую и др. - только не электростатическую!



Любой источник тока обладает внутренним сопротивлением  $r$ , также уменьшающем силу тока во внешней цепи.

$$I = \varepsilon / (R + r)$$

**Закон Ома для замкнутой (полной) цепи:** сила тока в полной цепи равна отношению ЭДС цепи к ее полному сопротивлению.



**Спасибо за внимание!**

**Следующая лекция  
20 октября**