Лекция 24.

# Механические и электромагнитные колебания

Учебник:

*Трофимова Т.И.* Курс физики : учеб. пособ. для вузов / Т. И. Трофимова. - М.: Академия, 2007.- с. **253-268**.

**к.ф.-м.н.**
**Курочкин А.**

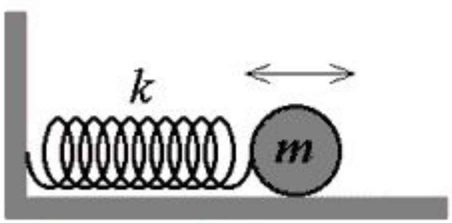
# Общие сведения

**Колебание** – процесс любой физической природы, характеризующийся **повторяемостью** во времени.

**Колебания** различают:

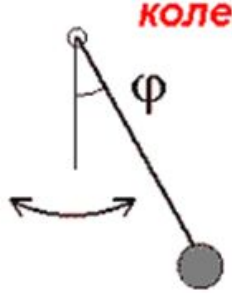
**1) по физике процесса**

**механические**

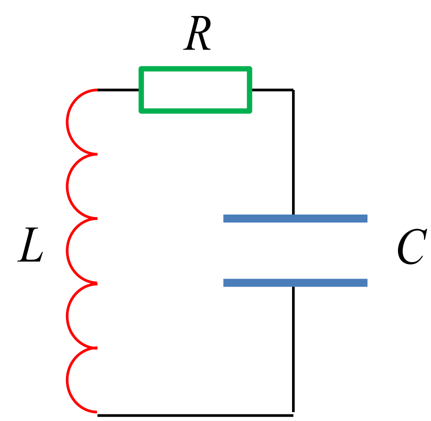



Пружинный маятник

Маятник: колебания




**электромагнитные**




**Колебательный контур**

2) по степени связи колеблющейся системы с окружающими телами

свободные

вынужденные

3) по характеру внутренних взаимодействий в системе

незатухающие

затухающие

4) по математическому виду зависимости возмущения от времени

гармонические

негармонические

**Период колебания *T*** [с] – временной интервал, в течение которого совершается одно полное колебание.

**Периодическое колебание** – колебание, период которого постоянен.

**Частота колебания *ν*** [Гц=1/с] – число колебаний, совершаемых за единицу времени:

$$\boxed{\nu = \frac{1}{T}.}$$

**Амплитуда** – величина наибольшего отклонения системы от положения равновесия.

# СВОБОДНЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

**Свободные (собственные) колебания** – колебания происходящие в системе, предоставленной самой себе после того, как она была выведена из положения равновесия.

**Гармонические колебания** – периодическое изменение физической величины во времени, протекающее по закону **синуса** или **косинуса**.

**Гармонические колебания** величины $x$ описываются уравнением вида:

$$x = A\cos\left(\omega_0 t + \varphi\right),$$

- $A$ – **амплитуда колебания.**
- $\omega_0$ – **циклическая частота**. [*рад/с=1/с*]
- $(\omega_0 t+\varphi)$ – **фаза гармонического колебания** – определяет смещение колеблющейся величины от положения равновесия в данный момент времени $t$. [*рад (радианы)*]
- $\varphi$ – **начальная фаза** – определяет смещение колеблющейся величины от положения равновесия в начальный момент времени $t=0$. [*рад (радианы)*]

Значение **начальной фазы** определяется выбором **начала отсчёта времени**.

**Циклическая частота** $\omega_0$ связана с **частотой** $\nu$ соотношением:

$$\boxed{\omega_0 = 2\pi\nu.}$$

**Циклическая частота** $\omega_0$ связана с **периодом** $T$ соотношением:

$$\boxed{T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega_0}.}$$

Для колеблющейся м.т.
**кинематическое уравнение**
описывает **зависимость координаты от времени**:

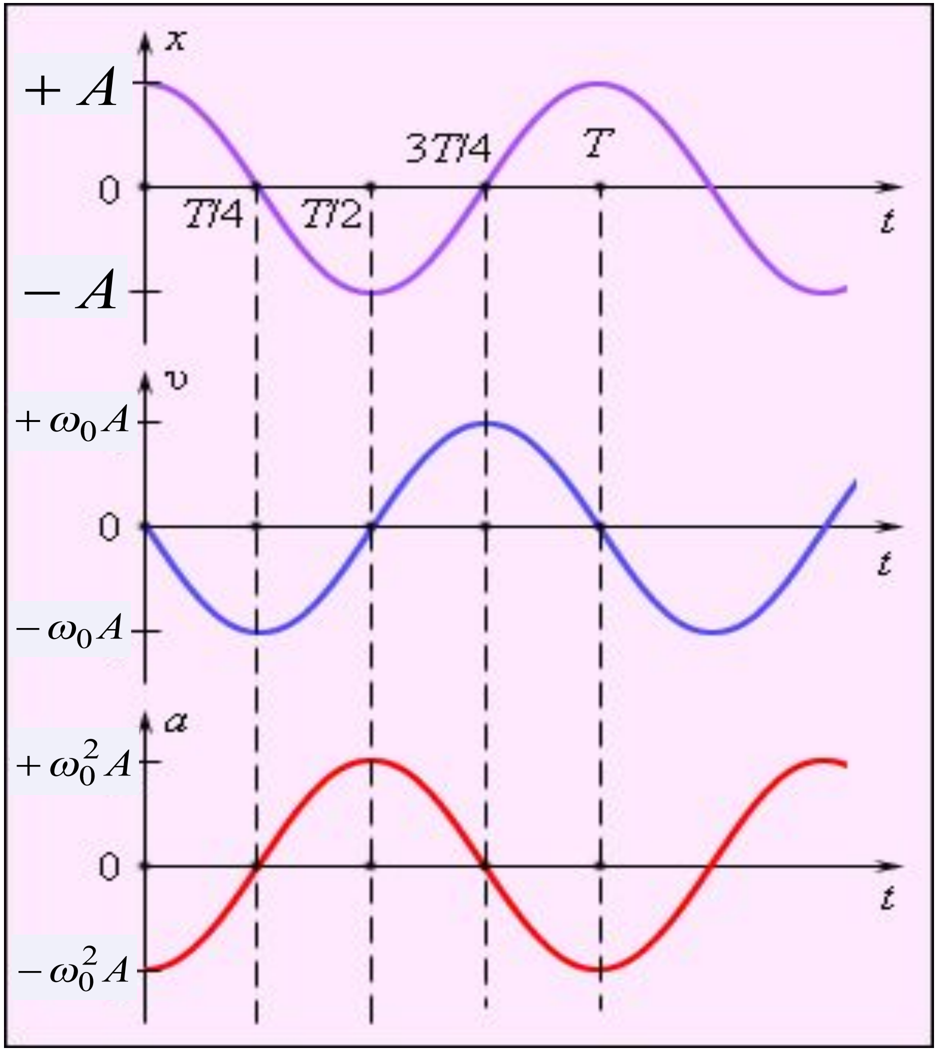
$$x = A\cos\left(\omega_0 t + \varphi\right),$$

**скорость**

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = -\omega_0 A \sin\left(\omega_0 t + \varphi\right),$$

**ускорение**

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\upsilon}{dt} = -\omega_0^2 \underbrace{A\cos\left(\omega_0 t + \varphi\right)}_{x} = -\omega_0^2 x.$$

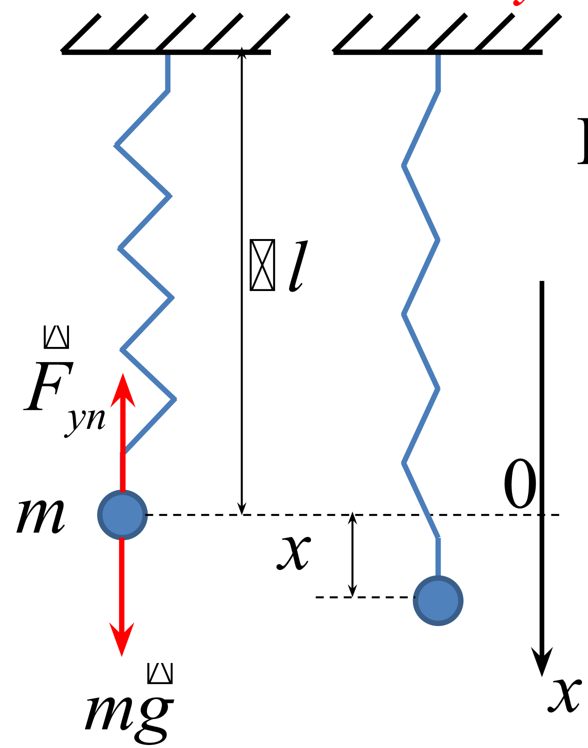


# 1. Пружинный маятник

Это груз массой $m$, подвешенный на абсолютно упругой пружине и совершающий **гармонические колебания** под действием **упругой силы**.

Рассмотрим систему, состоящую из шарика массы $\boldsymbol{m}$, подвешенного на пружине, массой которой можно пренебречь по сравнению с $\boldsymbol{m}$ .

В положении равновесия сила $\boldsymbol{mg}$ уравновешивается упругой силой $\boldsymbol{F_{уп}}$ .




Проекция результирующий силы на ось $x$:

$$F_x = mg - k\left(\Delta l + x\right),$$

$$F_x = k\Delta l - k\left(\Delta l + x\right) =$$

$$= k\Delta l - k\Delta l - kx = -kx$$

$$F_{уп} = mg$$

$$k\Delta l = mg$$

где $\Delta l$, $k$ – удлинение и жёсткость пружины.

Уравнение второго закона Ньютона для шарика имеет вид:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \Big| \div m \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Пружинный маятник совершает гармонические колебания с **циклической частотой** и **периодом**

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.} \qquad \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.}$$

Уравнение движения маятника в отсутствие сил трения описывается дифференциальным уравнением:

$$\boxed{\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

**Решением** этого уравнения является уравнение

$$\boxed{x = A\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right)}$$

**Гармонический осциллятор** – систем, совершающая колебания, описываемые уравнением вида

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

**Потенциальная энергия** м.т., совершающей **гармонические колебания** в поле упругих сил

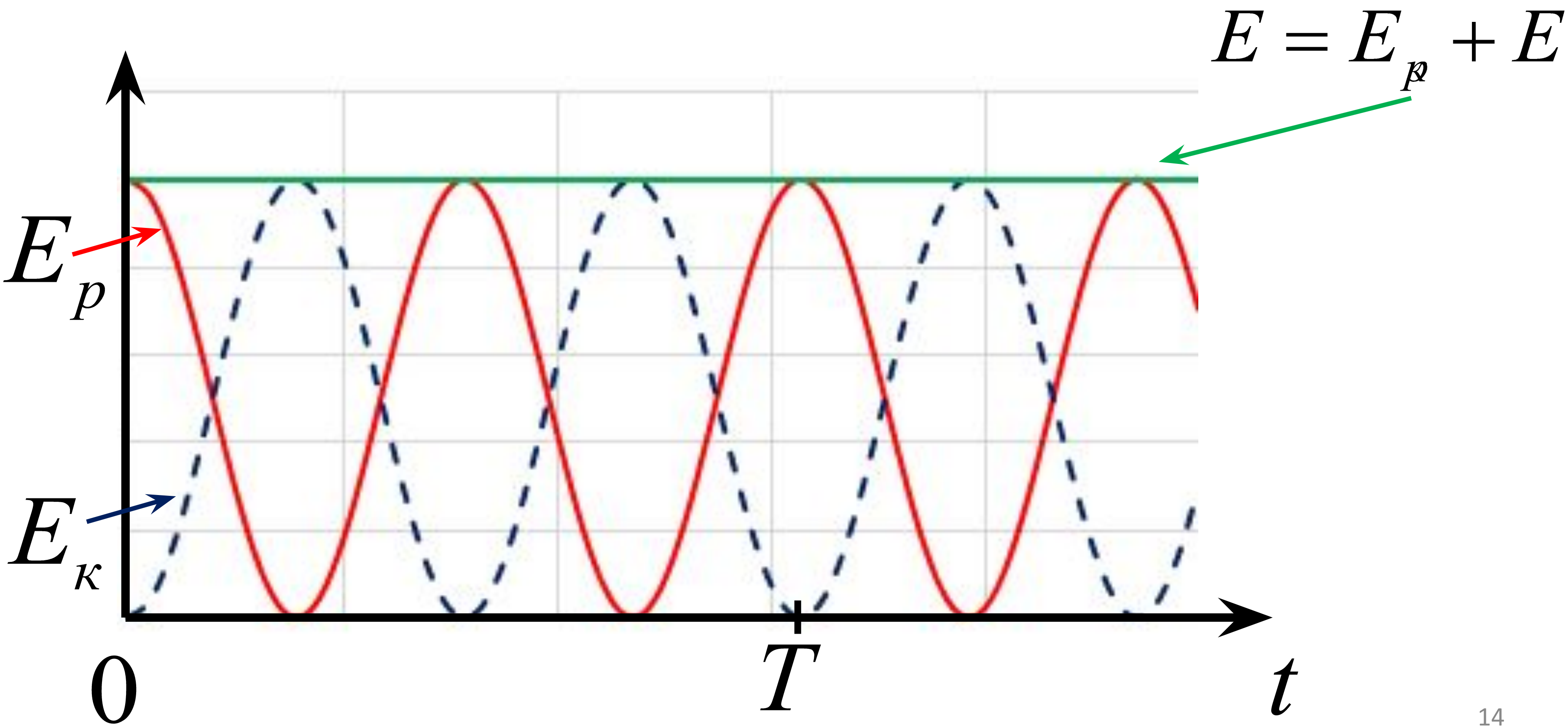
$$\boxed{E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)}{2}.}$$

**Кинетическая энергия** м.т., совершающей **гармонические колебания** в поле упругих сил

$$\boxed{E_к = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)}{2}.}$$

$$E = E_к + E_п = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} = const$$

В системе, совершающей **гармонические колебания**, выполняется **закон сохранения полной механической энергии**, поскольку упругая сила **консервативна**.



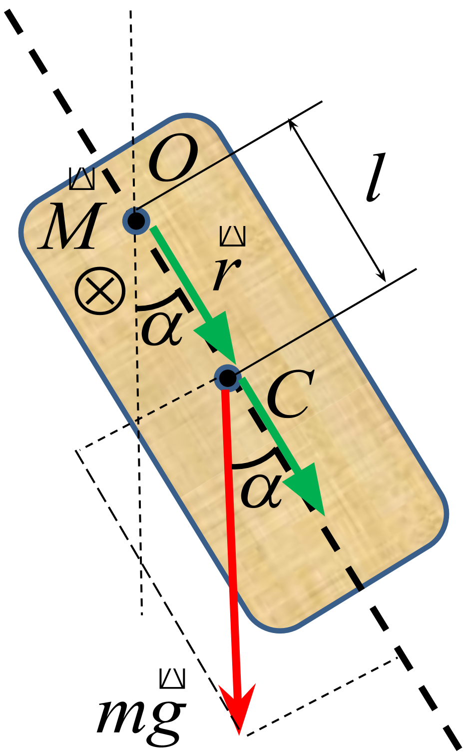
## 2. Физический маятник

Это твёрдое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси (не совпадающей с центром масс).

$$\vec{M} = \left[\vec{r} \times \vec{F}\right]$$

Отклоним маятник на угол ***α***. Возникнет вращающий момент стремящейся вернуть маятник в положение равновесия.

$$\vec{M} = J\vec{\varepsilon}$$




Спроецируем момент силы и угловое ускорение на ось направленную от нас. Тогда,

$$M = J\varepsilon = J\frac{d\omega}{dt} = J\frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

$$M = mgl\sin\alpha$$

$$J\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mgl\sin\alpha$$

***J*** – момент инерции маятника относительно т. $O$

При малых отклонениях $\sin\alpha \approx \alpha$

$$J\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mgl\alpha,$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \underbrace{\frac{mgl}{J}}_{\omega_0^2}\alpha = 0,$$

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = 0.$$

Решением данного дифференциального уравнения будет функция вида

$$\alpha = \alpha_{\max}\cos\left(\omega_0 t + \varphi\right)$$

$$\boxed{T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}}$$ - период колебания физического маятника.

# 3. Математический маятник

Это **идеализированная** система, состоящая из **м.т.** массой $m$, подвешенной на нерастяжимой нити, и колеблющаяся под действием **силы тяжести.**

**Момент инерции математического маятника**

$$J = ml^2,$$

где $l$ – длина маятника.

Период **малых колебаний математического маятника**

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

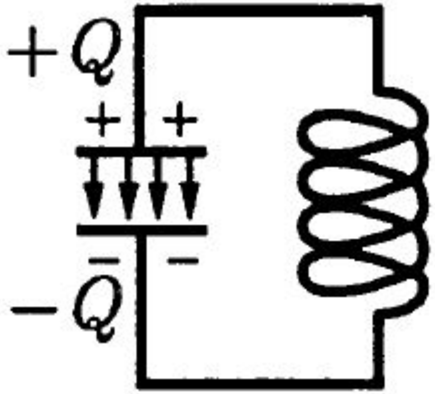
# Свободные гармонические колебания в колебательном контуре

**Электромагнитные колебания** – колебания, при которых электрические величины (заряды, токи) периодически изменяются и которые сопровождаются взаимными превращениями электрического и магнитного полей.

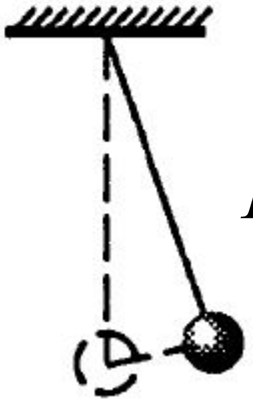
**Колебательный контур** – цепь, состоящая из включенных последовательно

- **катушки** индуктивностью $L$,
- **конденсатора** ёмкостью $C$ ,
- **резистора** сопротивлением $R$.

Рассмотрим **идеальный** колебательный контур (***R*≈0**).



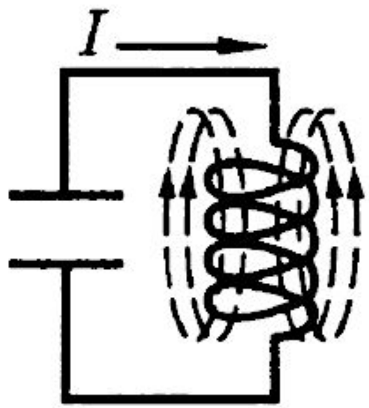

$$W_E = \frac{q^2}{2C}$$



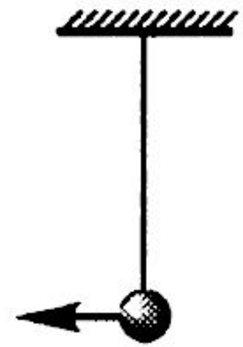
$$E = E_p\,(\max)$$

1. В начальный момент времени ($t$=0) **конденсатор заряжают** и между его обкладками возникает **электрическое поле с энергией *$W_E$***.

2. При замыкании **конденсатора** на **катушку индуктивности**, он начнёт **разряжаться**, и в контуре потечёт **возрастающий со временем ток**.
В результате $W_E$ буде **уменьшаться**, а $W_B$ будет **возрастать**.




$$W_B = \frac{L\dot{q}^2}{2}$$



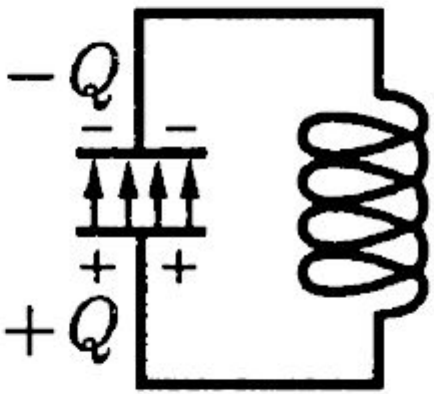
$$E = E_к\left(\max\right)$$

Но **полная энергия** будет **сохраняться** (т.к. $R \approx 0$):

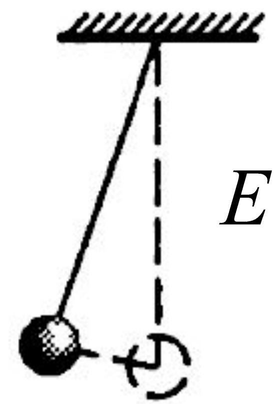
$$W = \underbrace{\frac{q^2}{2C}}_{W_{эл}} + \underbrace{\frac{L\dot{q}^2}{2}}_{W_{маг}} = const.$$

В момент времени $t = T/4$ **конденсатор** полностью **разрядится** ($W_E = 0$), а $W_B = max$.

3. Затем ток начнет убывать (магнитное поле катушки будет ослабевать, что будет способствовать появлению индукционного тока, направленного в также как и ток разрядки конденсатора - согласно правилу Ленца). Конденсатор начнёт перезаряжаться, возникнет электрическое поле, стремящееся ослабить ток. В конце концов ***$W_E$=max***, а ***$W_B$=0***.




$$W_E = \frac{q^2}{2C}$$

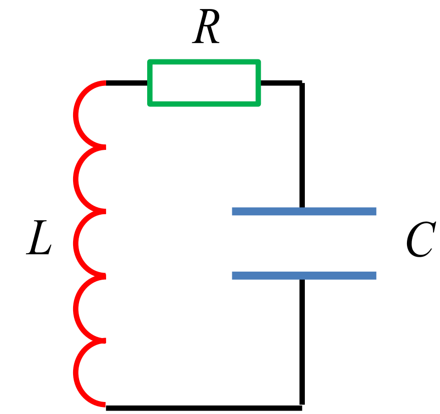


$$E = E_p\,(\max)$$

4. Далее те же процессы начнут протекать **в обратном направлении** и система к моменту времени ***t=T*** придёт **в первоначальное состояние**.

Рассмотрим **колебательный контур**

$$IR + U_C = \varepsilon_s,$$




где $IR$ – **напряжение** на резисторе;

$U_C = \dfrac{q}{C}$ – **напряжение** на конденсаторе;

$\varepsilon_s = -L\dfrac{dI}{dt}$ – **ЭДС самоиндукции**, возникающая в катушке при протекании в ней **переменного тока**.

$$L\frac{dI}{dt} + IR + \frac{q}{C} = 0. \quad \left[ I = \dot{q}, \ \frac{dI}{dt} = \ddot{q} \right]$$

$$\boxed{\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0.}$$

- дифференциальное уравнение свободных затухающих электрических колебаний

В данном колебательном контуре <u>отсутствуют **внешние** ЭДС</u>, поэтому такие колебания называются **свободными**.

Если <u>***R*=0**</u>, то **свободные электромагнитные колебания** в контуре являются <u>**гармоническими**</u>.

Тогда

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0.$$

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0.$$

Заряд $q$ совершает **гармонические колебания** по закону

$$q = q_{\max} \cos\left(\omega_0 t + \varphi\right),$$

где $q_{max}$ – **амплитуда колебаний** заряда конденсатора с циклической частотой $\omega_0$ (**собственная частота контура**),

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

и периодом

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$ ⇒ **Формула Томпсона**

**Томсон Джозеф Джон (1856 - 1940)**

$$I = \dot{q} = -\omega_0 q_{\max} \sin\left(\omega_0 t + \varphi\right) = I_{max} cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right),$$

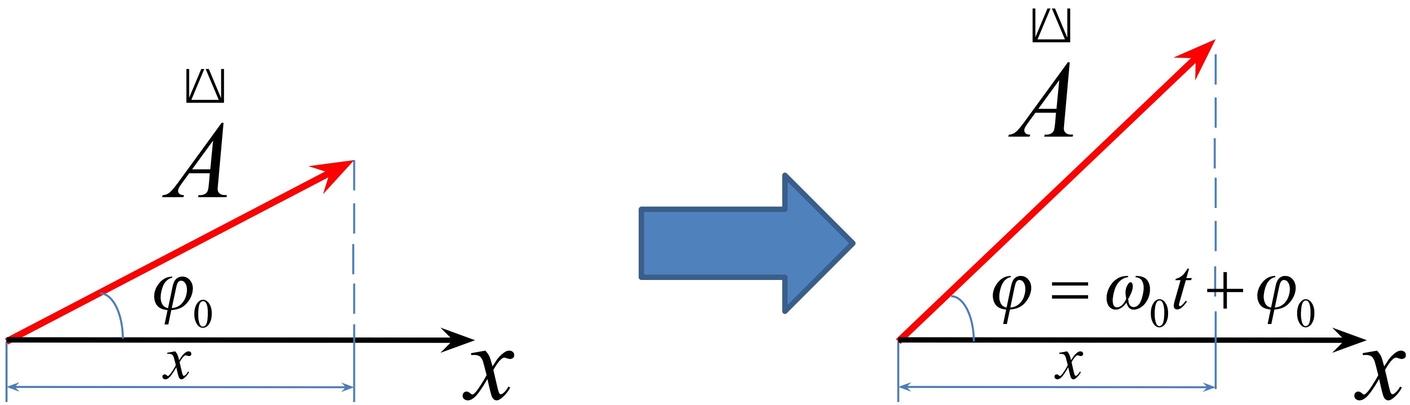
где $I_{max}$ – **амплитуда силы тока**.

$$U_C = \frac{Q}{C} = \frac{Q_m}{C} cos\left(\omega_0 t + \varphi\right) = U_m cos\left(\omega_0 t + \varphi\right),$$

где $U_{max}$ – **амплитуда напряжения**.

**Вывод:** колебания тока $I$ опережают по фазе колебания заряда $q$ на **π/2**, т.е., когда ток достигает максимального значения, заряд (а также и напряжение) обращаются в ноль, и наоборот.

# Сложение колебаний. Векторная диаграмма




$$t = 0;$$
$$x = A\cos\varphi_0$$

$$x = A\cos\varphi = A\cos\left(\omega t + \varphi_0\right)$$

**Проекция** вращающегося вектора изображает **гармоническое колебание.**

# Сложение гармонических колебаний

**Когерентность колебаний** – согласованное протекание нескольких колебательных процессов, заключающееся в **постоянстве** или **закономерном изменении** их **направлений, амплитуд, частот и начальных фаз.**

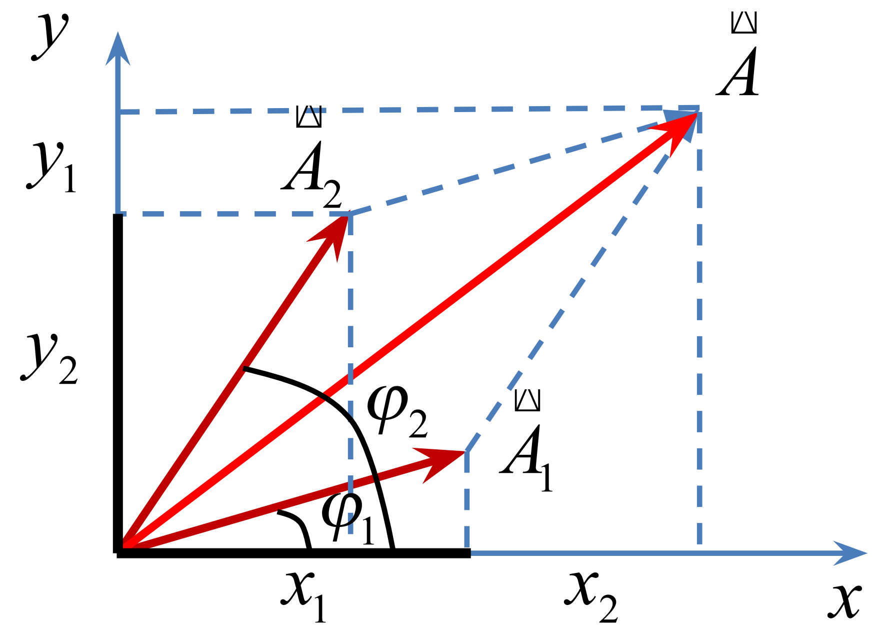
Рассмотрим **однонаправленные одночастотные колебания с неизменными амплитудами и постоянной разностью начальных фаз**.

Воспользуемся представлением **гармонических функций** в виде **проекций** вращающихся векторов $A(t)$ на оси декартовой системы координат.

Сложим гармонические колебания

- **одного направления** и
- **одинаковой частоты:**

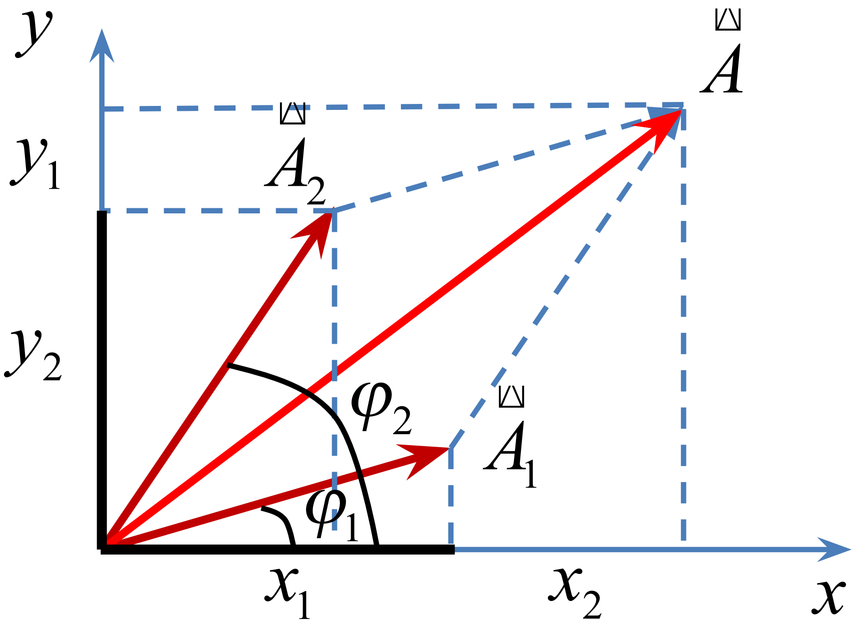
$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1), \\ x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2). \end{cases}$$




Т.к. **колебания когерентны**, то **$(\varphi_2 - \varphi_1) = const$**.

**Результирующее** **колебание** $x$ будет

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega_0 t + \varphi).$$




$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$$

$$\begin{cases} \cos\varphi_1 = \dfrac{x_1}{A_1} \\[2ex] \cos\varphi_2 = \dfrac{x_2}{A_2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin\varphi_1 = \dfrac{y_1}{A_1} \\[2ex] \sin\varphi_2 = \dfrac{y_2}{A_2} \end{cases}$$

$$A^2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 + \left(y_1 + y_2\right)^2 =$$

$$= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2 =$$

$$= A_1^2\cos^2\varphi_1 + 2A_1\cos\varphi_1 \cdot A_2\cos\varphi_2 + A_2^2\cos^2\varphi_2 +$$

$$+ A_1^2\sin^2\varphi_1 + 2A_1\sin\varphi_1 \cdot A_2\sin\varphi_2 + A_2^2\sin^2\varphi_2 =$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha-\beta\right)-\cos\left(\alpha+\beta\right)\right)\\ \cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha+\beta\right)+\cos\left(\alpha-\beta\right)\right)\end{array}\right.$$

$$=\left[A_1^2\cos^2\varphi_1+A_1^2\sin^2\varphi_1\right]+\left[A_2^2\cos^2\varphi_2+A_2^2\sin^2\varphi_2\right]+$$

$$+2A_1A_2\cdot\frac{1}{2}\left(\cos\left(\varphi_1-\varphi_2\right)-\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\right)+$$

$$+2A_1A_2\cdot\frac{1}{2}\left(\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right)+\cos\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\right)=$$

$$=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\left(\varphi_1-\varphi_2\right)$$

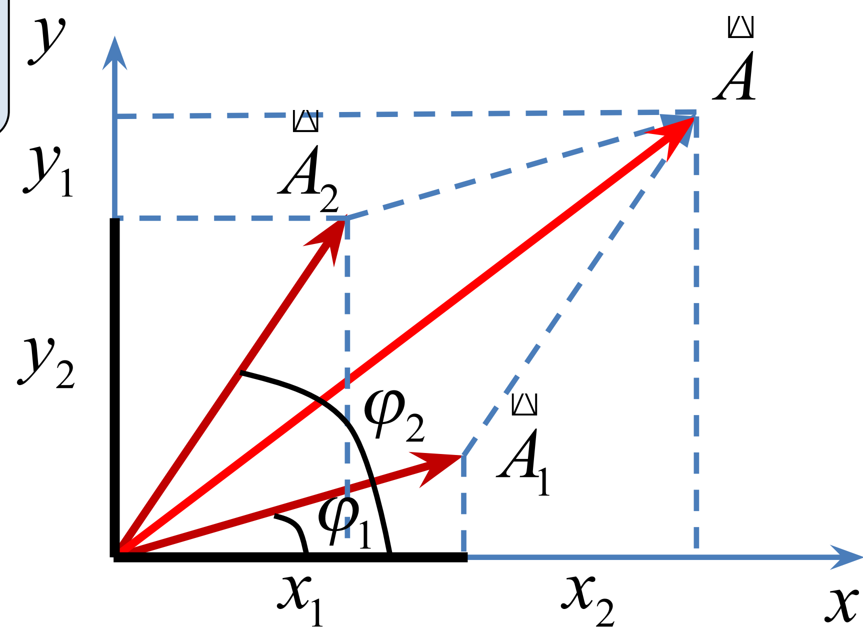
Из рисунка мы видим, что

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

и

$$tg\varphi = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} =$$

$$= \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$



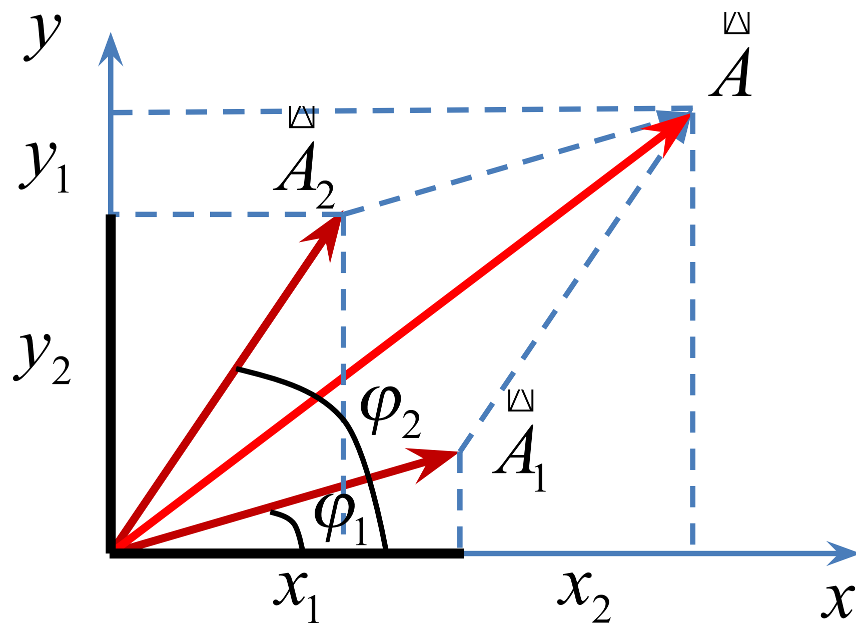

**Выводы:** 1) тело, участвуя в двух гармонических колебаниях одного направления и одинаковой частоты, совершает также гармоническое колебание в том же направлении и с той же частотой, что и складываемые колебания;

2) амплитуда результирующего колебания зависит от разности фаз $(\varphi_2$-$\varphi_1)$ складываемых колебаний.

Рассмотрим выражение (4)

$$1.\ \varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2m\pi \ (m = 0, 1, 2, \dots)$$

В этом случае $A = A_1 + A_2$, т.е. **амплитуда результирующего колебания *A*** равна сумме **амплитуд складываемых колебаний**;




$$2.\ \varphi_2 - \varphi_1 = \pm (2m+1)\pi \ (m = 0, 1, 2, \dots)$$

В этом случае $A = |A_1 - A_2|$,

т.е. **амплитуда результирующего колебания *A*** равна **разности амплитуд складываемых колебаний**.

# Биения

**Биения** – периодические изменения амплитуды колебаний, возникающие при сложении двух гармонических колебаний с близкими частотами.

**Условия.**

$$\omega_1 \approx \omega_2 = \omega$$

и

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \ll \omega.$$

Пусть:

1) **амплитуды** складываемых колебаний равны $A$;
2) **начальные фазы колебаний** равны **0**.

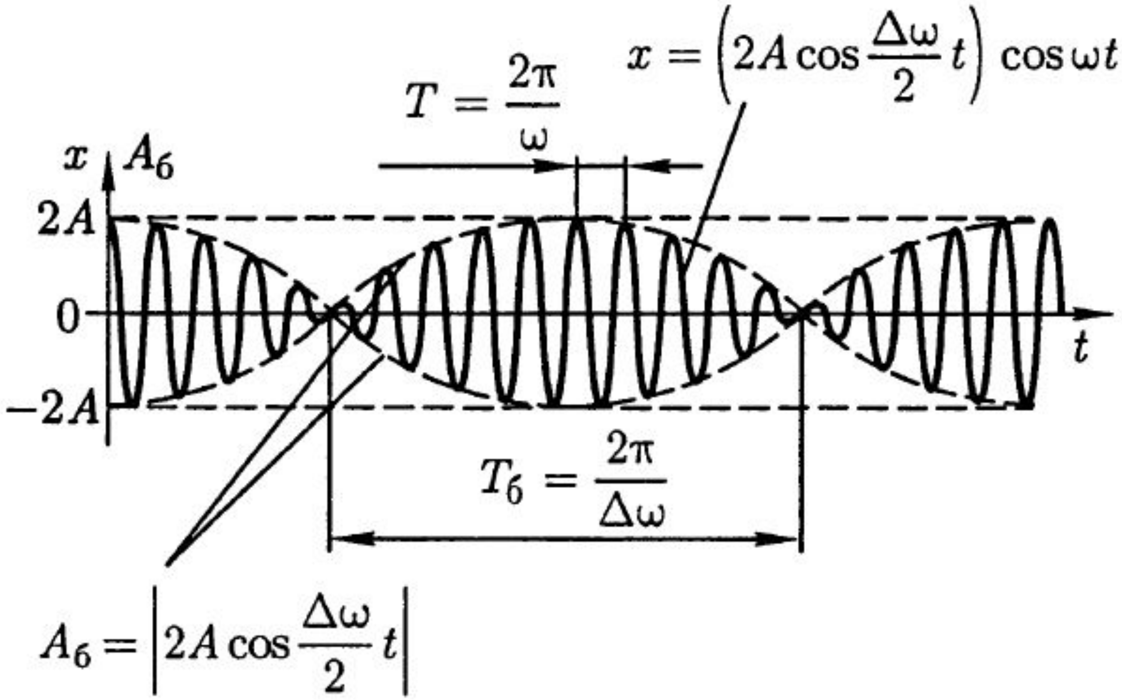
$$\begin{cases} x_1 = A\cos\omega t, & (5) \\ x_2 = A\cos(\omega + \Delta\omega)t & (6). \end{cases}$$

Сложим выражения (5) и (6):

$$x = \boxed{\left(2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t\right)}\cos\omega t$$

**Амплитуда колебаний** (**штриховая линия**) изменяется по периодическому закону.

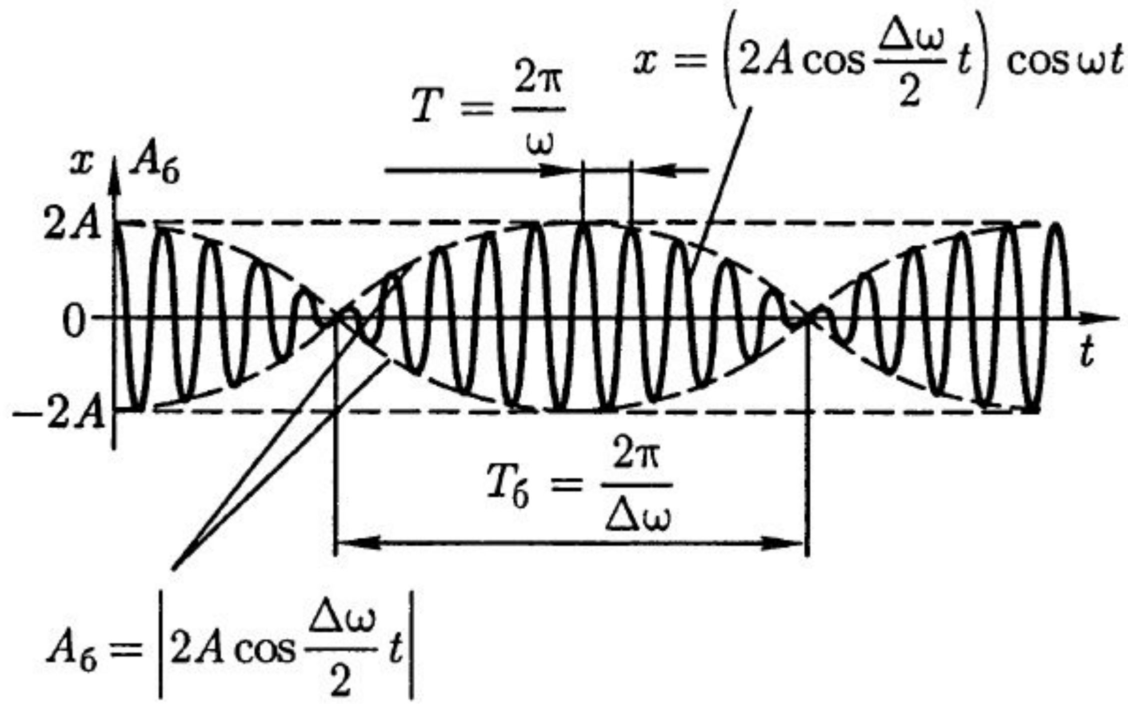
**Сплошная линия** – график **результирующего колебания**



**Пояснение.** За **период** сдвиг фаз меняется незначительно, вследствие чего на протяжении нескольких периодов колебания складываются **«в фазе»** ($\Delta\varphi \approx 0$) – **амплитуда фаз максимальна**;

затем, на протяжении нескольких **периодов**, колебания складываются **«в противофазе»** ($\Delta\varphi \approx \pi$) – **амплитуда минимальна**.

На практике **эффект биения** используют для определения **частоты тона**.
Для этого сравнивают эталонное колебание с измеряемым.



# Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Пусть:

1) **частоты** складываемых колебаний равны $\omega$;
2) **начальные фазы колебаний** равны **0**.

**Запишем.**

$$\begin{cases} x = A\cos\omega t, \\ y = B\cos(\omega t + \alpha), \end{cases}$$

где $\alpha$ – **разность фаз** обоих колебаний,
$A$ и $B$ – **амплитуды** складываемых колебаний.

Произведём следующее:

$$\boxed{\frac{x}{A}} = \cos\omega t;$$

$$\sqrt{1-\left(\frac{x}{A}\right)^2}$$

$$\frac{y}{B} = \cos(\omega t + \alpha) = \boxed{\cos\omega t}\cos\alpha - \boxed{\sin\omega t}\sin\alpha$$

После преобразований получим **уравнение эллипса**, оси которого ориентированы относительно координатных осей произвольно:

$$\frac{x^2}{A^2}-\frac{2xy}{AB}\cos\alpha+\frac{y^2}{B^2}=\sin^2\alpha.$$

**Эллиптически поляризованные колебания**

**Частные случаи.**

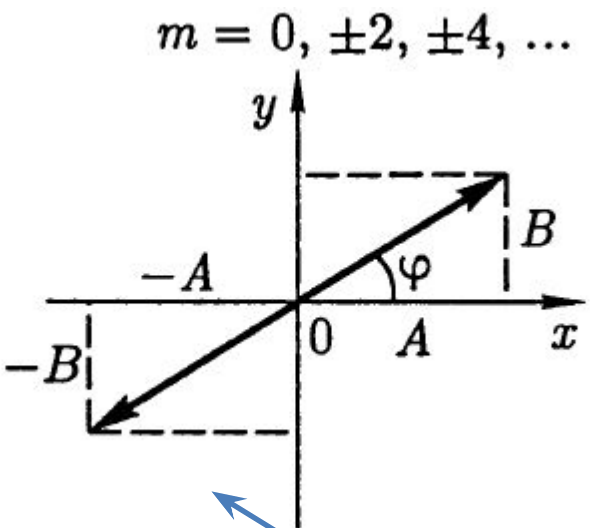
$$1.\ \alpha=2m\frac{\pi}{2}\left(m=0,\pm1,\pm2,\ldots\right)$$

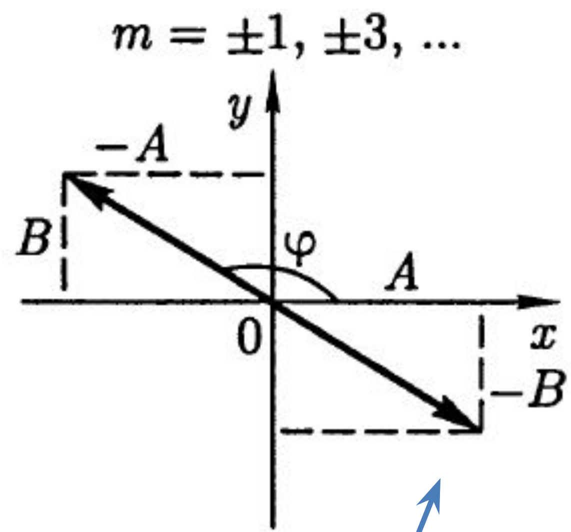
Эллипс представляет собой **отрезок прямой**:

$$y = \pm \frac{B}{A} x,$$

«+» - соответствует нулю и чётным значениям $m$ (**левый рисунок**);

«–» - соответствует нечётным значениям $m$ (**правый рисунок**).

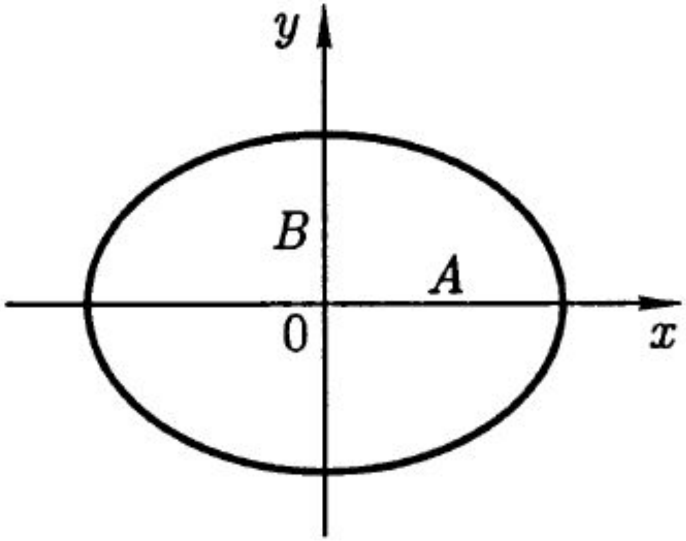



**Линейно поляризованные колебания**

$$2.\ \alpha = (2m+1)\frac{\pi}{2}\ (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

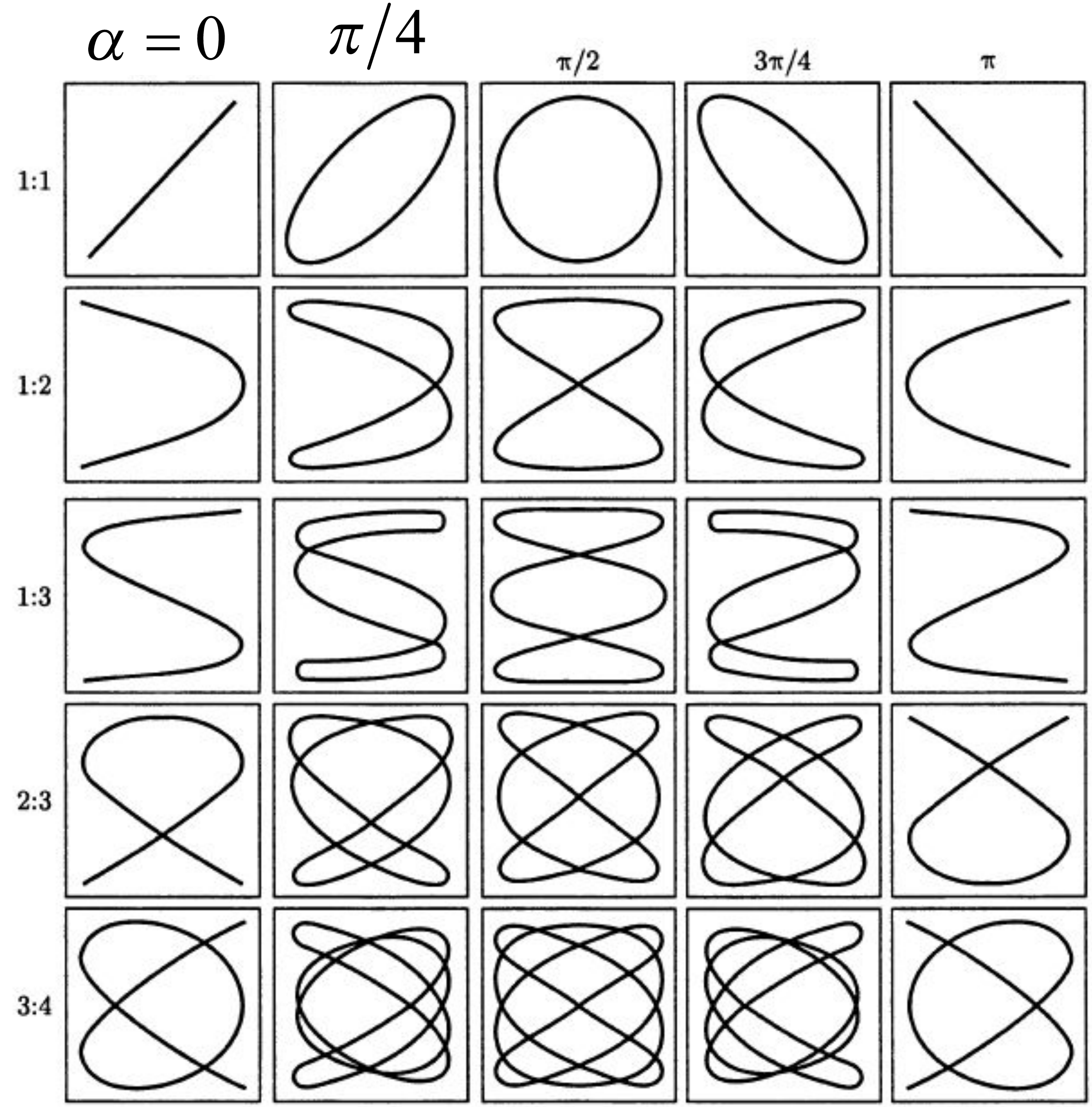



Если $A = B$, то эллипс вырождается в **окружность**.

**Колебания, поляризованные по кругу**

3. При **различных** **частотах** складываемых **взаимно перпендикулярных колебаний**, замкнутые траектории, прочерчиваемые точкой, совершающей одновременно **два взаимно перпендикулярных колебания**, называются **фигурами Лиссажу**.

Вид кривых **зависит** от соотношения **амплитуд**, **частот** и **разности фаз** складываемых **колебаний**.


$\alpha = 0$
$\pi/4$
π/2
3π/4
π
1:1
1:2
1:3
2:3
3:4

# Свободные затухающие колебания

**Затухающие колебания** – колебания, амплитуды которых из-за потерь энергии колебательной системы с течением времени уменьшаются.

Затухающие колебания описываются дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\beta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0$$

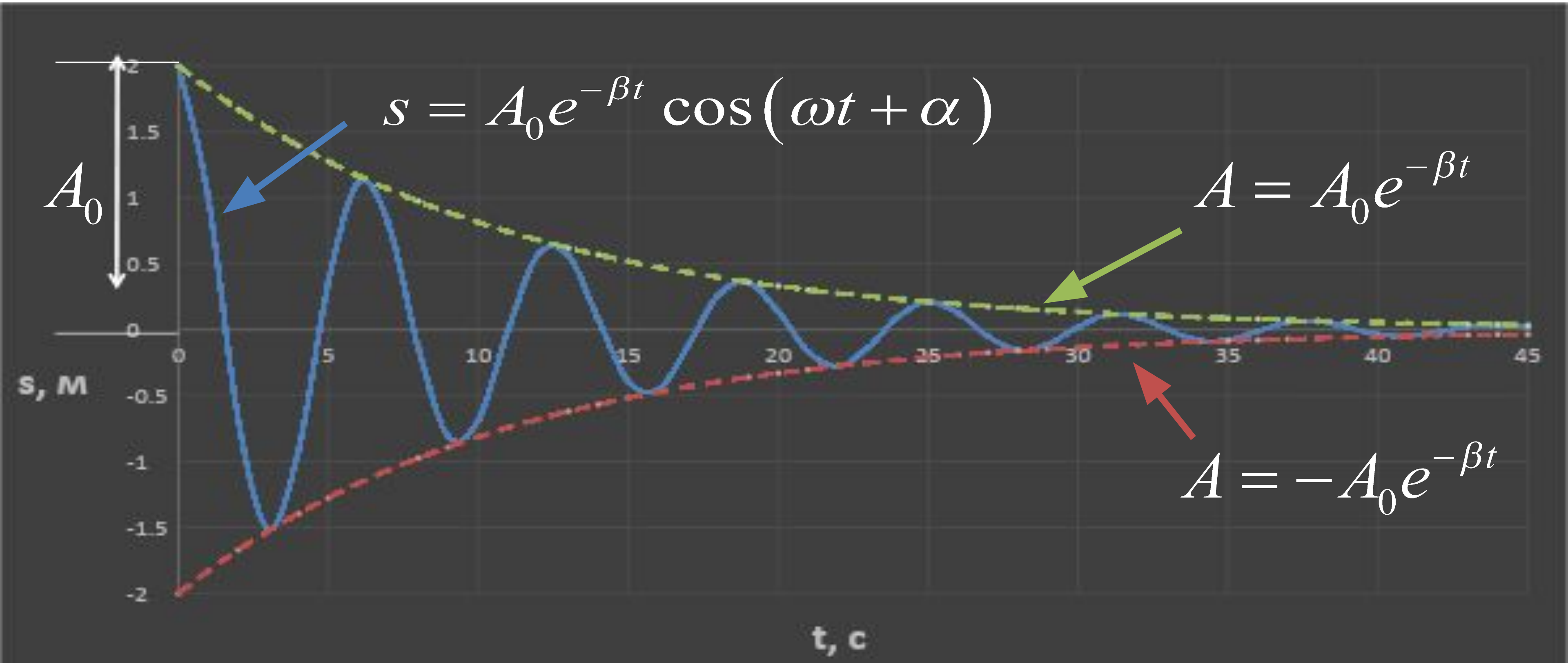
$$\ddot{s} + 2\beta \dot{s} + \omega_0^2 s = 0$$

- ***s*** – колеблющаяся величина;
- ***β =const*** – коэффициент затухания;
- ***$\omega_0$*** – собственная частота системы (частота, с которой совершались бы свободные колебания системы в отсутствие сопротивления среды).

Решением дифференциального уравнения будет

$$s = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha)$$

- $A_0$ – начальная амплитуда;
- $A_0 e^{-\beta t}$ – амплитуда затухающих колебаний;



- ***ω*** – частота затухающих колебаний.

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

***Время релаксации*** – время, в течение которого амплитуда затухающих колебаний уменьшается в ***e*** раз.

$$\tau = \frac{1}{\beta}$$

Затухающие колебания <u>не являются периодическими</u> (к ним не применимы понятия периода и частоты)

<u>Если затухание мало</u>, то можно пользоваться понятием ***периода*** как промежутка времени между двумя последующими максимумами (или минимумами) колеблющейся величины.

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

**Декрементом затухания** называют отношение амплитуд двух последовательных колебаний, соответствующих моментам времени, отличающихся на период.

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T}$$

**Логарифмический декремент затухания**

$$\theta = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln e^{\beta T} = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e}$$

***$N_e$*** – число колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды в ***e*** раз.

$$N_e = \frac{\tau}{T}$$

**Логарифмический декремент затухания** – постоянная величина для данной колебательной системы.

***Добротность колебательной системы*** пропорциональна числу колебаний $N_e$, совершаемых системой за то время $\tau$, за которое амплитуда колебаний уменьшается в ***e*** раз.

$$Q = \frac{\pi}{\theta} = \pi N_e$$

**Свободные затухающие колебания пружинного маятника**

$$ma = -kx - r\upsilon,$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0.$$

***k*** **- коэффициент жесткости,**
***r*** **- коэффициент трения.**

**Свободные затухающие колебания в электрическом колебательном контуре**

$$IR + U_C = \varepsilon_s,$$

$$IR + \frac{q}{C} = -L\frac{dI}{dt},$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0.$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\beta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0.$$

$$\beta = \frac{r}{2m}$$

$$\beta = \frac{R}{2L}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$