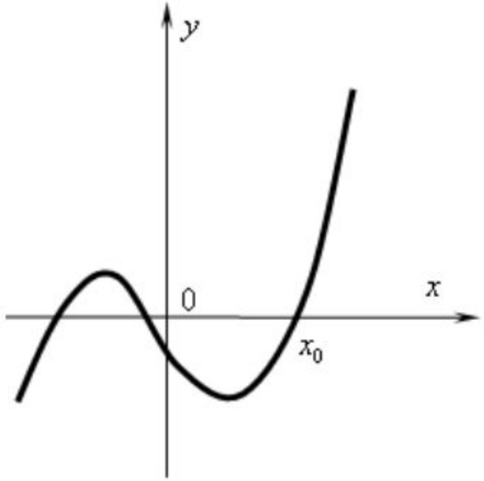
ПОСТРОЕНИЕ ЭСКИЗОВ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

СЕМИНАР 2 ЧАСТЬ 1

ДЛЯ ЯВНО ЗАДАННЫХ ФУНКЦИЙ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

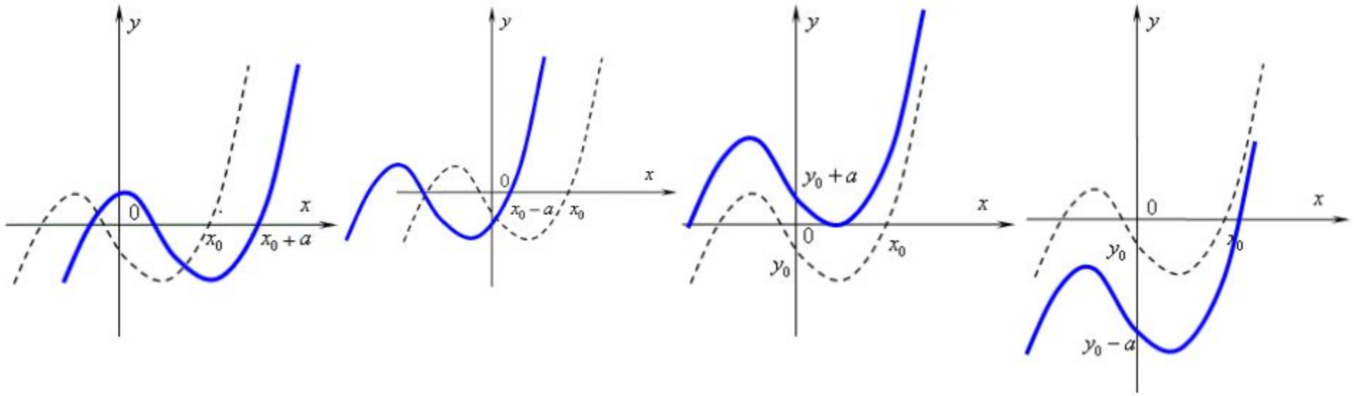
СДВИГ ГРАФИКА

Пусть график функции $f(x)$ имеет вид:



тогда элементарным преобразованиям функции будут соответствовать графики (во всех случаях $a > 0$)

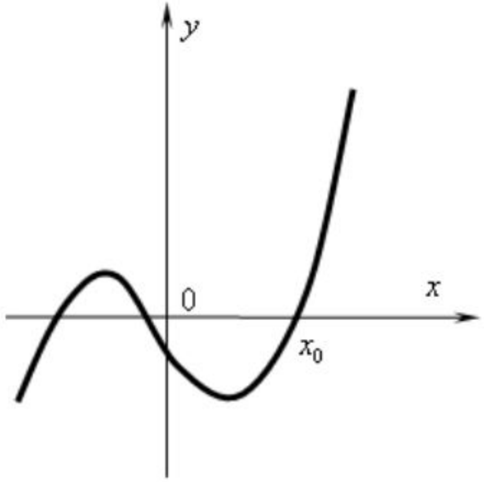
$f(x-a)$ | $f(x+a)$ | $f(x)+a$ | $f(x)-a$



сдвиг на a вправо | сдвиг на a влево | сдвиг на a вверх | сдвиг на a вниз

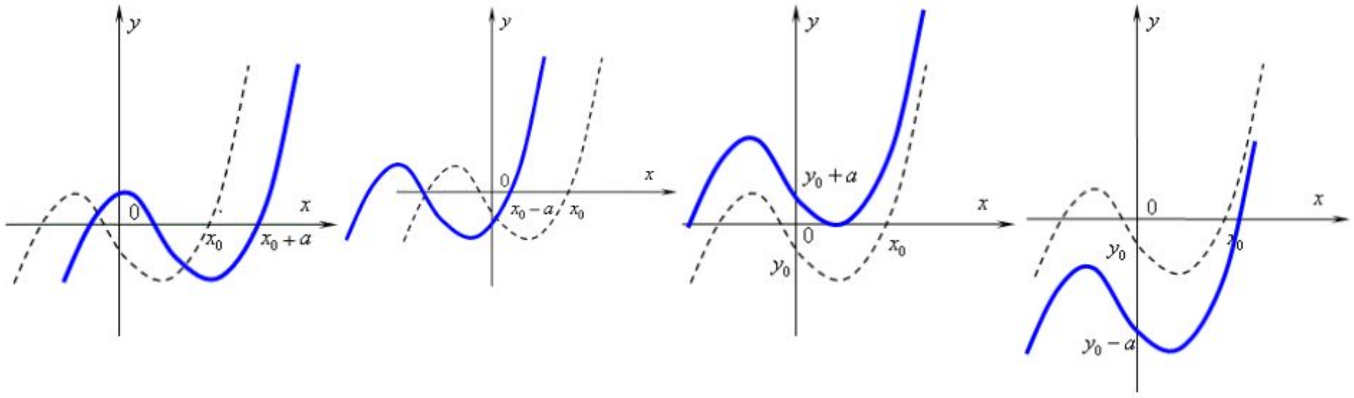
СДВИГ ГРАФИКА

Пусть график функции $f(x)$ имеет вид:



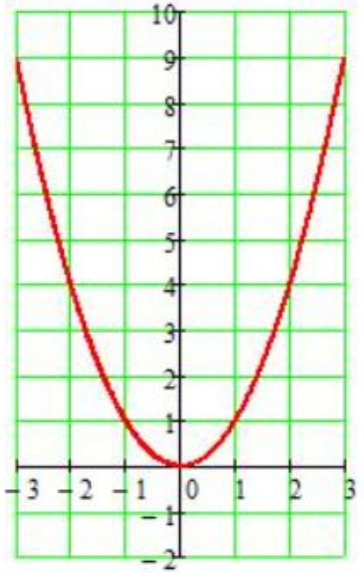
тогда элементарным преобразованиям функции будут соответствовать графики (во всех случаях $a > 0$)

$f(x-a)$ | $f(x+a)$ | $f(x)+a$ | $f(x)-a$

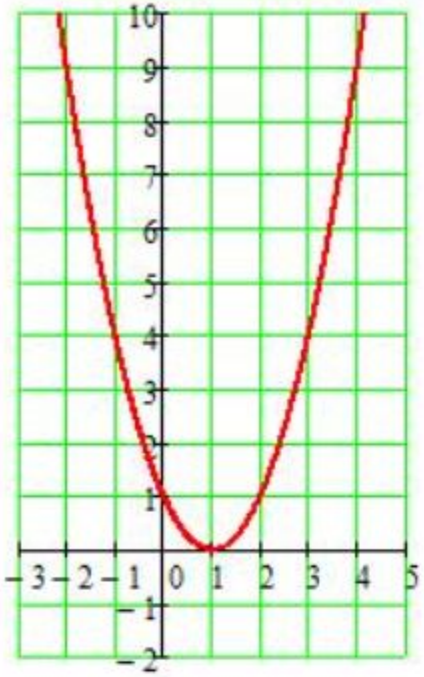
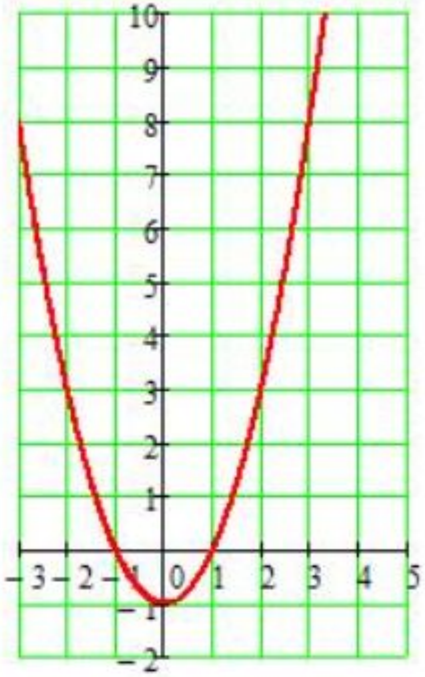
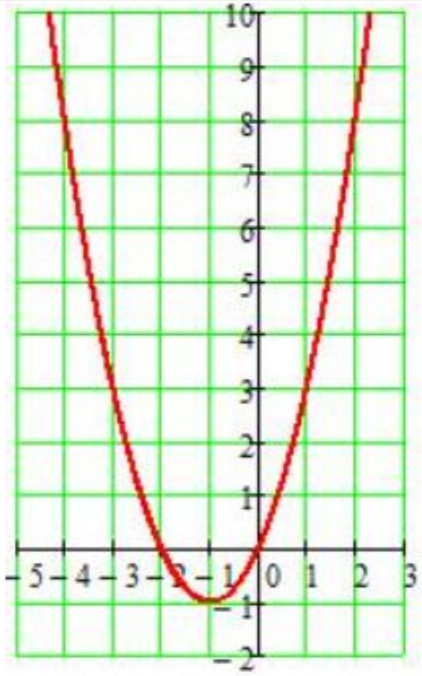


сдвиг на a вправо | сдвиг на a влево | сдвиг на a вверх | сдвиг на a вниз

Графиком функции $y = x^2$ является парабола, ветви которой направлены вверх, а вершина расположена в точке $(0, 0)$:

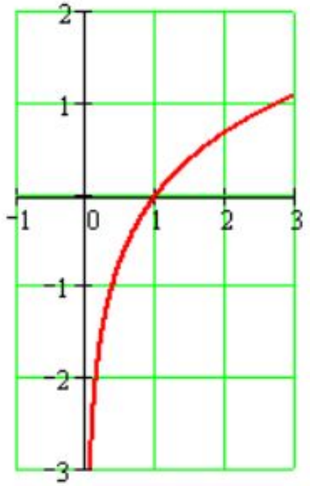


Рассмотрим некоторые варианты смещения графика

$y = (x-1)^2$	$y = x^2 - 1$	$y = (x+1)^2 - 1$
		
парабола, смещенная на 1 вправо по оси Ox	парабола, смещенная на 1 вниз по оси Oy	парабола, смещенная на 1 влево по оси Ox и на 1 вниз по оси Oy

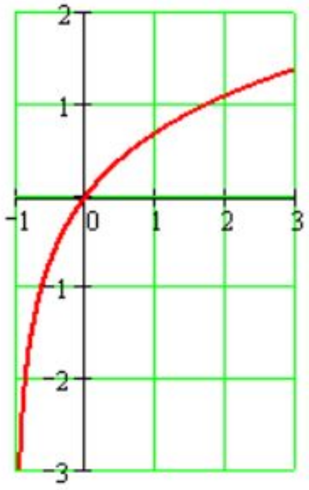
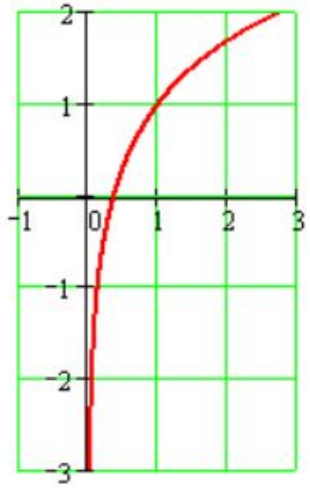
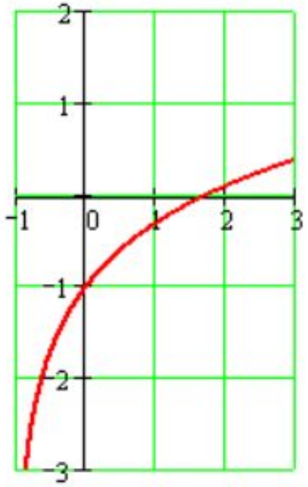
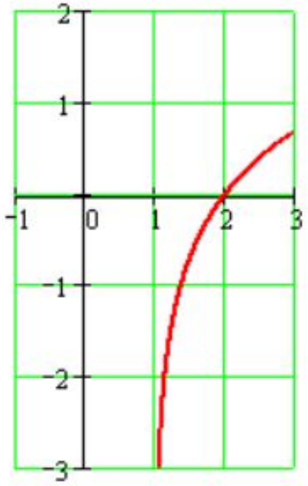
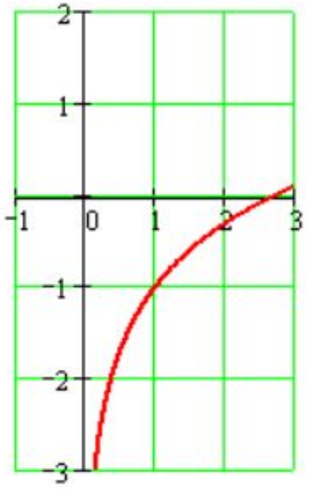
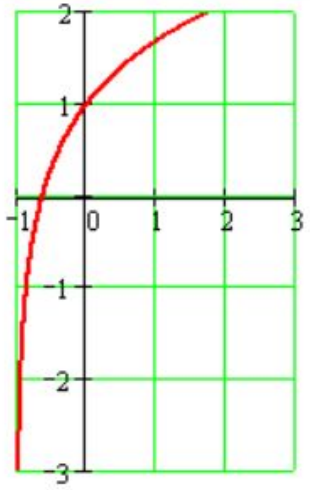
ЗАДАЧА

На рисунке изображен эскиз графика функции $f(x) = \ln x$

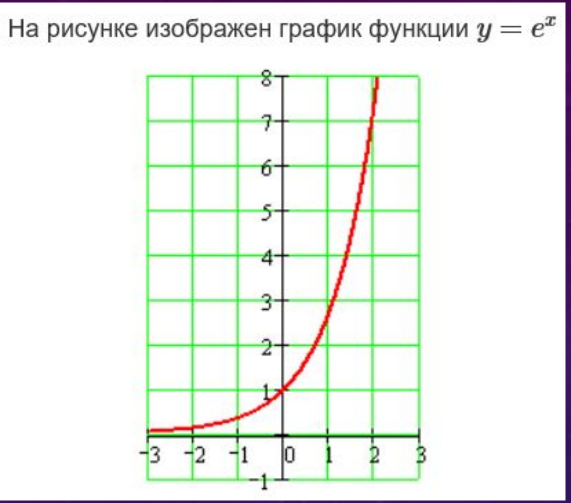


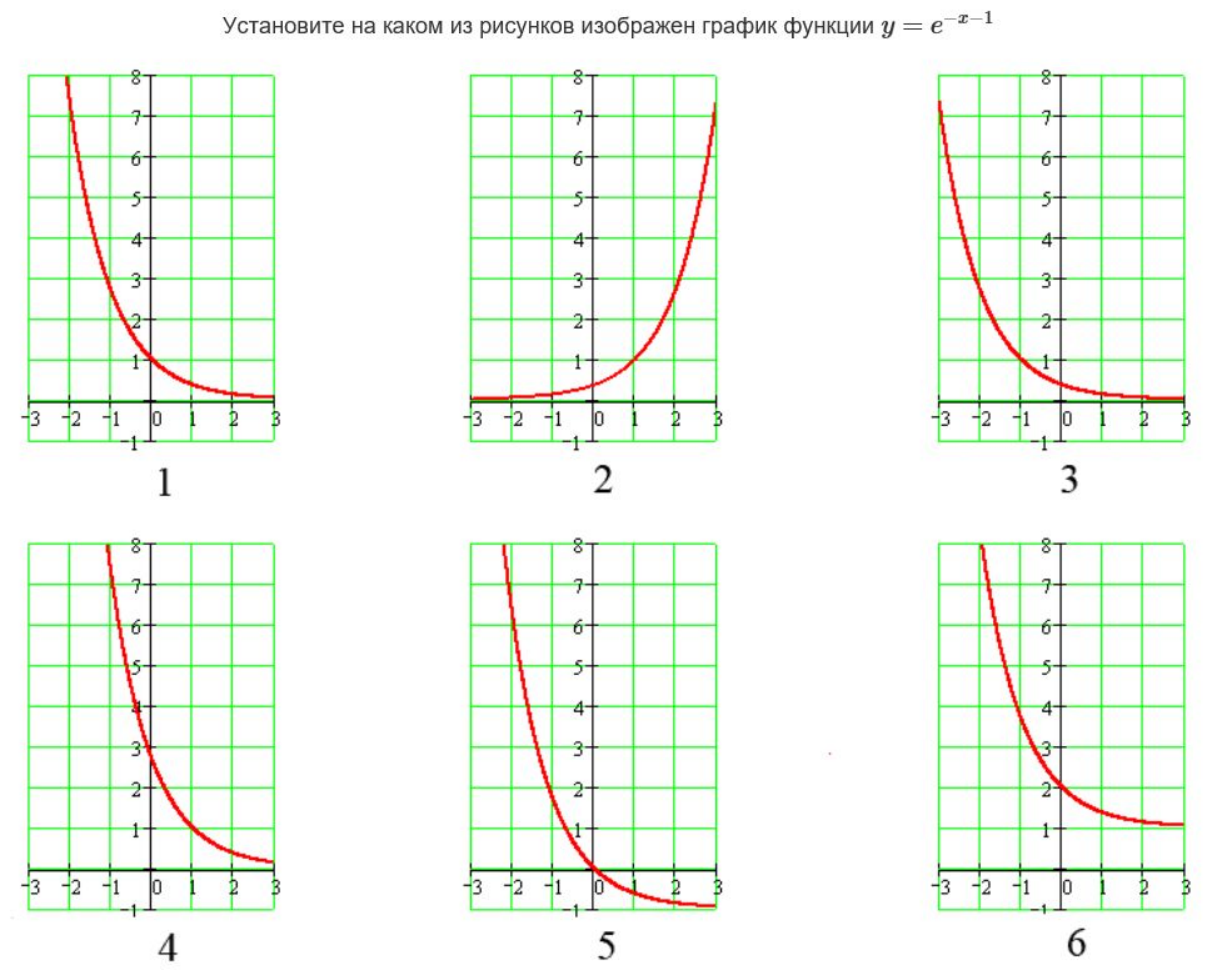
а) ln(x+1)
б) ln(x-1)
в) ln(x) + 1
г) ln(x) - 1
д) ln(x+1) + 1
е) ln(x+1) - 1

Установите соответствие между аналитическим представлением функции и эскизом ее графика

					
1	2	3	4	5	6

ЗАДАЧА

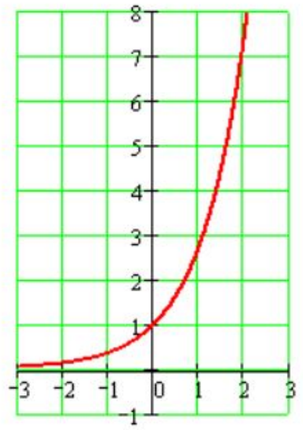




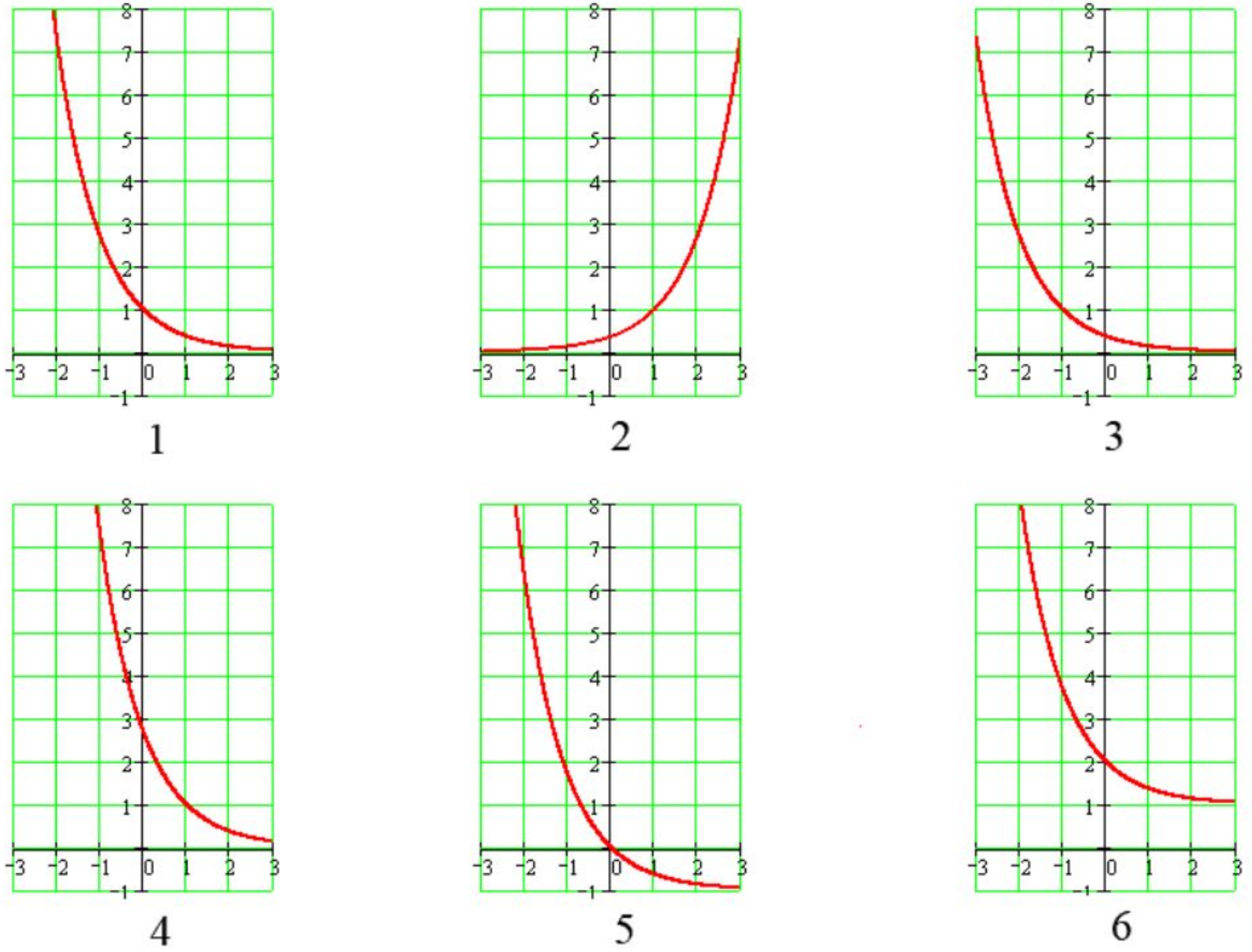
Ответ 3

ЗАДАЧА

На рисунке изображен график функции $y = e^x$



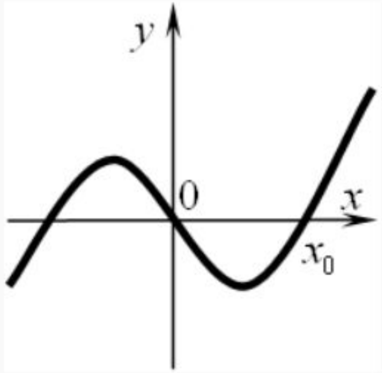
Установите на каком из рисунков изображен график функции $y = e^{-x+1}$



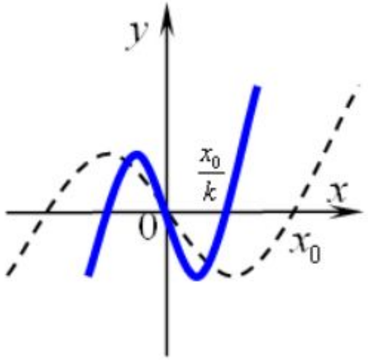
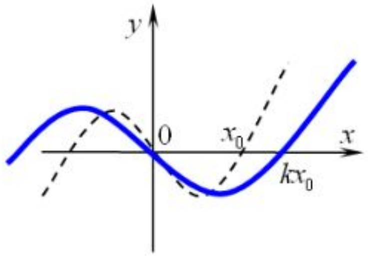
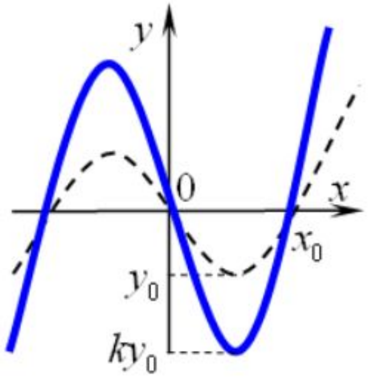
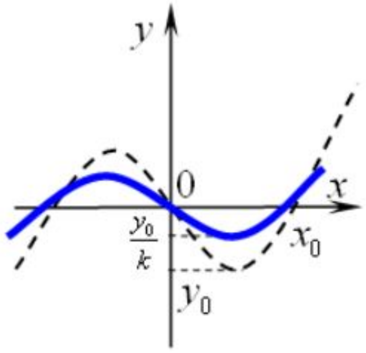
Ответ 4

СЖАТИЕ И РАСТЯЖЕНИЕ ГРАФИКА

Если график функции $f(x)$ имеет вид:

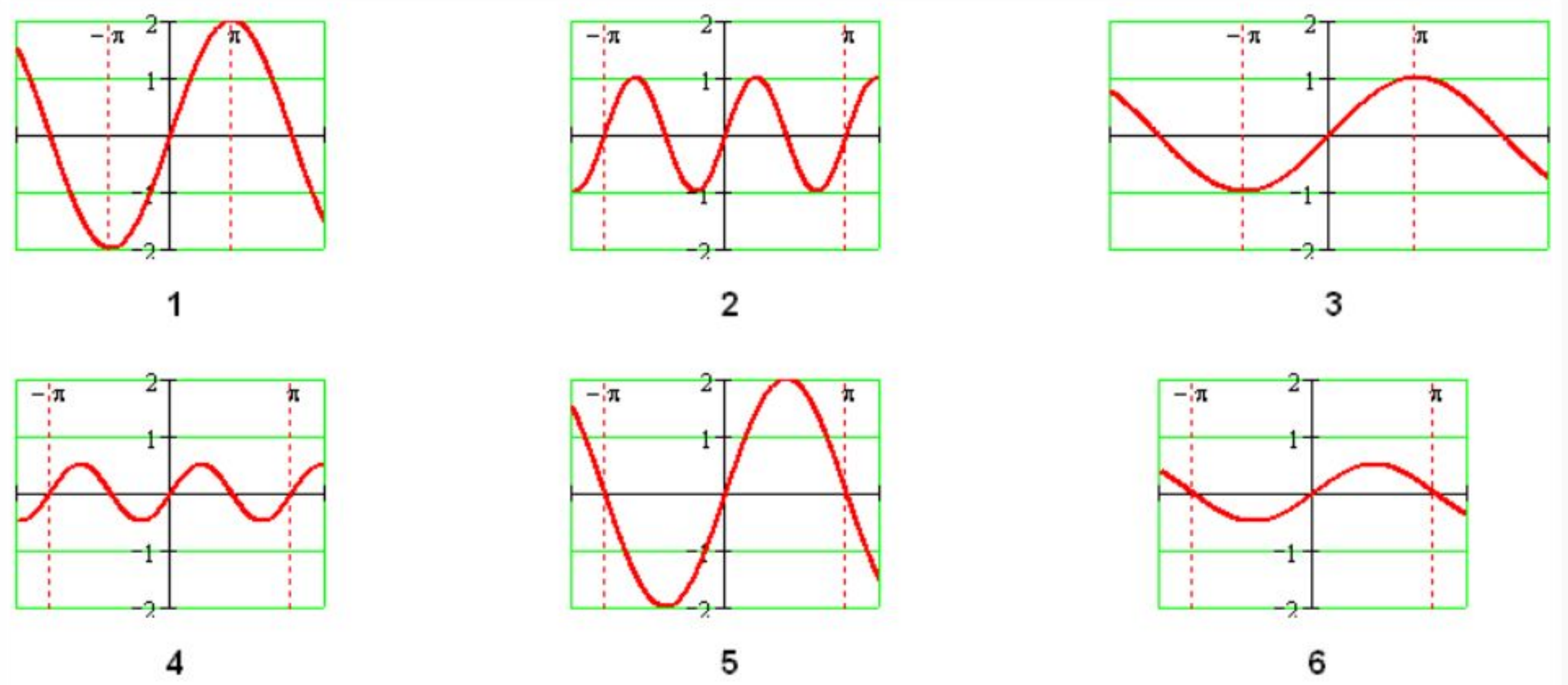


то для $k > 1$ график функции изменится следующим образом

$f(kx)$	$f(\frac{x}{k})$	$kf(x)$	$\frac{f(x)}{k}$
			
сжатие графика в k раз вдоль оси Ox	растяжение графика вk раз вдоль оси Ox	растяжение графика в k раз вдоль оси Oy	сжатие графика в k раз вдоль оси Oy

ЗАДАЧА

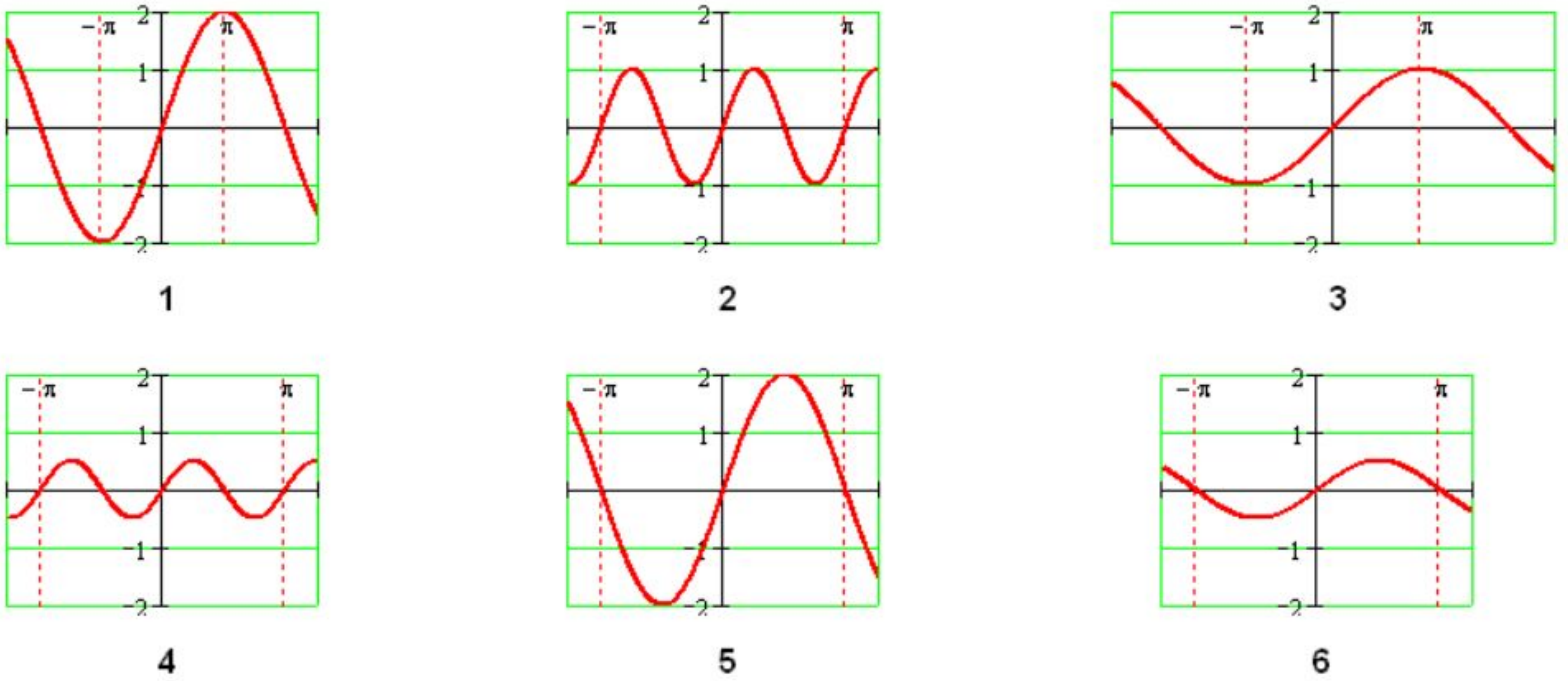
Укажите, на каком рисунке изображен график функции $y = \frac{1}{2}\sin 2x$



Ответ 4

ЗАДАЧА

Укажите, на каком рисунке изображен график функции $\sin\frac{x}{2}$



Ответ 3

ПОСТРОЕНИЕ ЭСКИЗА ДРОБНО-ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ

Рассмотрим построение эскиза графика функции вида

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

После тождественного преобразования:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)} = \frac{a}{c}\left(\frac{x+\frac{d}{c}-\frac{d}{c}+\frac{b}{a}}{x+\frac{d}{c}}\right) = \frac{a}{c}\left(1+\frac{\frac{b}{a}-\frac{d}{c}}{x+\frac{d}{c}}\right) = \frac{a}{c}\left(1+\frac{\frac{cb-ad}{ac}}{x+\frac{d}{c}}\right) = \frac{a}{c}+\frac{k}{x+\frac{d}{c}}$$

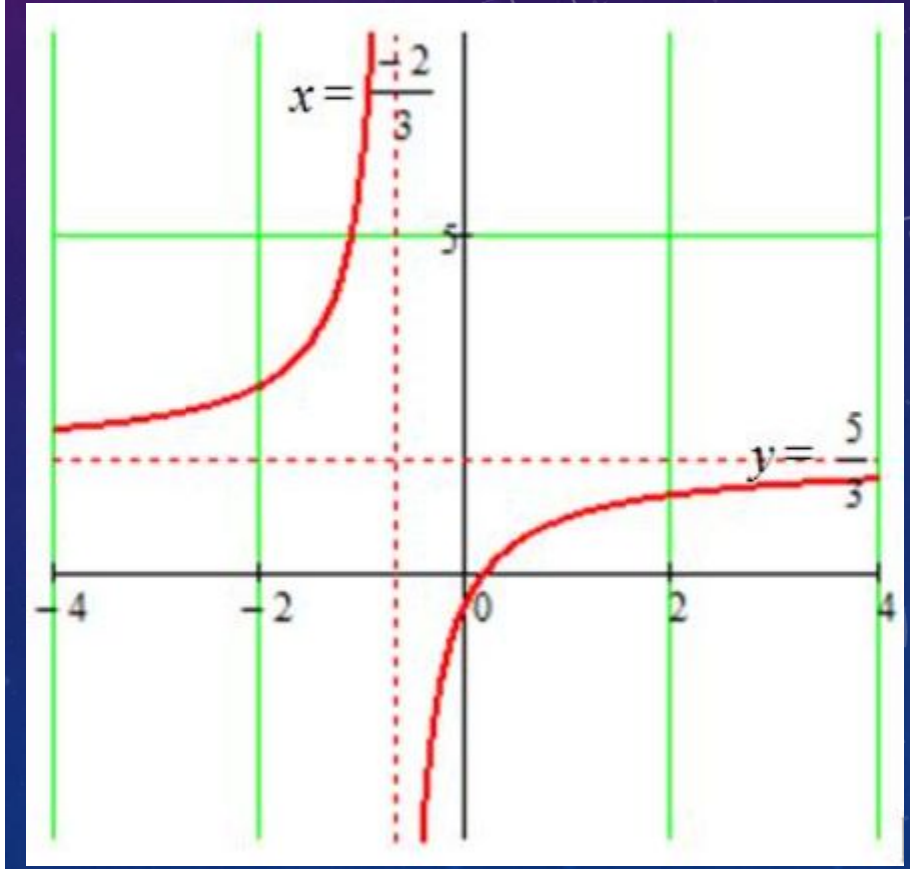
видно что график функции - гипербола $y = \frac{k}{x}$, сдвинутая по оси Ox на $\left|\frac{d}{c}\right|$ вправо или влево в зависимости от знака $\frac{d}{c}$ и по оси Oy на $\left|\frac{a}{c}\right|$ вниз или вверх, в зависимости от знака $\frac{a}{c}$.

Пример. Построим эскиз графика функции $y(x) = \frac{5x-1}{3x+2}$.

Р е ш е н и е. Выполним тождественные преобразования

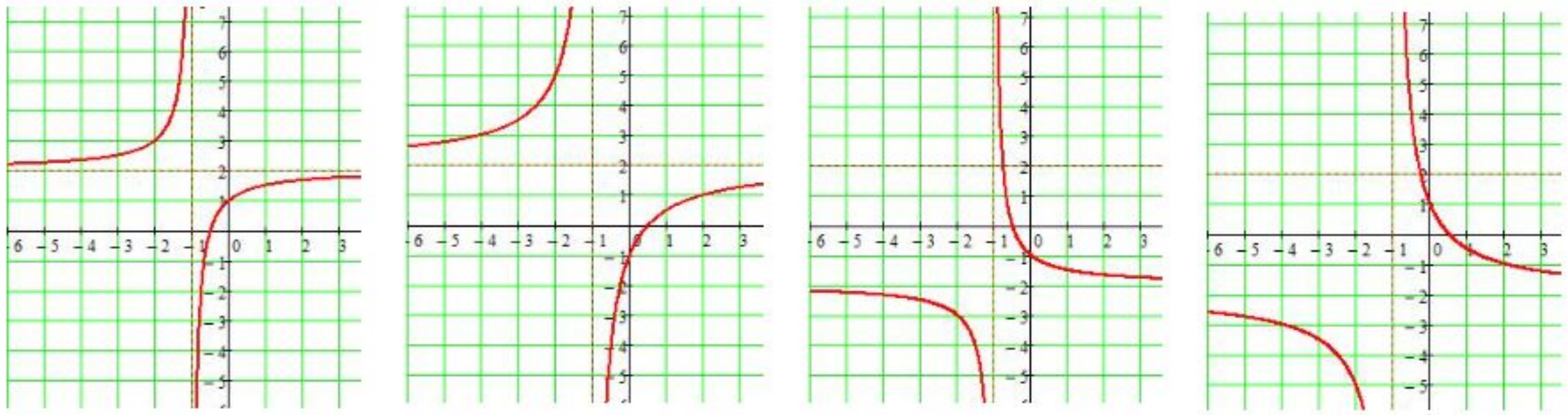
$$\frac{5x-1}{3x+2} = \frac{5}{3} - \frac{\frac{13}{9}}{x+\frac{2}{3}}.$$

Графиком функции $y(x)$ является гипербола $y = \frac{-\frac{13}{9}}{x}$, расположенная во второй и четвертой координатных плоскостях, сдвинутая на $\frac{2}{3}$ влево по оси Ox и на $\frac{5}{3}$ вверх по оси Oy.



ЗАДАЧА

Установите соответствие между функциями и эскизами их графиков



1 2 3 4

A. $\dfrac{2x-1}{x+1}$

B. $\dfrac{-2x-1}{x+1}$

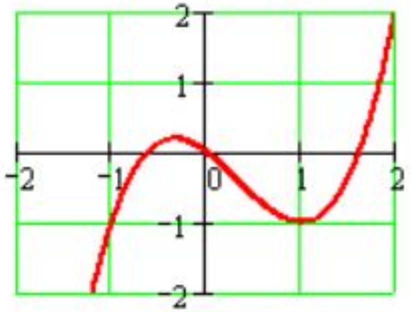
C. $\dfrac{2x+1}{x+1}$

D. $\dfrac{-2x+1}{x+1}$

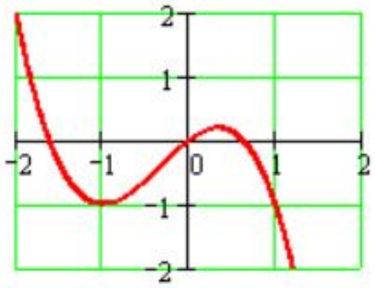
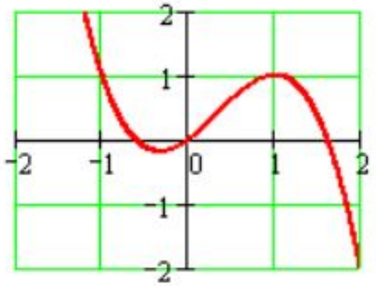
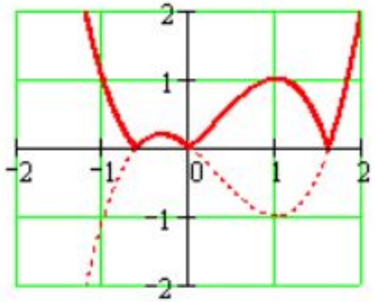
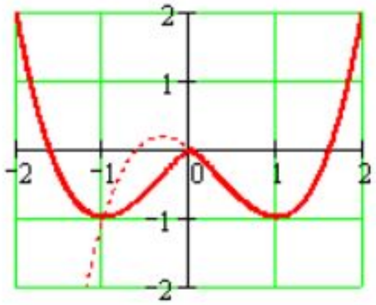
Ответ: 1-C, 2-A, 3-B, 4-D

ОТОБРАЖЕНИЕ ГРАФИК

Если график функции $y = f(x)$ имеет вид:

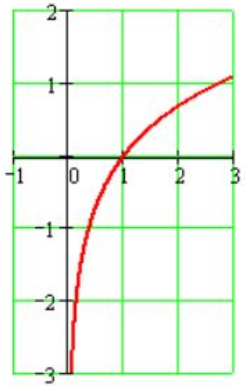


тогда

график $y = f(-x)$	график $y = -f(x)$
	
получен отражением графика $y = f(x)$ относительно оси Oy	получен отражением графика $y = f(x)$ относительно оси Ox
график $y = \|f(x)\|$	график $y = f(\|x\|)$
	
получен отражением части графика, лежащей ниже оси Ox, симметрично вверх	получен заменой части графика, лежащей слева от оси Oy, отражением части графика, лежащей справа. Новый график симметричен относительно оси Oy, так как $f(\|x\|)$ - четная функция.

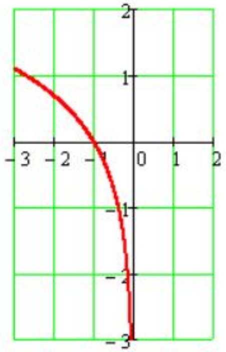
ПРИМЕР

Пример. Зная эскиз графика функции $y = \ln x$,

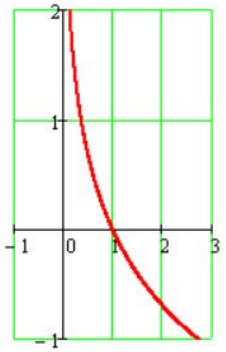


построим эскизы графиков функций $\ln(-x)$, $-\ln x$, $\ln|x|$ и $|\ln x|$.

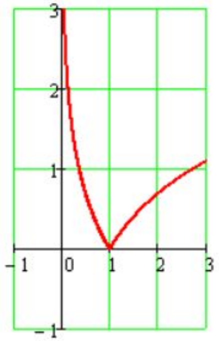
Р е ш е н и е. Эскиз графика функции $\ln(-x)$ получится из исходного отражением кривой относительно оси Oy.



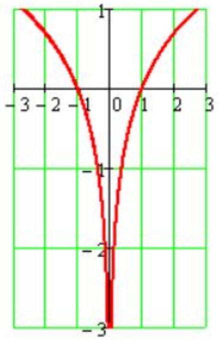
Эскиз графика функции $-\ln x$ получится из исходного отражением кривой относительно оси Ox.



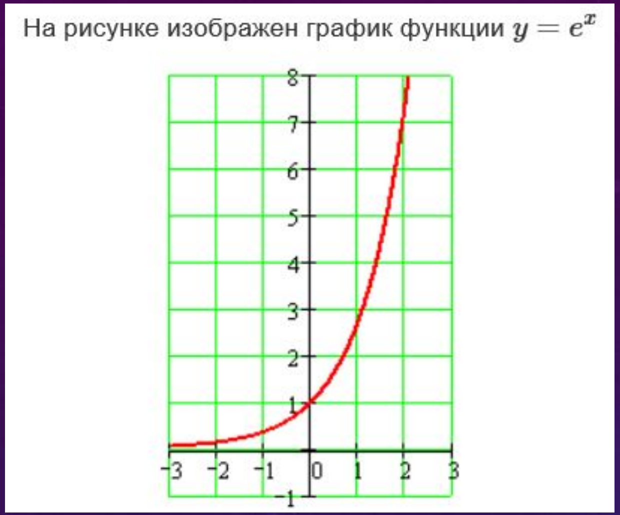
Эскиз графика функции $|\ln x|$ получится из исходного отражением части кривой, лежащей ниже оси Ox симметрично вверх.

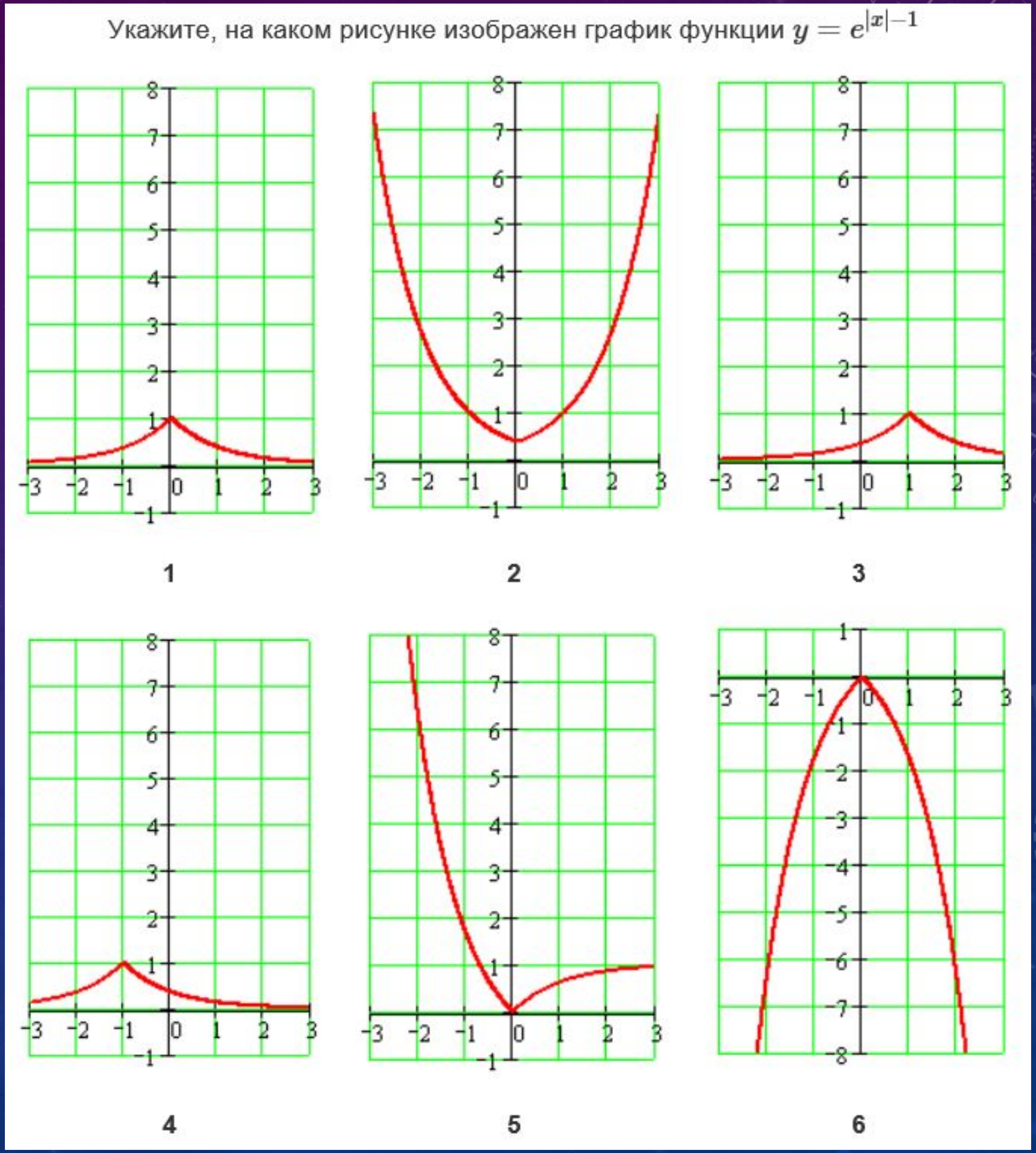


Эскиз графика функции $\ln(|x|)$ получится из исходного сохранением части кривой, лежащей справа от оси Oy, и её симметричным отражением влево от оси Oy.



ЗАДАЧА

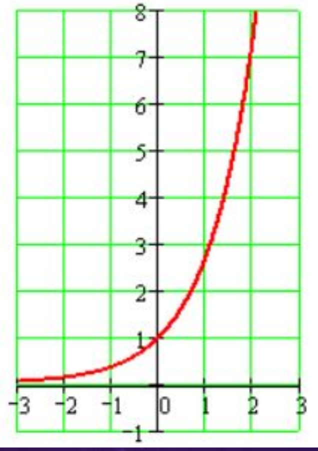




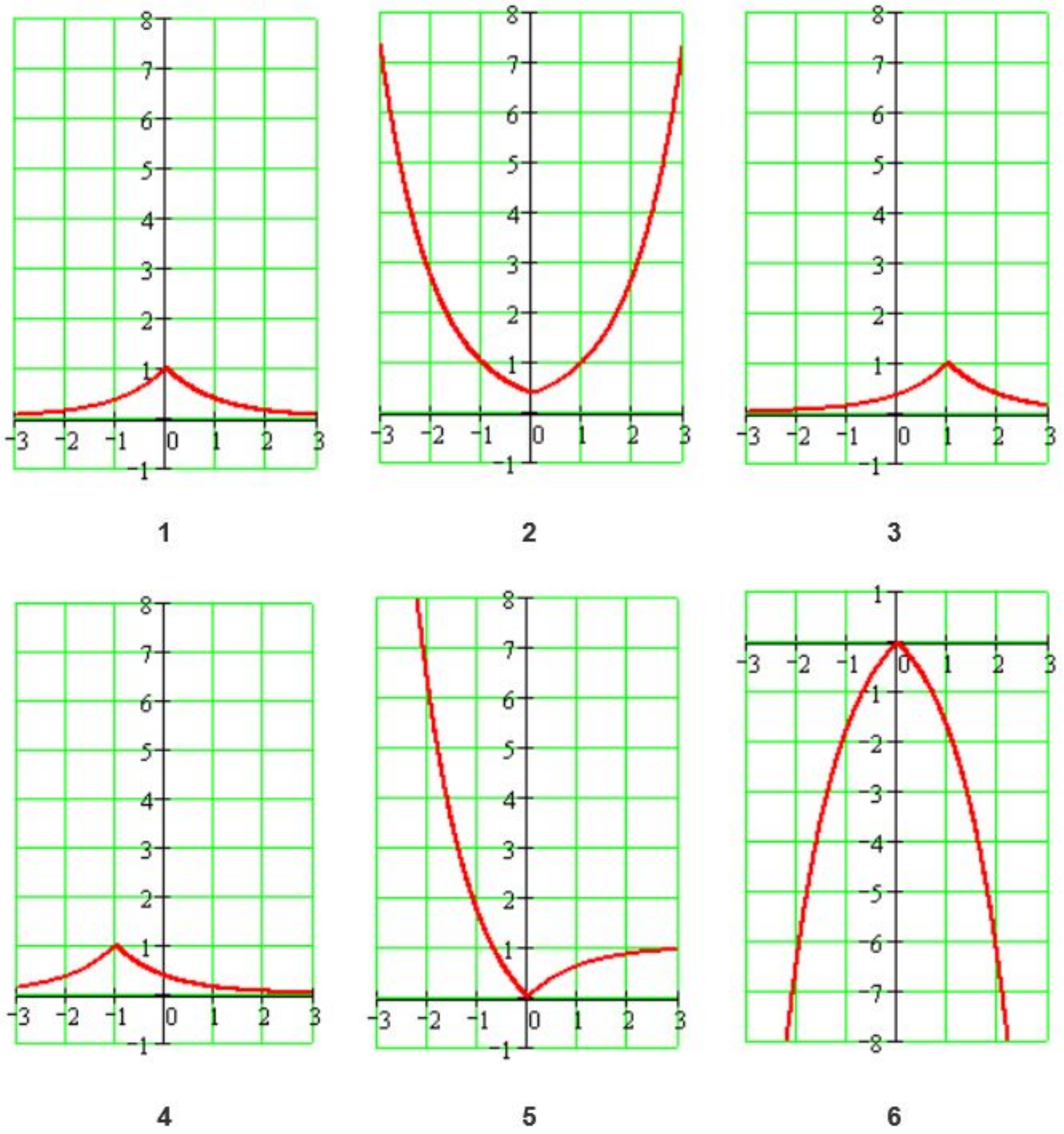
Ответ 2

ЗАДАЧА

На рисунке изображен график функции $y = e^{x}$



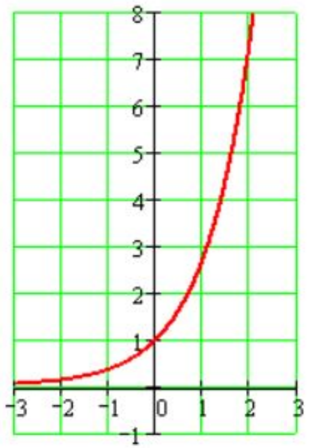
Укажите, на каком рисунке изображен график функции $y = e^{-|x+1|}$



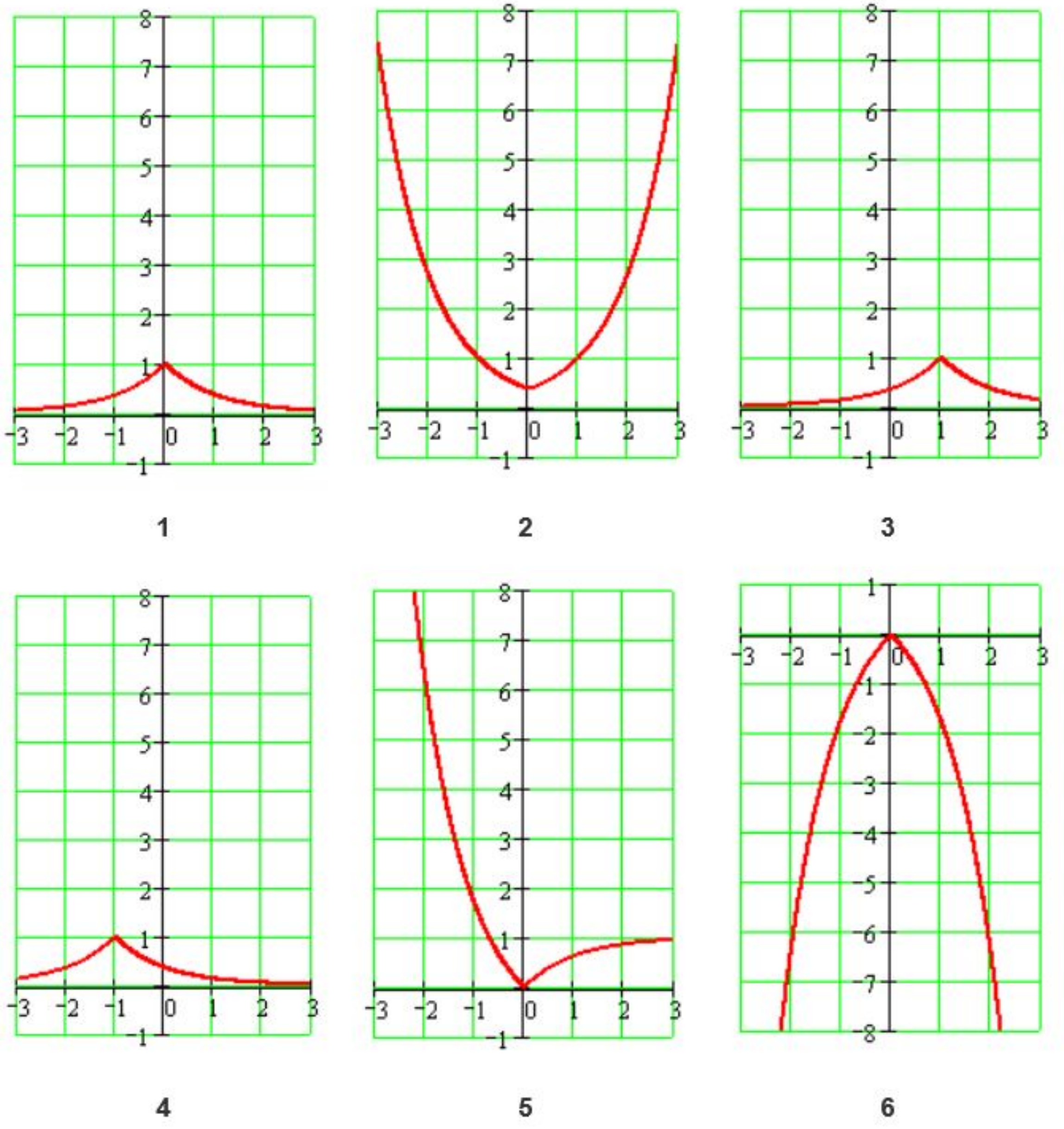
Ответ 4

ЗАДАЧА

На рисунке изображен график функции $y = e^{x}$



Укажите, на каком рисунке изображен график функции $y = |e^{-x} - 1|$



Ответ 5

СЛОЖЕНИЕ ГРАФИКОВ

Для построения эскиза графика суммы функций, нужно построить эскиз графика каждого слагаемого, а затем, каждой абсциссе поставить в соответствие точку с ординатой, равной сумме соответствующих ординат графиков слагаемых.

Например, найдем эскиз графика функции

$$F(x) = x + \sin x.$$

Построим эскизы графиков $f(x) = \sin x$ и $g(x) = x$ и найдем искомый график как сумму эскизов графиков этих функций, складывая ординаты в каждой точке.

В точках $x = \pi k$ функция $f(x)$ принимает нулевые значения, следовательно, в этих точках, значение суммы ординат графиков равно ординате графика функции $g(x)$, то есть, равно πk.

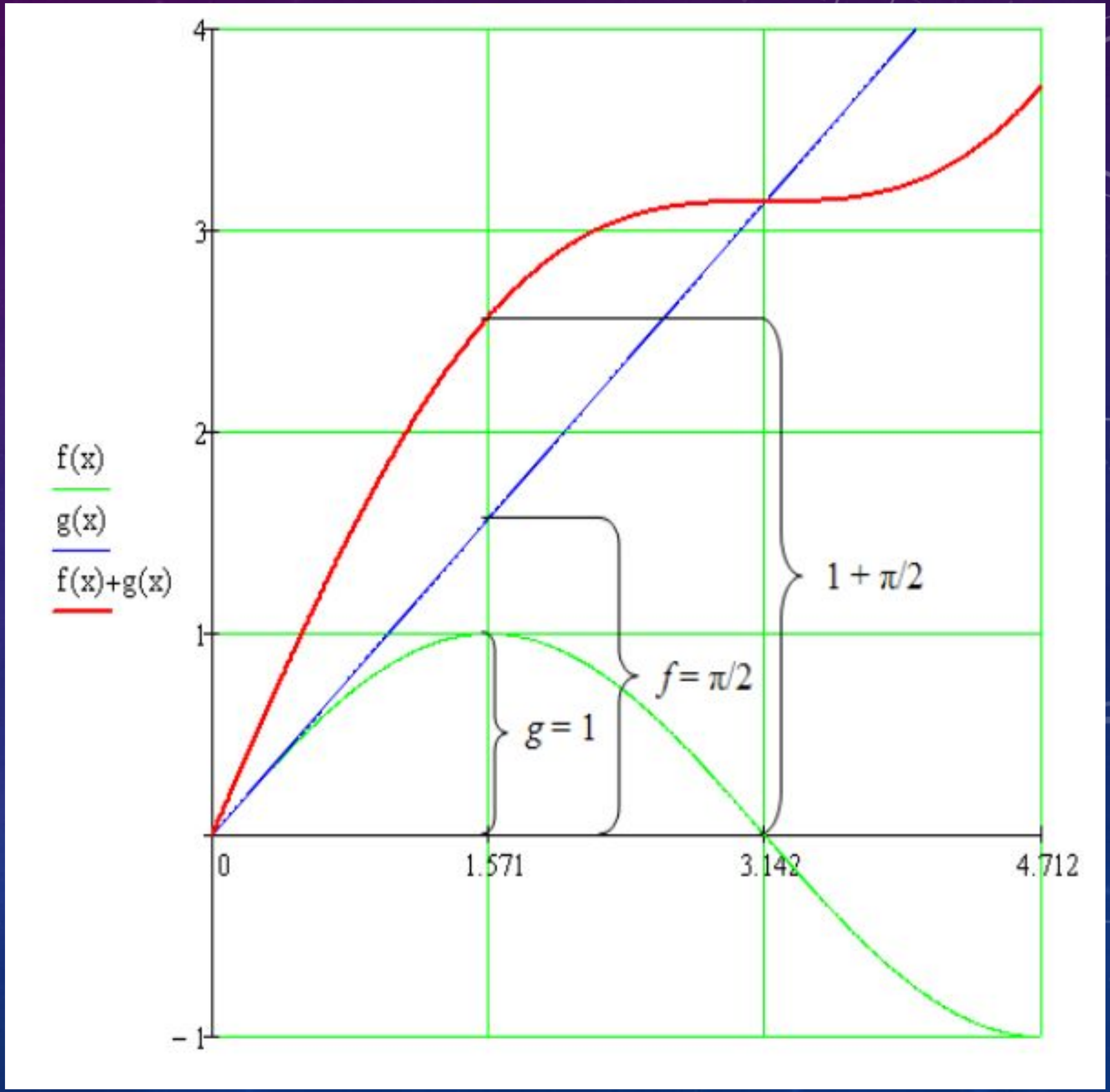
В точке $x = \frac{\pi}{2}$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \text{ и } g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2},$$

ордината искомого графика равна сумме этих ординат:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) + g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + \frac{\pi}{2} \approx 2,57.$$

Аналогично, в точках $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ордината суммы графиков равна $f(\frac{\pi}{2} + 2\pi k) + g(\frac{\pi}{2} + 2\pi k) = 1 + \frac{\pi}{2} + 2\pi k.$

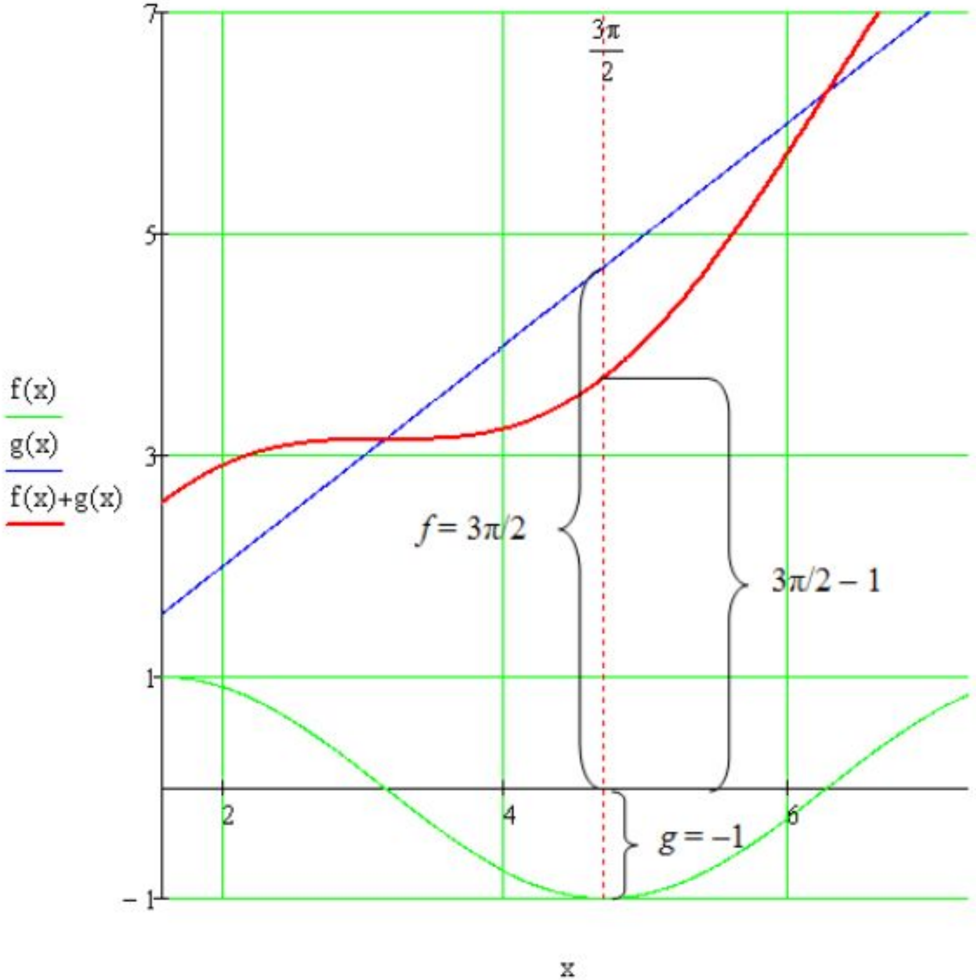


В точке $x = \frac{3\pi}{2}$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin\frac{3\pi}{2} = -1 \text{ и } g\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2},$$

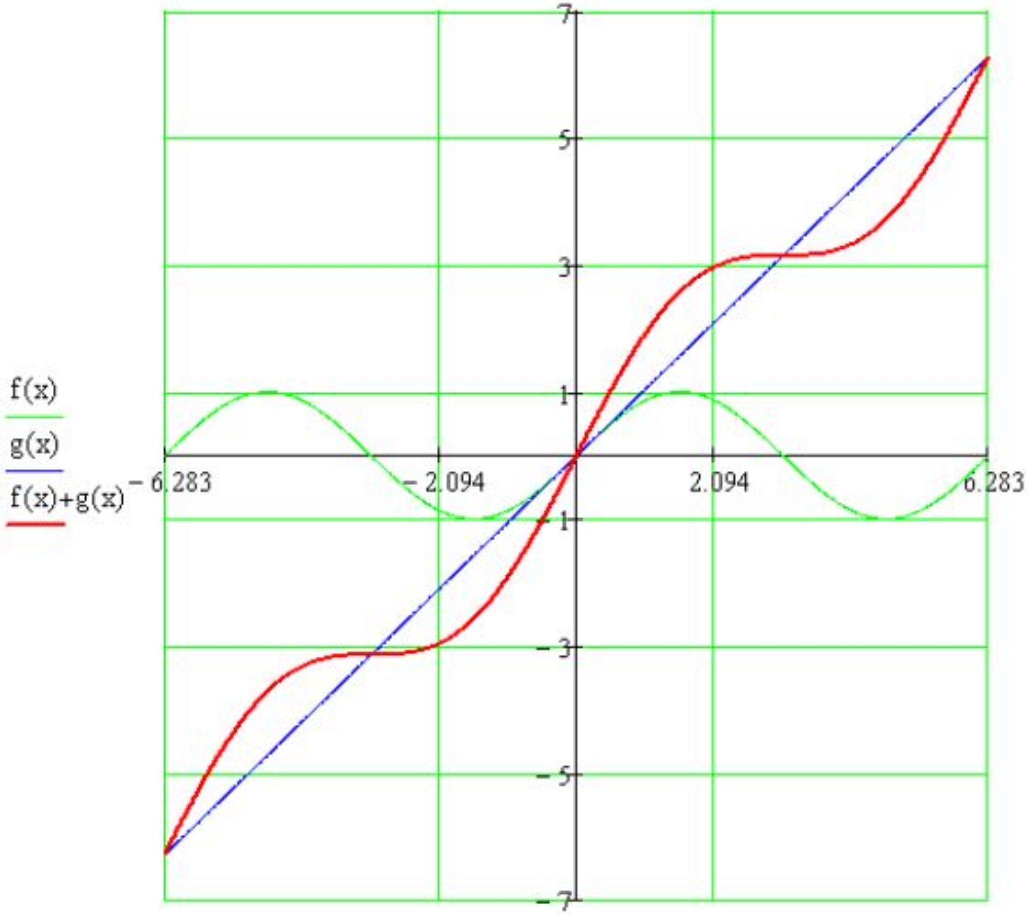
ордината искомого графика равна сумме этих ординат:

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) + g\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 + \frac{3\pi}{2} \approx 3,71.$$



Аналогично, в точках $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$ ордината суммы графиков равна $f\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right) + g\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right) = -1 + \frac{3\pi}{2} + 2\pi k.$

Искомый график имеет вид:



РАЗНОСТЬ ГРАФИКОВ

Аналогично строится эскиз графика разности и произведения.

Например, построим эскиз графика разности

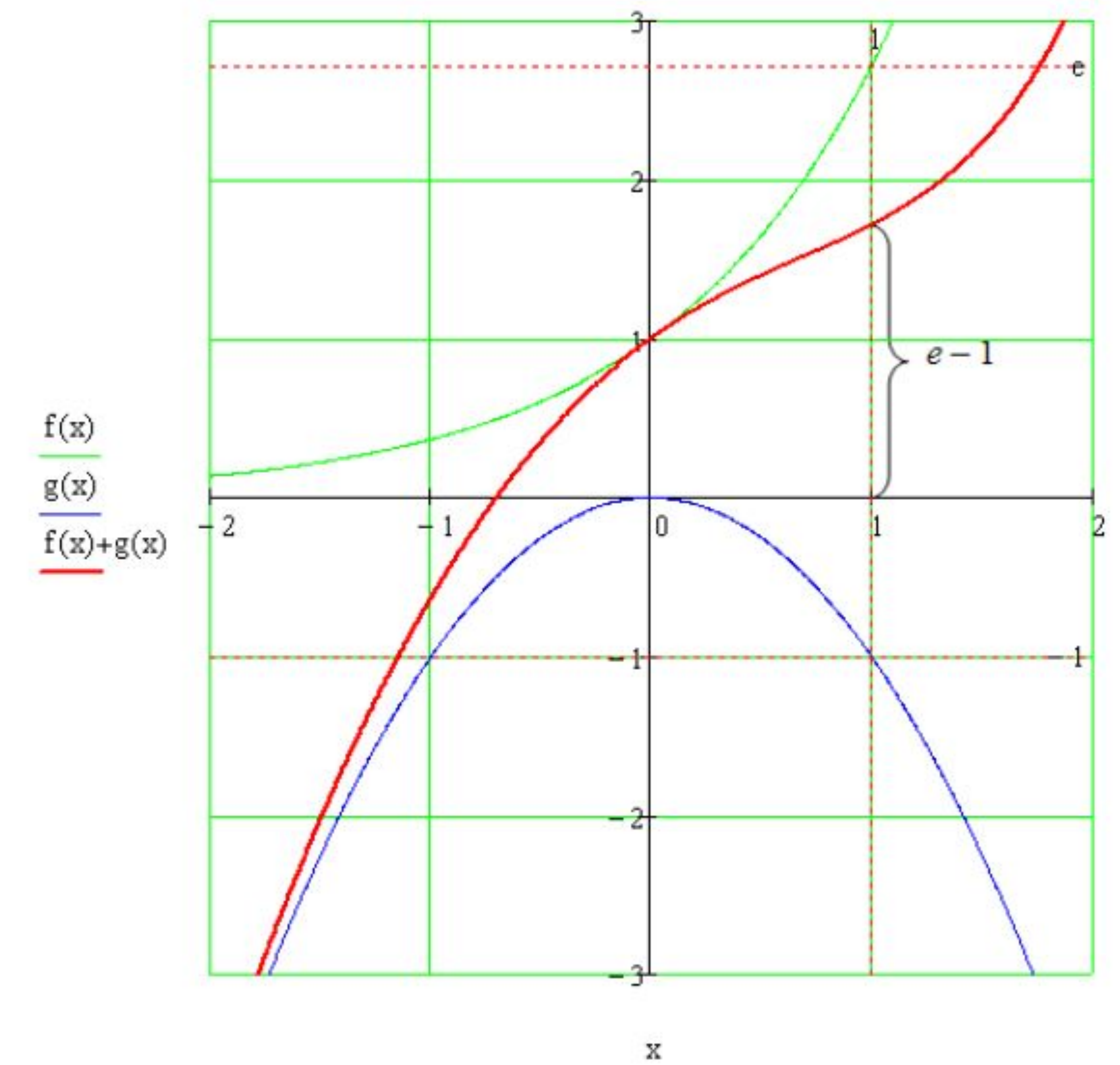
$$F(x) = e^x - x^2.$$

Сначала представим функцию как сумму функций $f(x) = e^x$ и $g(x) = -x^2$, построим эскиз каждой, при этом для построения эскиза графика функции g отобразим график функции x^2 вниз относительно оси Ox.

Искомый эскиз найдем, как сумму эскизов графиков f и g.

При $x = 0$, ордината искомого графика равна
$f(0) + g(0) = e^0 + 0^2 = 1.$

При $x = 1$, ордината равна
$f(1) + g(1) = e^1 - 1^2 = e - 1 \approx 1,72.$



ПРОИЗВЕДЕНИЕ ГРАФИКОВ

Найдем эскиз произведения $F(x) = -x^2 e^x$.

Построим эскизы графиков функций $f(x) = e^x$ и $g(x) = -x^2$, и для каждой абсциссы определим ординату точки искомого графика, как произведение ординат графиков f и g.

Так в начале координат при $x = 0$ искомая ордината равна нулю, как произведение

$$f(0)\,g(0) = -e^0 \cdot 0^2 = 0.$$

В точке с абсциссой $x = 1$, ордината определяется произведением

$$f(1)\,g(1) = -e^1 \cdot 1^2 = -e.$$

В точке с абсциссой $x = -1$, ордината равна

$$f(1)\,g(1) = -e^{-1} \cdot (-1)^2 = -\frac{1}{e} \approx -0,37,$$

в $x = -2$ ордината равна

$$f(-2)\,g(-2) = -e^{-2} \cdot (-2)^2 = -\frac{4}{e^2} \approx -0,54.$$

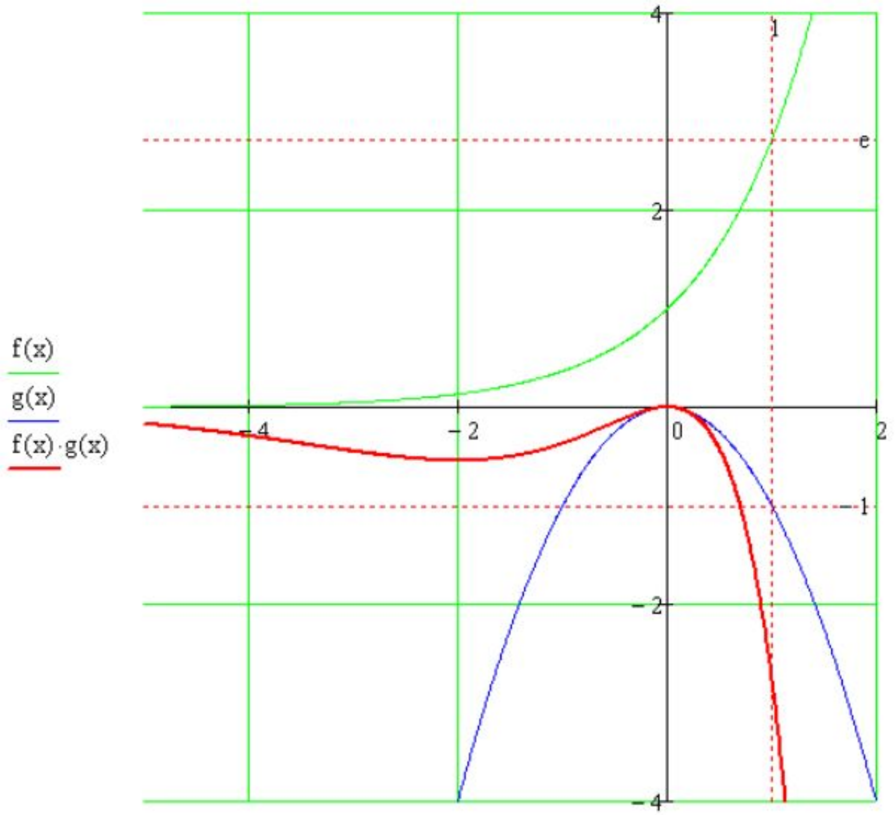
Для определения вида кривой в бесконечно удаленных точках выясним, как ведут себя функции f и g при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$.

При $x \to +\infty$ функция $f(x) = e^x \to +\infty$, а функция $g(x) = -x^2 \to -\infty$, следовательно, произведение $F(x) \to -\infty$.

При $x \to -\infty$ функция $f(x) = e^x \to +0$ (то есть, к нулю с положительными значениями), а функция $g(x) = -x^2 \to -\infty$.

Произведение этих функций будет стремиться к нулю, так как скорость убывания функции f быстрее скорости возрастания по абсолютной величине функции g (убедимся в этом при изучении темы «предел функции действительной переменной»).

Искомый эскиз имеет следующий вид:



ЭСКИЗ СУПЕРПОЗИЦИИ ФУНКЦИЙ

Для построения эскиза графика суперпозиции функций $f(g(x))$, необходимо, определив область определения функции, сначала построить график функции $g(x)$, а затем каждой абсциссе области определения поставить в соответствие ординату $y = f(g(x))$.

Найдем эскиз графика $F(x) = e^{-x^2}$.

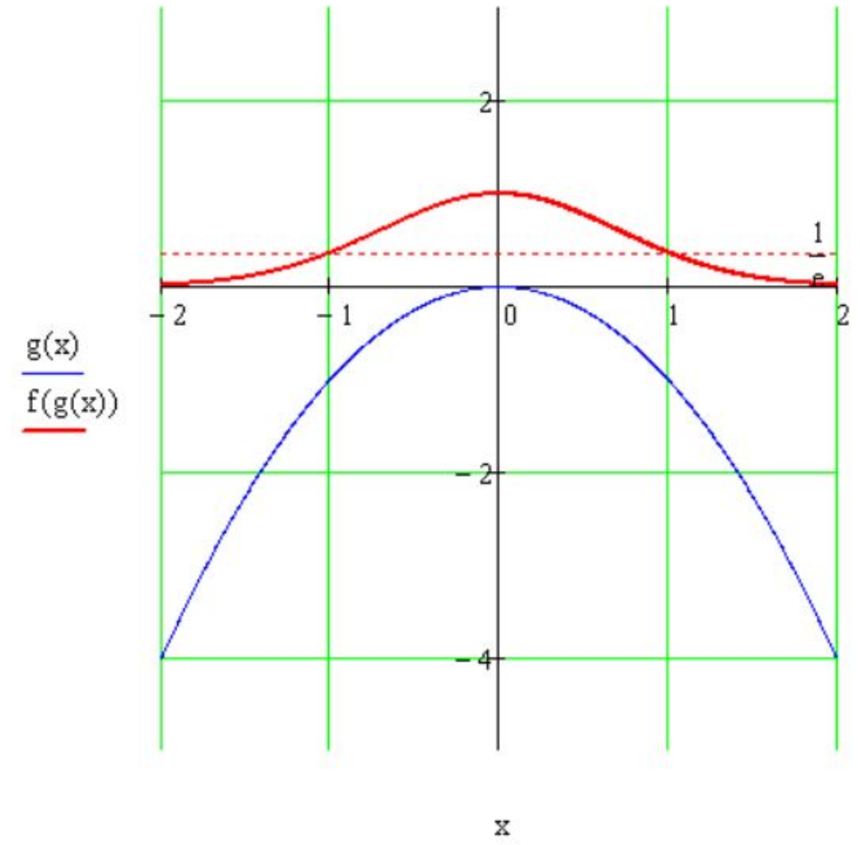
Функция определена на всей числовой оси.

Для нахождения координат некоторых точек графика составим таблицу:

x	–2	–1	0	1	2
$g(x) = -x^2$	–4	–1	0	1	4
$f(g(x)) = e^{g(x)}$	$\frac{1}{e^4}$	$\frac{1}{e}$	1	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{e^4}$

При $x \to \pm\infty$ функция $g(x) \to -\infty$, а функция $f(g(x)) = e^{g(x)} \to 0$ и принимает положительные значения.

Искомый график выглядит следующим образом



ЭСКИЗ ГРАФИКА СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Найдем эскиз графика функции $f(x) = \ln \sin x$.

Область определения находим из неравенства
$\sin x > 0 \Leftrightarrow \quad 2\pi k < x < \pi(2k+1), \quad k \in \mathbf{Z}$

При $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ функция $g(x) = \sin x$ принимает значения равные 1, в этих точках функция $f(g(x)) = \ln g$ равна нулю.

Так как для всех $2\pi k < x < \pi(2k+1), \quad k \in \mathbf{Z}$ значения функции g удовлетворяют неравенству $0 < g(x) < 1$, то все значения функции f неположительны.

В граничных точках области определения, когда значения $g(x) \to 0$, значения $f(g(x)) \to -\infty$.

Искомый график выглядит следующим образом: