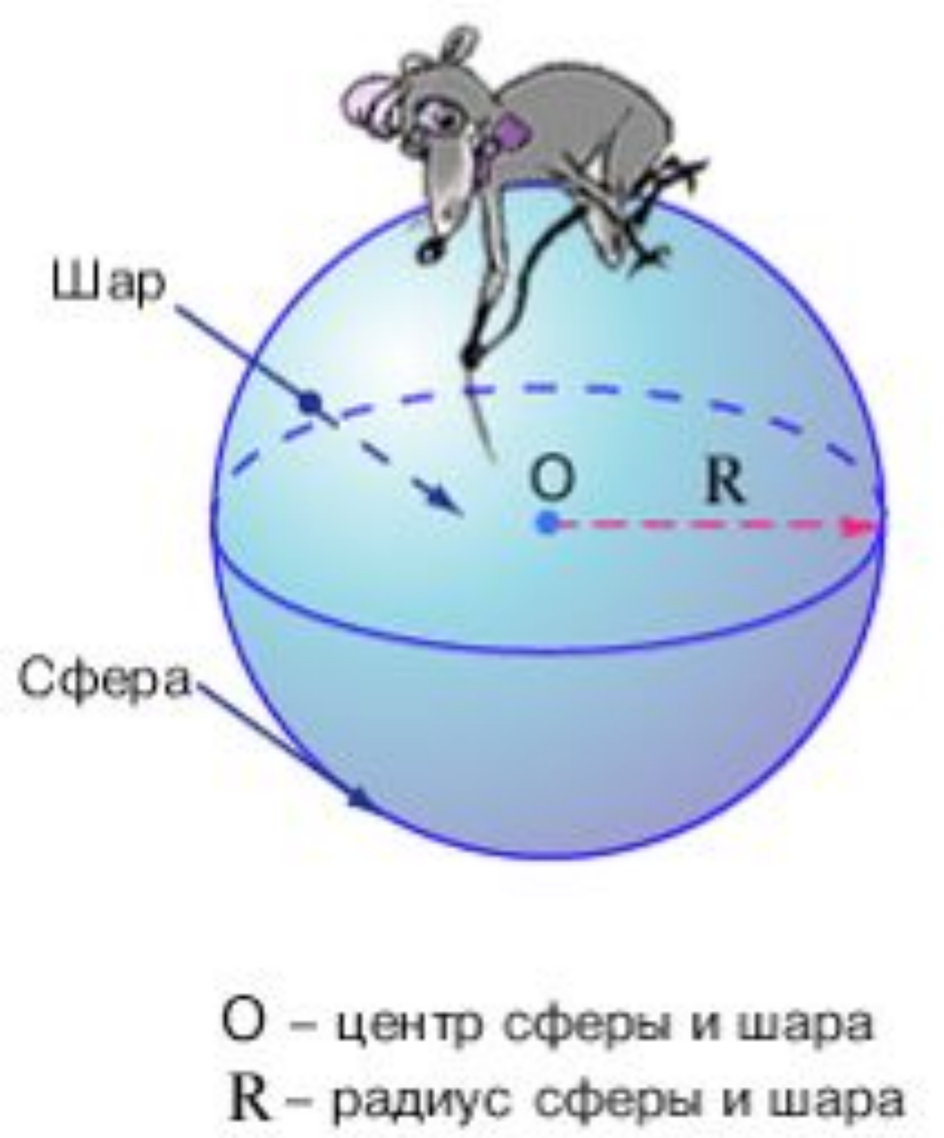
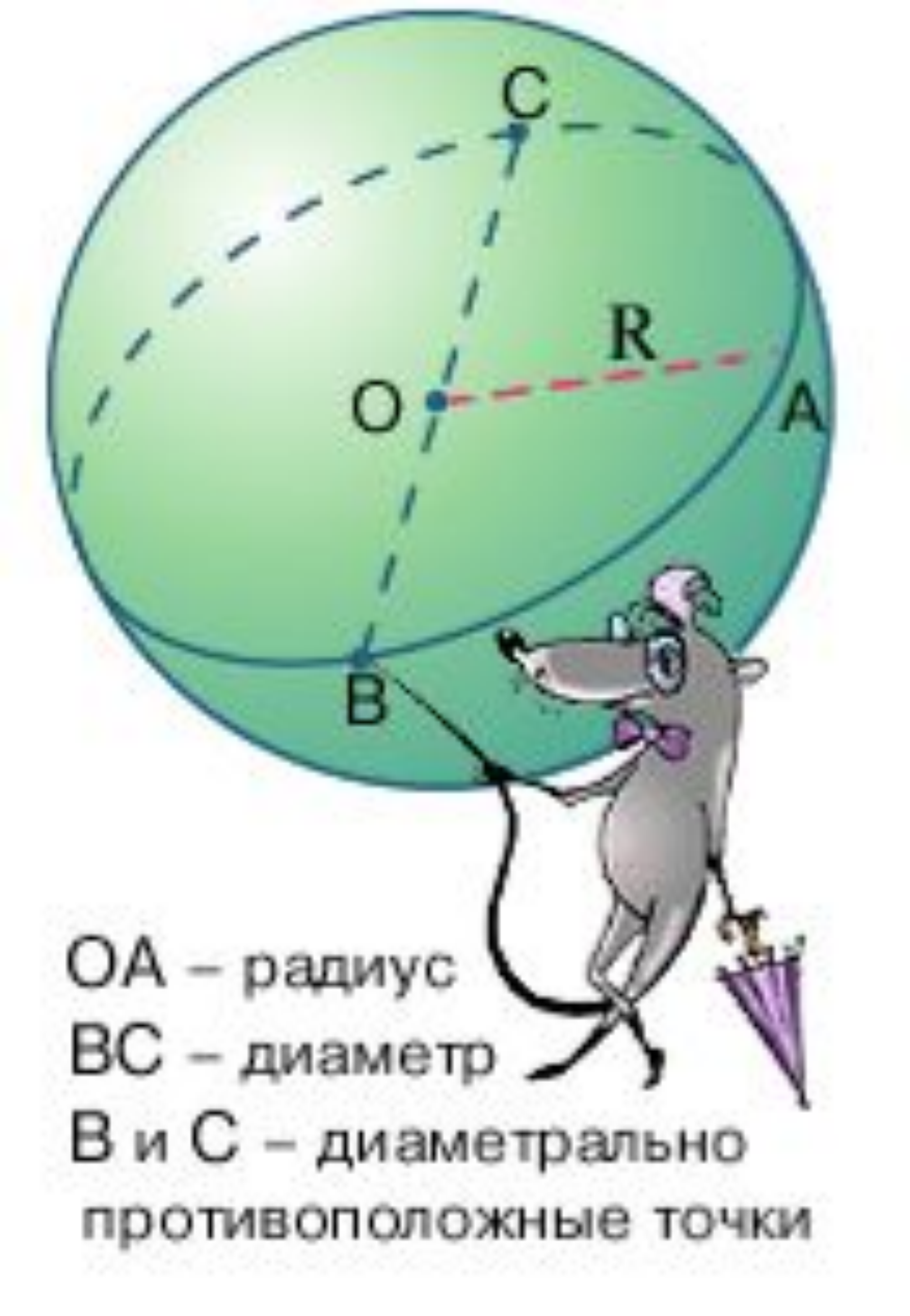
15.11.2021г.

Шар и сфера, их сечения. Касательная плоскость к сфере.



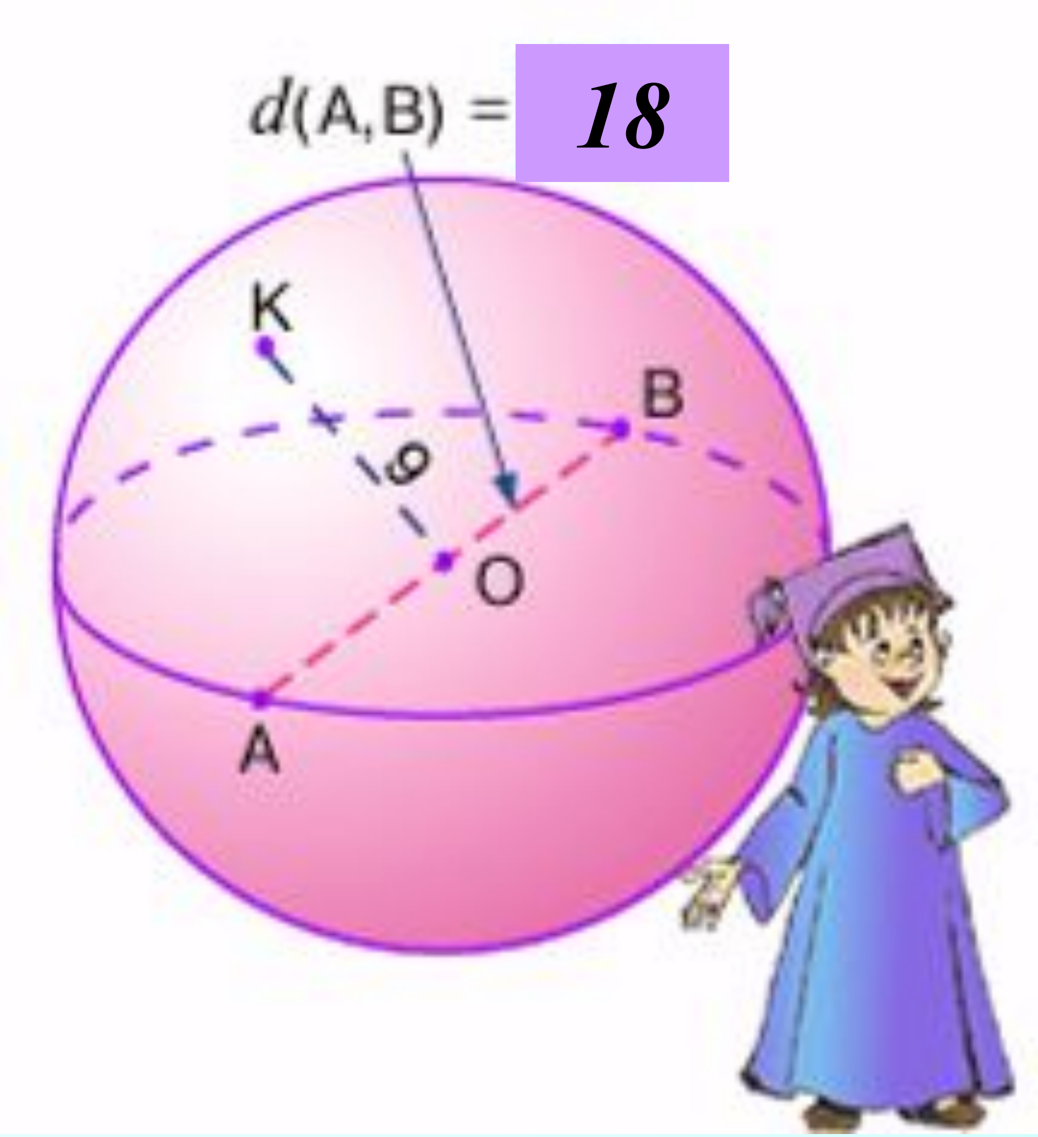
Сферой называется поверхность, которая состоит из всех точек пространства, находящихся на заданном расстоянии от данной точки. Эта точка называется **центром**, а заданное расстояние – **радиусом** сферы, или шара – тела, ограниченного сферой. **Шар** состоит из всех точек пространства, находящихся на расстоянии не более заданного от данной точки.

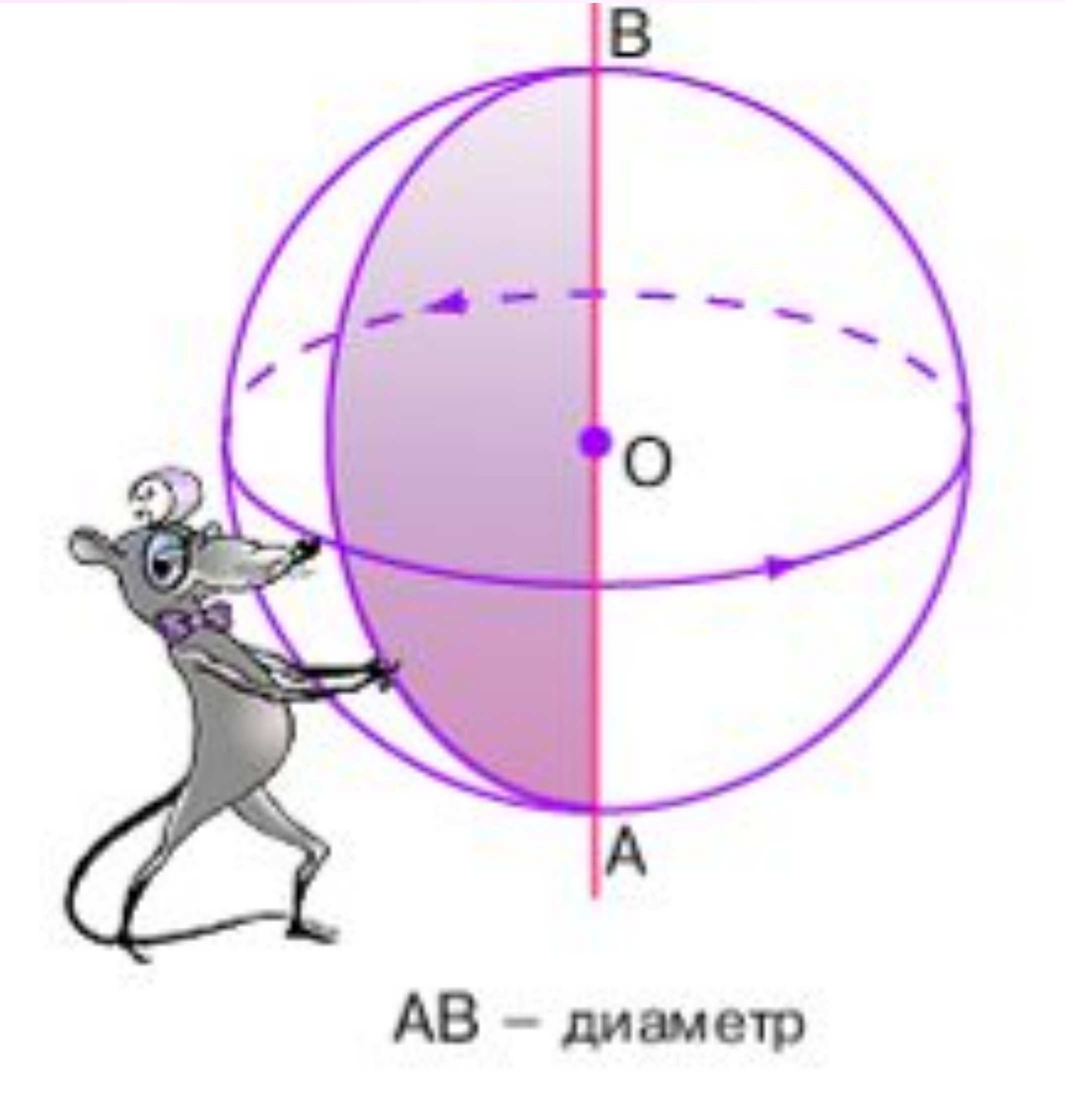


Отрезок, соединяющий центр шара с точкой на его поверхности, называется радиусом шара. Отрезок, соединяющий две точки на поверхности шара и проходящий через центр, называется диаметром шара, а концы этого отрезка – диаметрально противоположными точками шара.

?

Чему равно расстояние между диаметрально противоположными точками шара, если известна удаленность точки, лежащей на поверхности шара от центра?

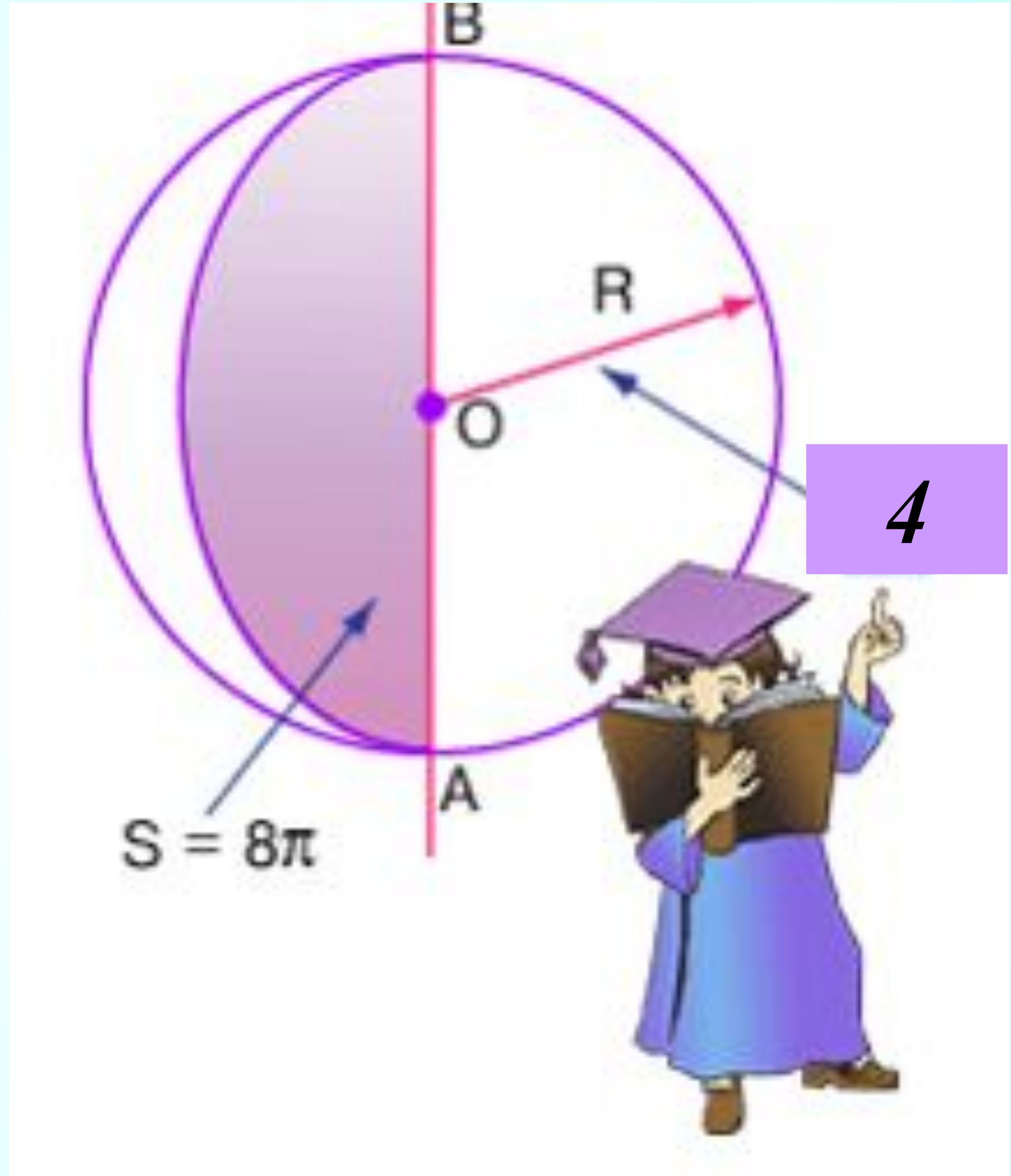




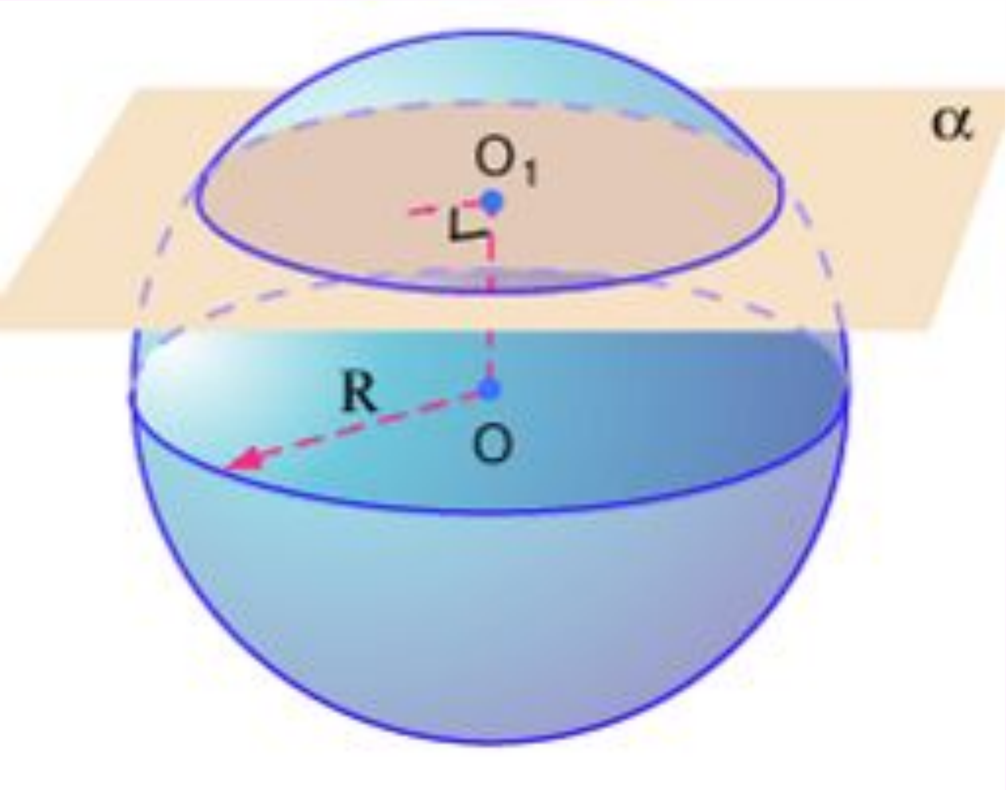
Шар можно рассматривать как тело, полученное от вращения полукруга вокруг диаметра как оси.

?

Пусть известна площадь полукруга. Найдите радиус шара, который получается вращением этого полукруга вокруг диаметра.



Теорема. ***Любое сечение шара плоскостью есть круг. Перпендикуляр, опущенный из центра шара на секущую плоскость, попадает в центр этого круга.***



Дано:

$шар\,(O, R)$

α – *секущая плоскость*

$OO_1 \perp \alpha$

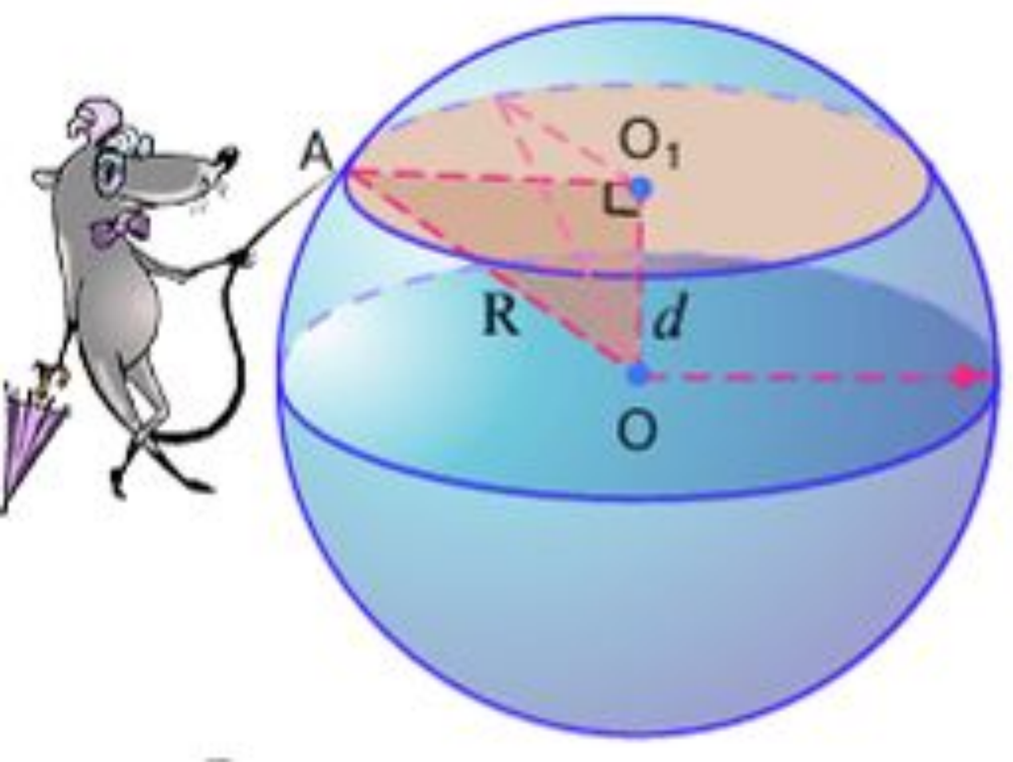
Доказать:

сечение – круг

O_1 – *центр круга*

Доказательство:

Рассмотрим прямоугольный треугольник, вершинами которого являются центр шара, основание перпендикуляра, опущенного из центра на плоскость, и произвольная точка сечения.



$$OA = R \qquad OO_1 = d$$

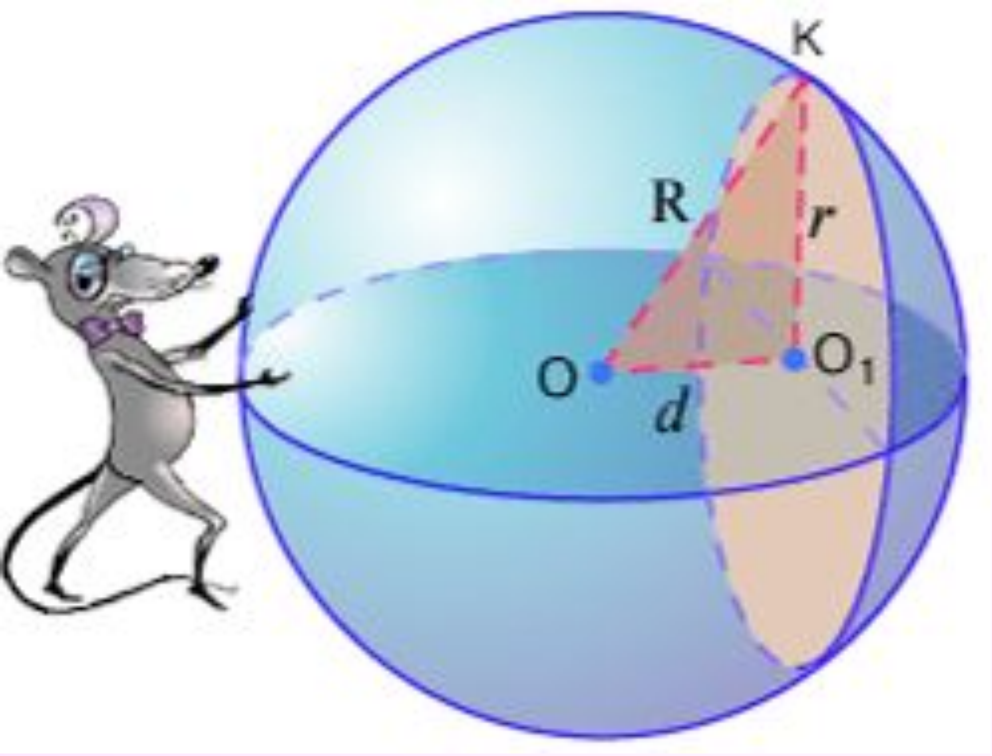
$$AO^2 = OO_1^{\,2} + AO_1^{\,2}$$

$$R^2 = d^2 + AO_1^2$$

$$AO_1 = \sqrt{R^2 - d^2}$$

$$AO_1 = const$$

Следствие. ***Если известны радиус шара и расстояние от центра шара до плоскости сечения, то радиус сечения вычисляется по теореме Пифагора.***



$$O_1K^2 + d^2 = R^2$$

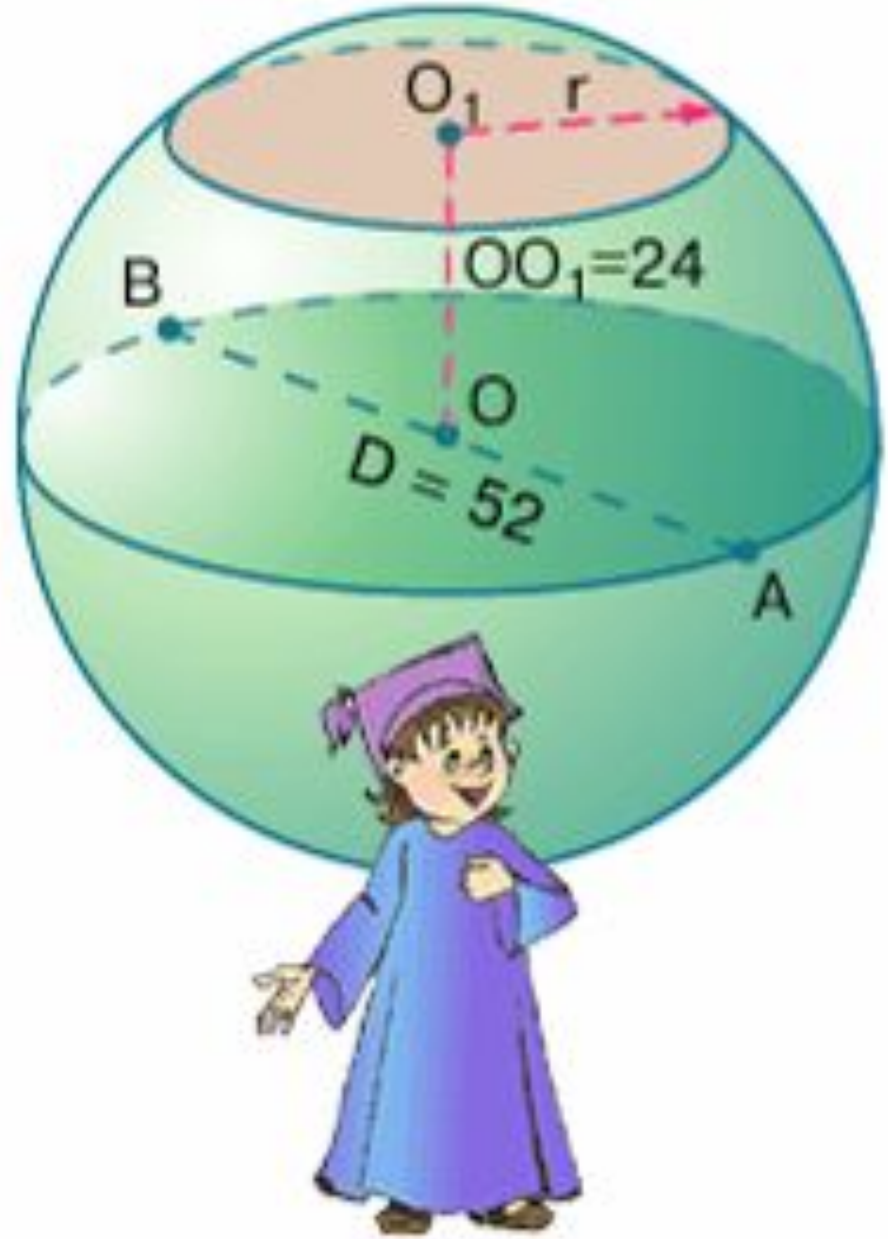
$$O_1K = \sqrt{R^2 - d^2} = r$$

r – радиус сечения

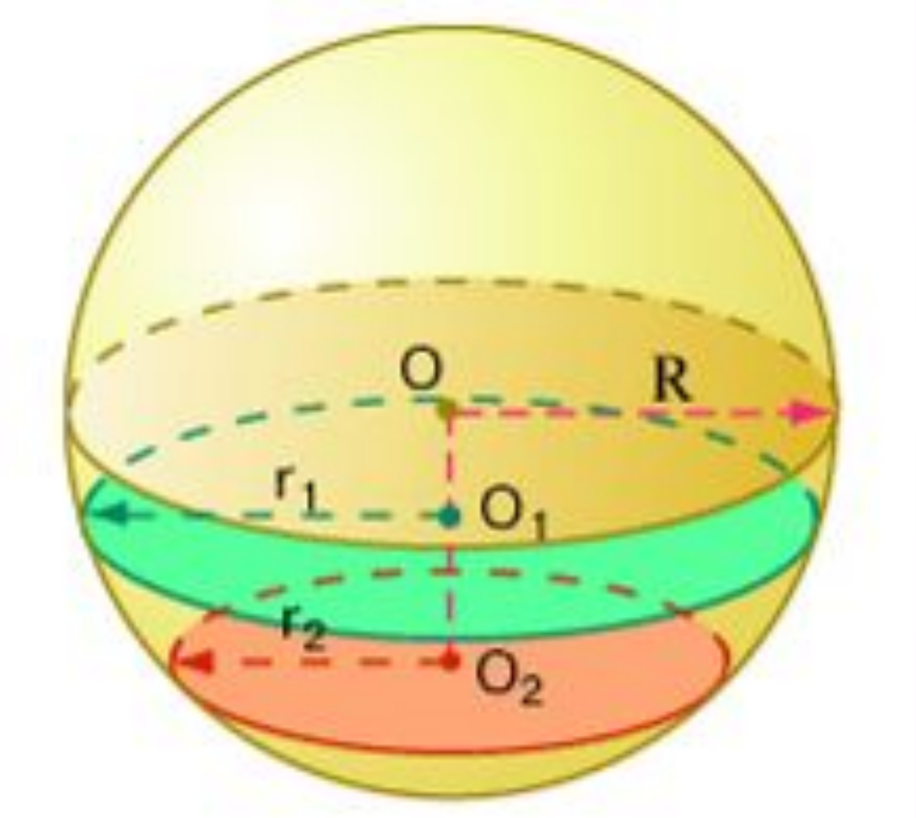
?

Пусть известны диаметр шара и расстояние от центра шара до секущей плоскости. Найдите радиус круга, получившегося сечения.

r = 10



Чем меньше расстояние от центра шара до плоскости, тем больше радиус сечения.

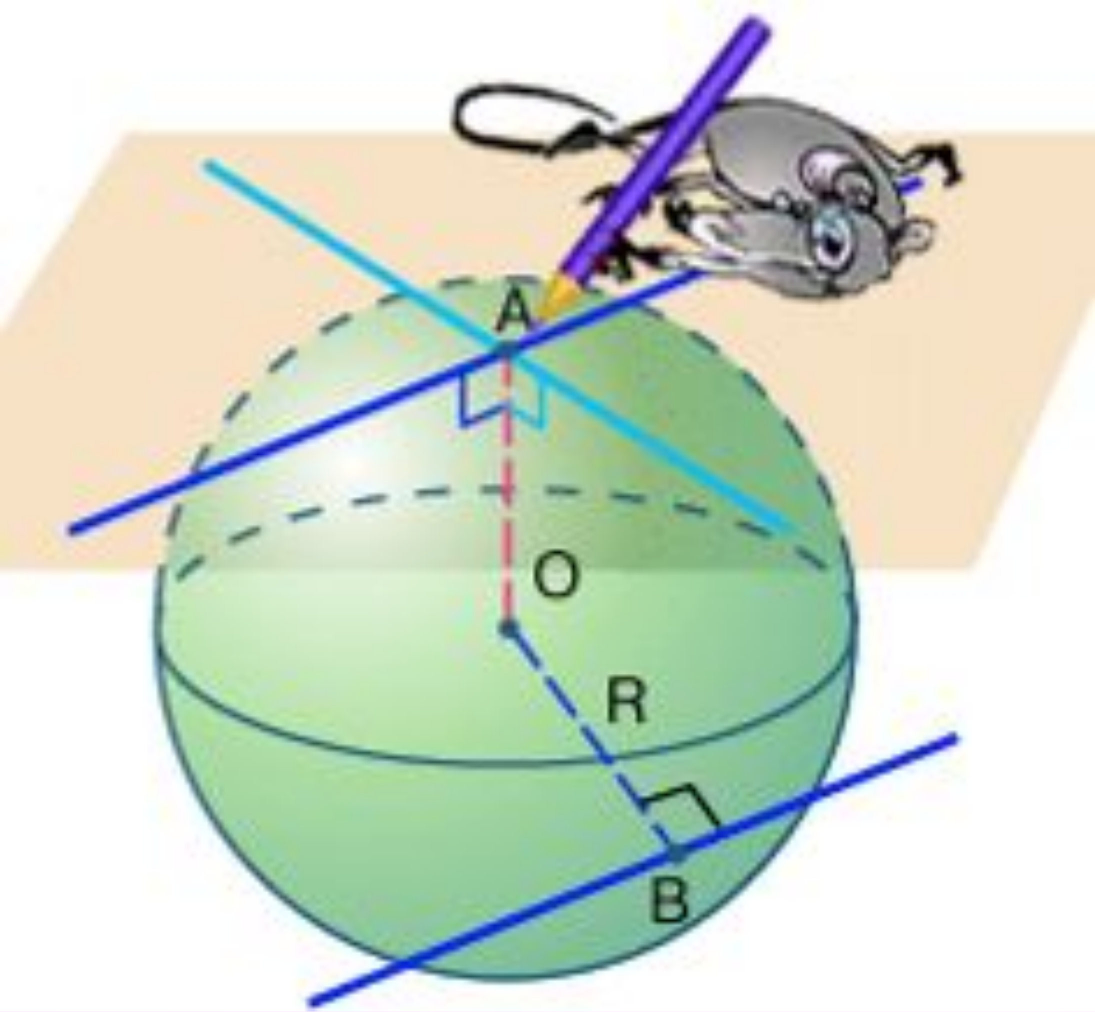


$$r = \sqrt{R^2 - d^2}$$

$$d_1 = OO_1$$

$$d_2 = OO_2$$

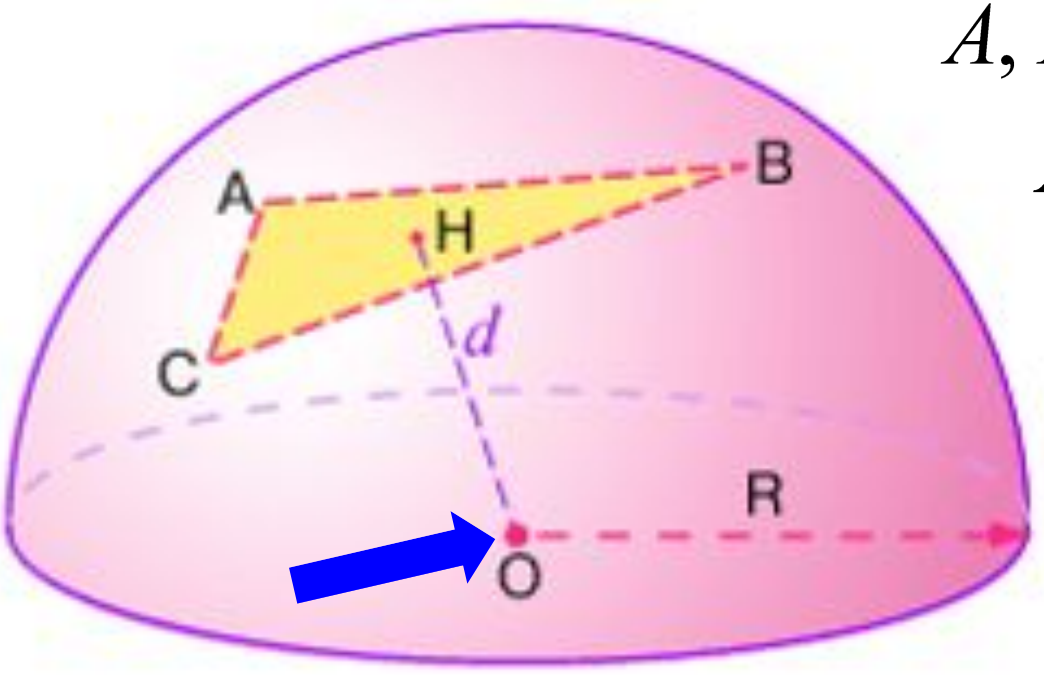
$$r_1 > r_2 \Rightarrow d_1 < d_2$$



Прямая называется касательной, если она имеет со сферой ровно одну общую точку. Такая прямая перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания. Через любую точку сферы можно провести бесчисленное множество касательных прямых.

Задача.

На сфере радиуса **R** взяты три точки, являющиеся вершинами правильного треугольника со стороной *a*. На каком расстоянии от центра сферы расположена плоскость, проходящая через эти три точки?



Дано:

$$\text{сфера}\,(O,R)$$

$$A, B, C - \text{точки на сфере}$$

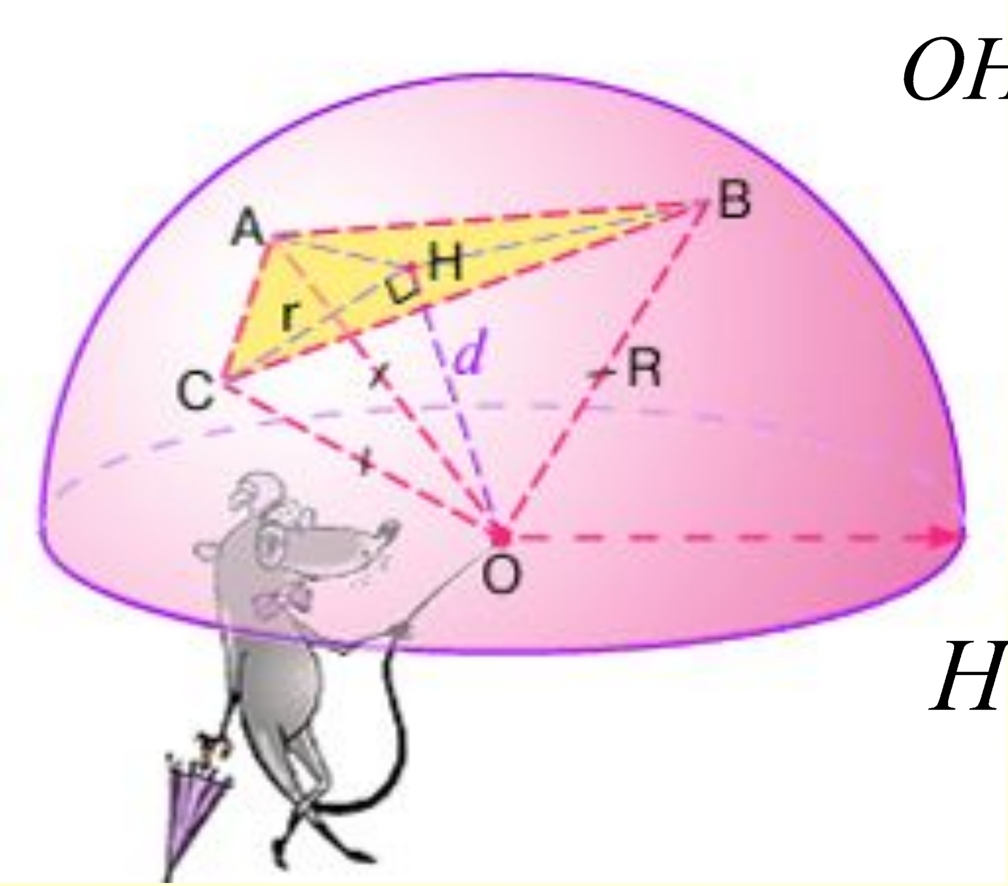
$$AB = BC = AC = a$$

Найти:

$$d(O,(ABC))$$

Решение:

Рассмотрим пирамиду с вершиной в центре шара и основанием – данным треугольником.



OH – *высота пирамиды*

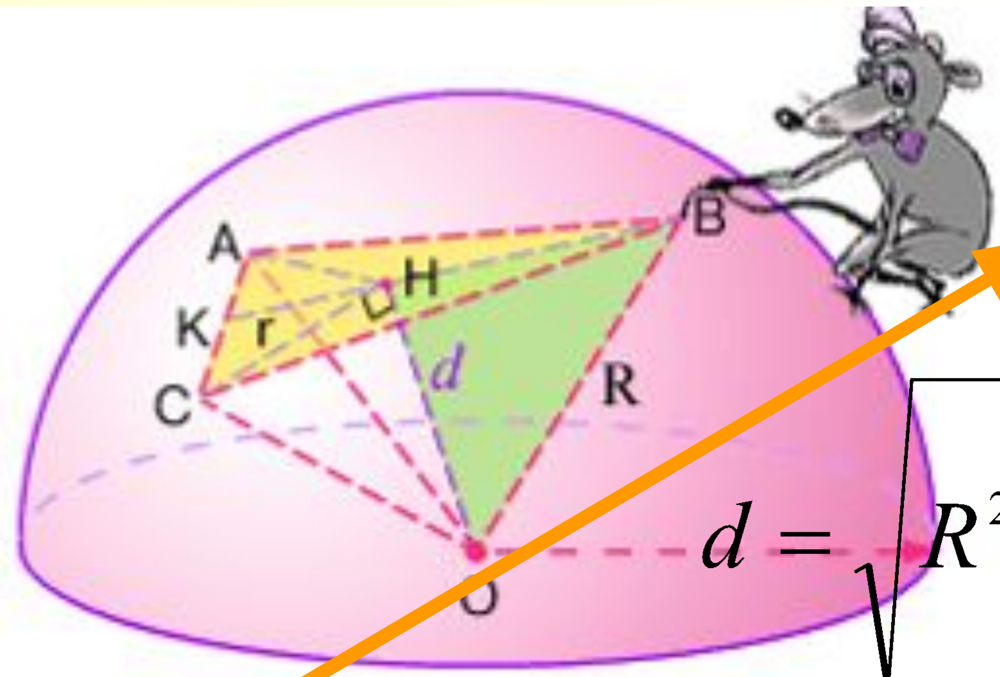
$$OA = OB = OC = R$$

H – *центр описанной окружности*

Решение:

Найдем радиус описанной окружности, а затем рассмотрим один из треугольников, образованных радиусом, боковым ребром пирамиды и высотой,. Найдем высоту по теореме Пифагора.

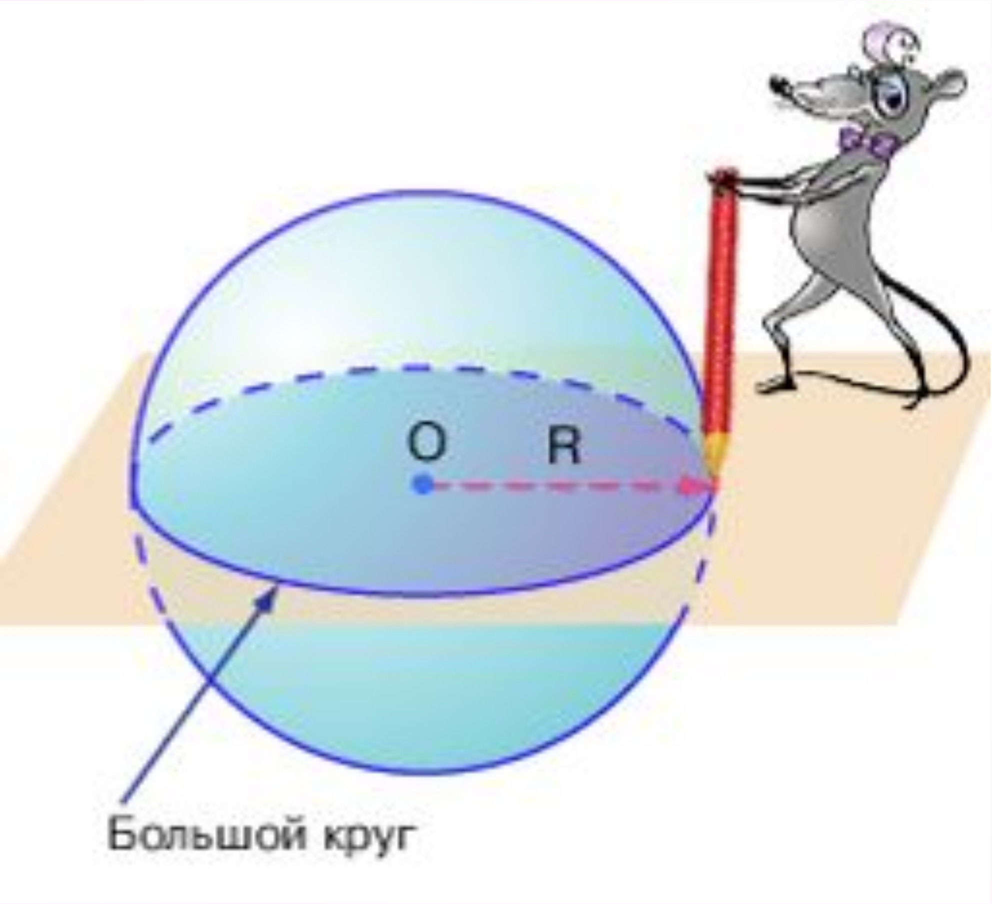
$BK - \text{высота в } \Delta ABC, \qquad BK = \frac{\sqrt{3}}{2}a$



$$r = \frac{2}{3}BK = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

$$d = \sqrt{R^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{3}}$$

$r - \text{радиус описанной окр.}$

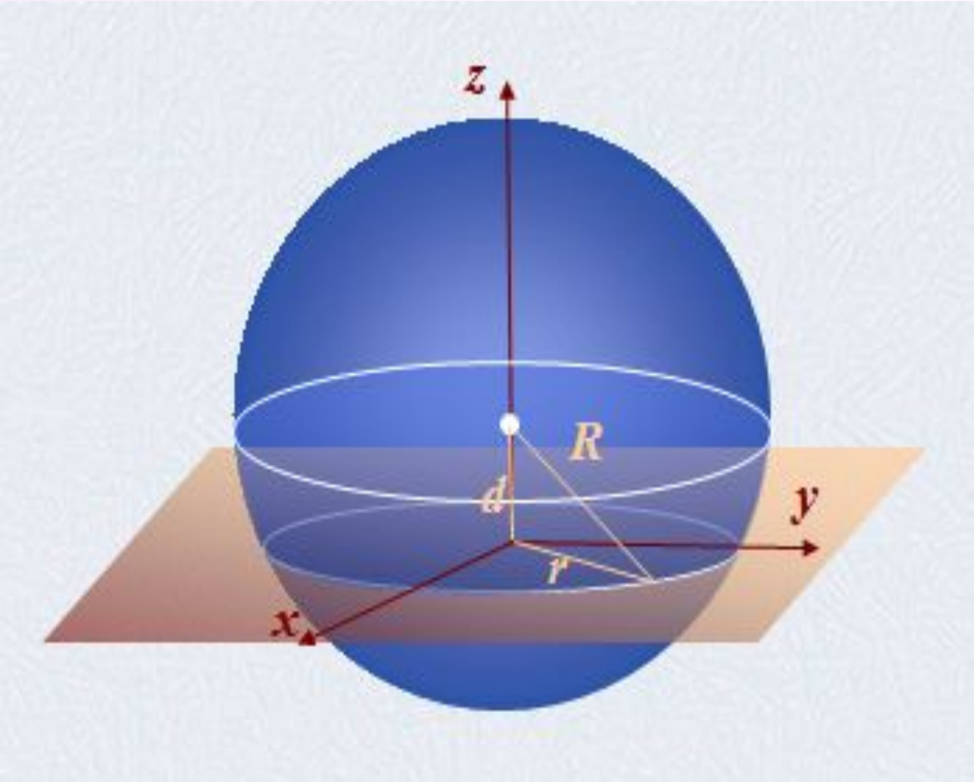


Наибольший радиус сечения получается, когда плоскость проходит через центр шара. Круг, получаемый в этом случае, называется большим кругом. Большой круг делит шар на два полушара.

Теорема: Площадь поверхности шара равна четыре площади большого круга шара

$$S = 4\pi R.^2$$

Взаимное расположение сферы и плоскости



d – расстояние от центра сферы до плоскости, R – радиус сферы

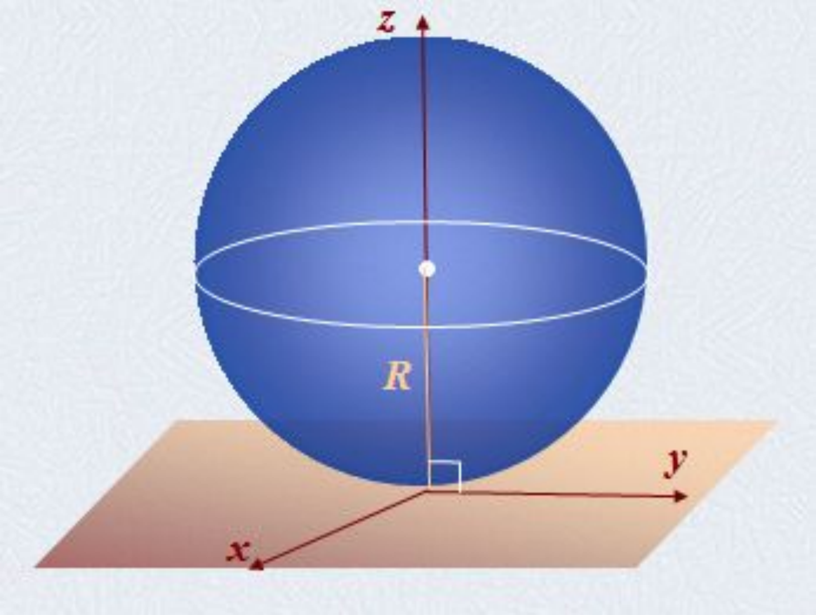
r – радиус сечения сферы

Вычислить радиус сечения можно используя теорему Пифагора.

$$r = \sqrt{R^2 - d^2}$$

d<R

*Плоскость пересекает сферу и называется **секущей***

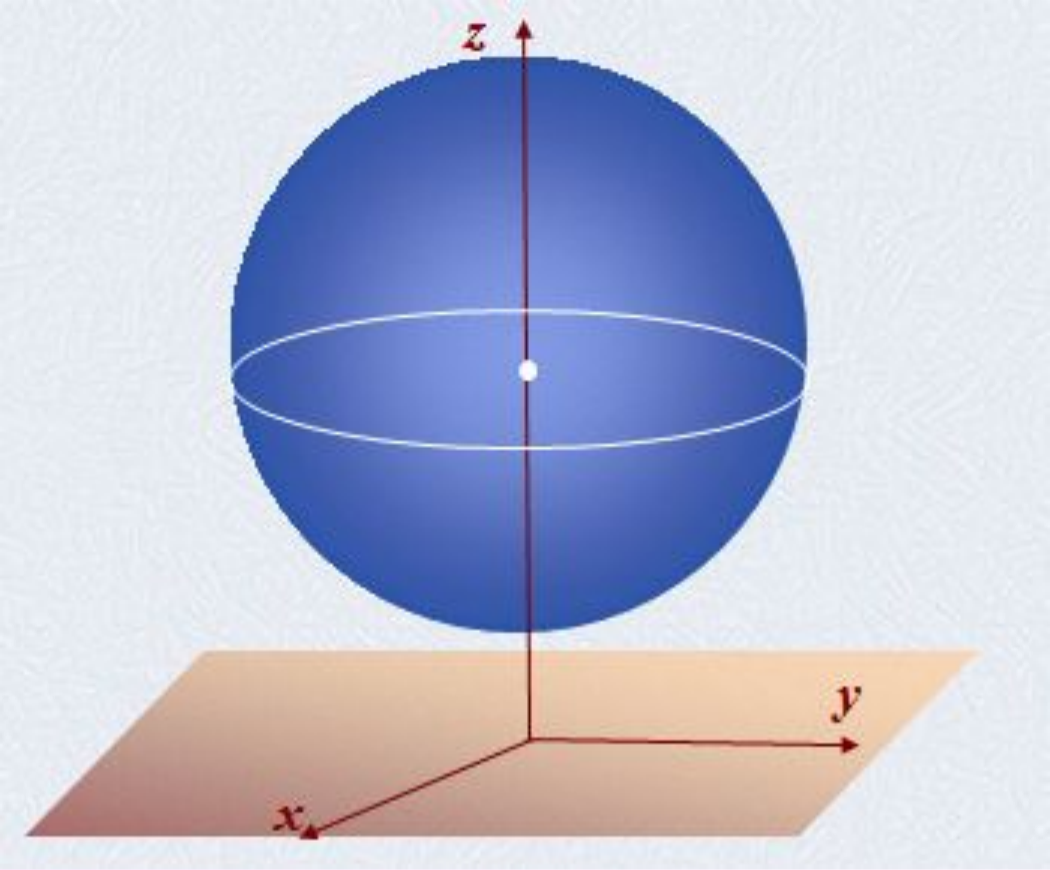


d – расстояние от центра сферы до плоскости, R – радиус сферы

Теорема: ***Радиус сферы проведенный в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен к касательной плоскости.***

d = R

Плоскость имеет одну общую точку со сферой и называется ***касательной***

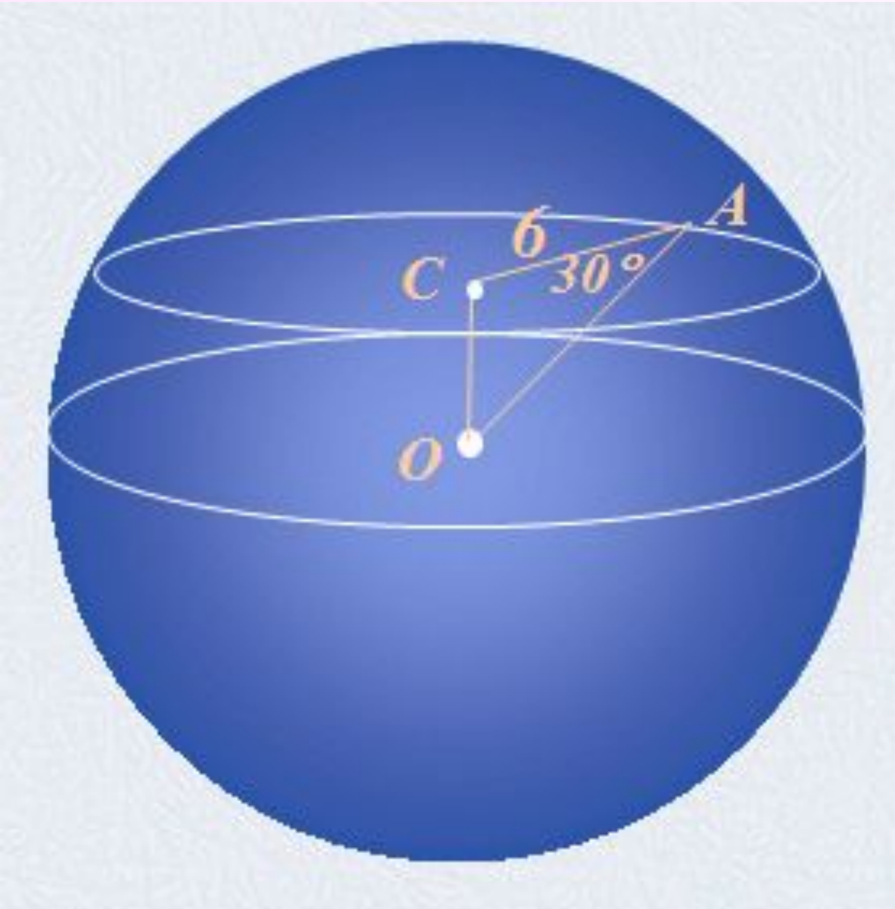


d – расстояние от центра сферы до плоскости, R – радиус сферы

d>R

Плоскость не имеет общих точек со сферой.

$$R^2 - d^2 < 0$$



S =4πR²

R = OA,

Найдем OA из ΔACO.

$$\cos A = \frac{CA}{OA} \quad \Rightarrow OA = \frac{CA}{\cos A}$$

$$OA = \frac{6}{\cos 30^\circ} = 6 : \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

$$S = 4\pi \cdot (4\sqrt{3})^2 = 192\pi$$

Ответ: $S = 192\pi$ ед²

Написать конспект и задачи, выполняя чертежи.

Высылать в личном сообщении в вк или на почту SHPAK.IRINA.S@yandex.ru

Перед каждым заданием в тетради пишем ФИО, дата, тема урока