



# Электричество и магнетизм

## Лекция 12

## Магнетики

17 ноября 2021 года

Лектор: доцент НИЯУ МИФИ,  
Ольчак Андрей Станиславович

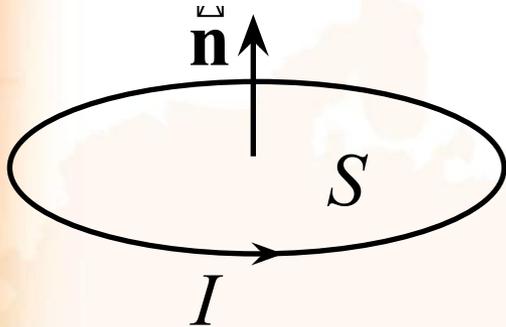


## Точечный магнитный диполь

контур с током  $I$ , малой площади  $S$ .

Магнитный дипольный момент

(определение):  $\mathbf{p}_m = IS\mathbf{n}$

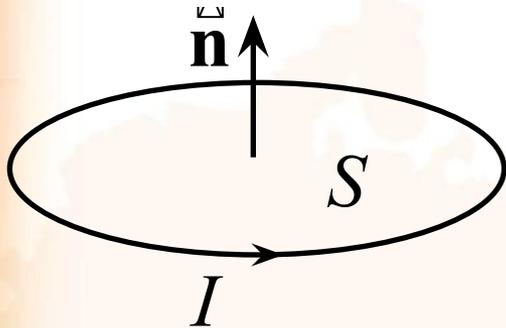


Направление нормали  $\mathbf{n}$  и дипольного момента  $\mathbf{p}_m$  определяется  
Правилом Правого Винта.

Небольшая катушка, имеющая  $N$  витков, имеет магнитный момент

$$\mathbf{p}_m = NIS\mathbf{n}$$

## Магнитное поле точечного магнитного диполя

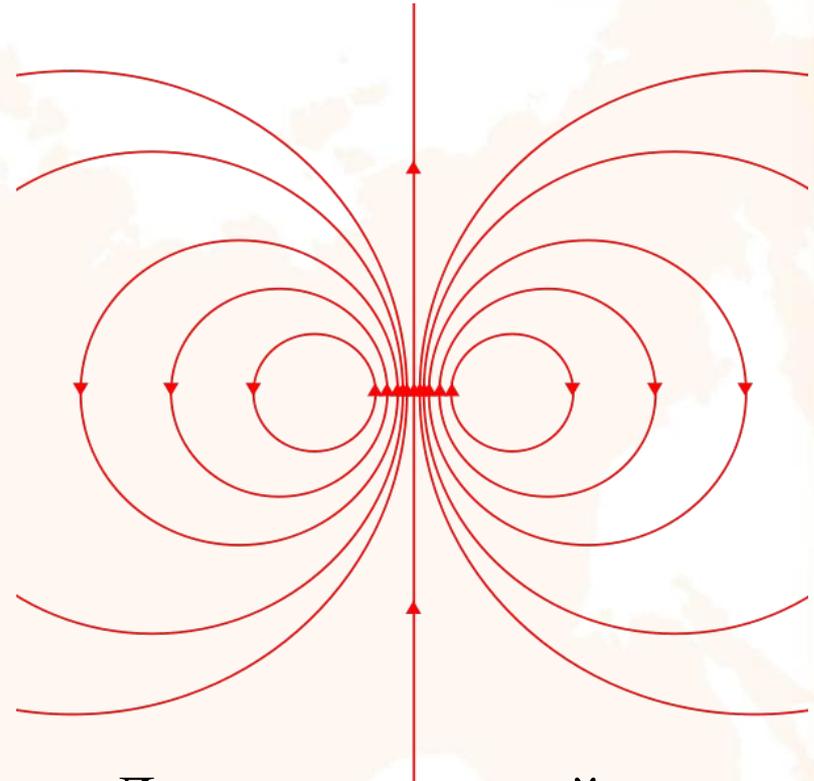


Магнитный дипольный момент

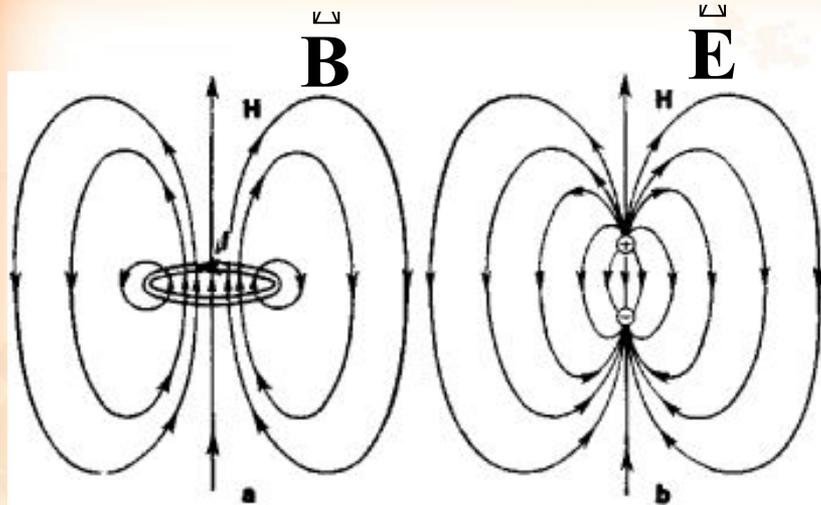
$$\vec{p}_m = IS\vec{n}$$

$$r \gg R$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left\{ \frac{3(\vec{p}_m \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{p}_m \right\}$$



Линии магнитной индукции  
магнитного диполя

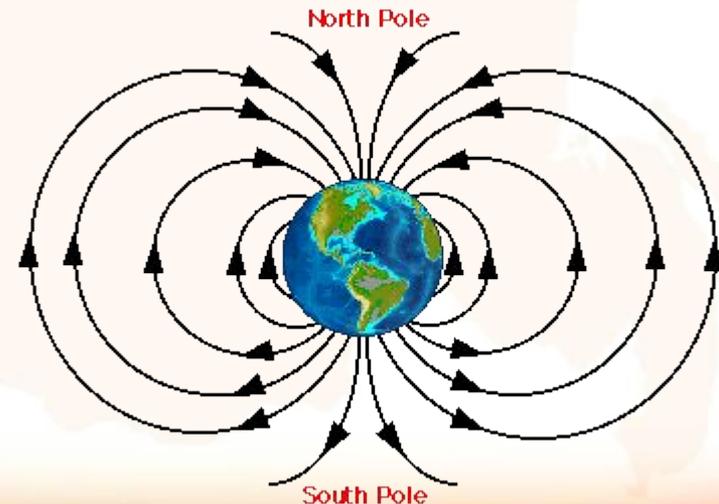


Аналогия между магнитным и электрическим диполями

Приблизительная картина магнитного поля Земли

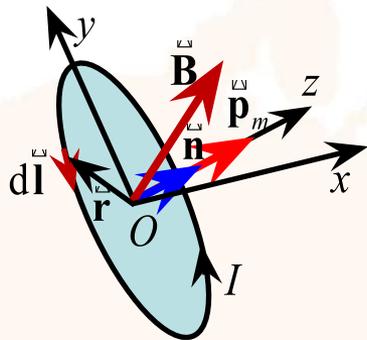
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left\{ \frac{3(\vec{p}_m \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{p}_m \right\}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left\{ \frac{3(\vec{d} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{d} \right\}$$





## Контур с током в однородном магнитном поле



Сила действующая на диполь  $F = 0$

Момент силы, действующей на элемент тока:  $dM = Idl(r, B)$

Момент силы, действующей на контур (магнитный диполь)

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \times \vec{B}]$$

Потенциальная энергия магнитного диполя в магнитном поле:

$$w = -p_m B \cos \varphi = -(\vec{p}_m \cdot \vec{B})$$

Полная аналогия с электрическим диполем:  $w = -(\vec{p} \cdot \vec{E})$



## Контур с током в неоднородном магнитном поле

Сила действующая на диполь

$$\mathbf{F} = -\text{grad } U = \text{grad} (\mathbf{p}_m, \mathbf{B}) = (\mathbf{p}_m, \text{grad})\mathbf{B}$$

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p}_m \cdot \nabla) \mathbf{B} = p_{mx} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} + p_{my} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} + p_{mz} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z}$$

Формулы для момента силы и энергии магнитного диполя одинаковы для однородного и неоднородного полей.

Как правило свободный магнитный диполь втягивается в область более сильного магнитного поля.



# Магнетики

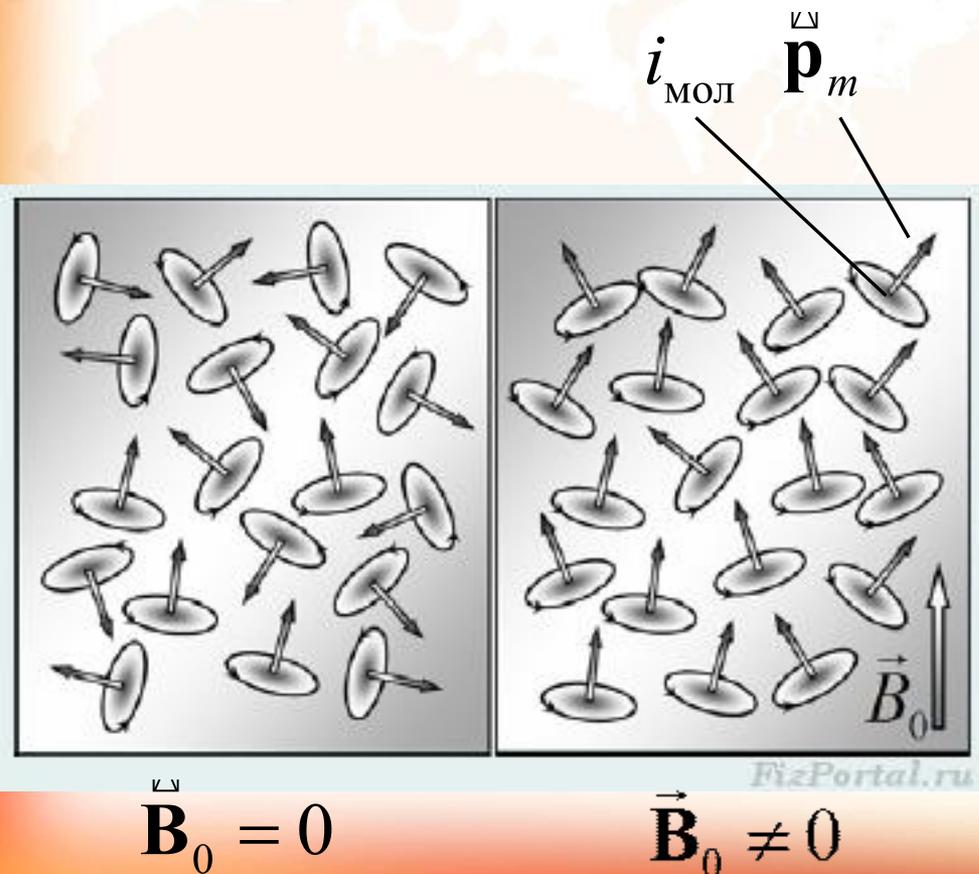


Магнетики: вещества, способные в той или иной степени намагничиваться во внешнем магнитном поле и менять величину этого поля. .

Внешнее поле  $B$  может *намагнитить* вещество, заставить его создать собственное магнитное поле.

Что именно поле  $B$  может делать с атомами среды, если каждый атом = точечный магнитный диполь (или сумма нескольких совмещенных диполей)?

Что поле  $\vec{B}$  может делать с атомами среды, если каждый атом = точечный магнитный диполь (или сумма нескольких совмещенных диполей)?



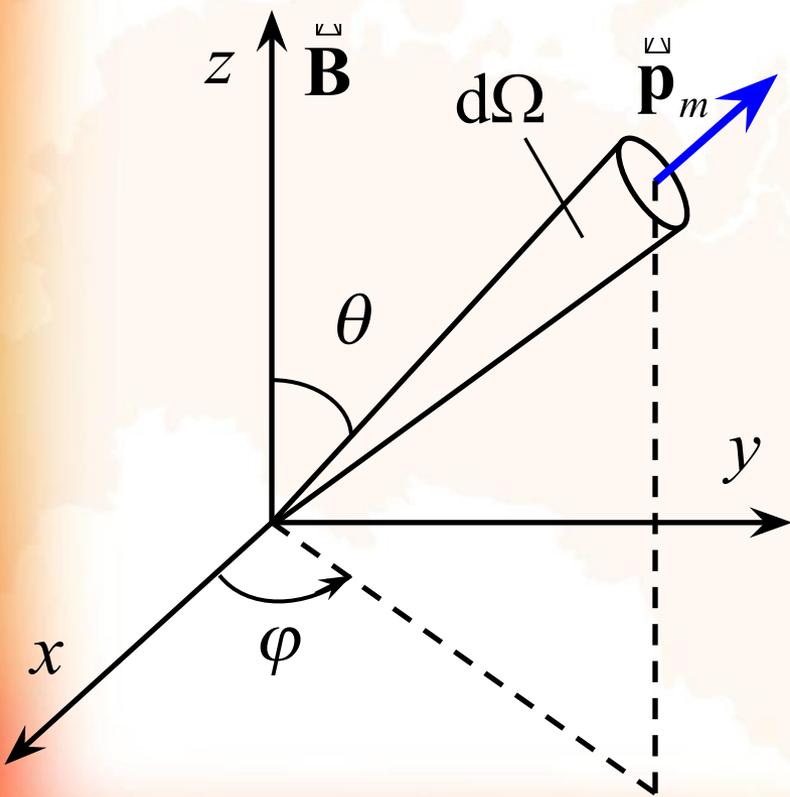
1. Поле может пытаться повернуть моменты атомов в свою сторону.

Поле в среде при этом усилится!

Тепловое движение препятствует этому усилению.



Что поле  $\mathbf{B}$  может делать с атомами среды, если каждый атом = точечный магнитный диполь (или сумма нескольких совмещенных диполей)?



2. Поле может заставить молекулы прецессировать подобно «раскрученным волчкам» вокруг направления вектора  $\mathbf{B}$ . Поле прецессирующих волчков направлено против порождающего прецессию поля, которое в среде ослабнет)  
Этому эффекту больше подвержены атомы, собственные моменты которых скомпенсированы (= 0):



# Магнетики



В зависимости от того, какой эффект преобладает, магнитное поле в веществе может быть как слабее, так и сильнее, чем оно было-бы в вакууме.. .

$$\text{Поле в магнетике: } \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}_0 + \vec{\mathbf{B}}'$$

$\vec{\mathbf{B}}_0$  - внешнее магнитное поле,  $\vec{\mathbf{B}}'$  - поле вещества

$$\text{В изотропном магнетике: } \mathbf{B}' = \chi \mathbf{B}_0; \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{B}_0$$

$\chi$  - магнитная восприимчивость данного магнетика

$\mu$  - магнитная проницаемость данного магнетика.

Значения  $\mu$  могут быть как больше, так и меньше единицы, а значения  $\chi$  - как больше, так и меньше нуля.



# Классификация магнетиков

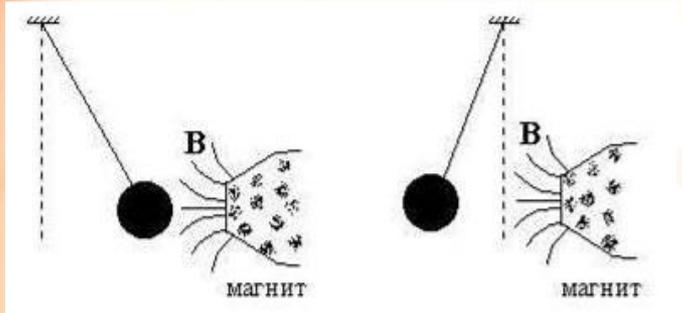


**Парамагнетики** – вещества, приобретающие магнитный момент, сонаправленный с внешним магнитным полем и усиливающий его  
 $\mu_{\text{пара}} > 1$  ( $\sim 1,000xxx$ );  $0 < \chi_{\text{пара}} \ll 1$  ( $\sim 10^{-(4-5)}$ )

**Диамагнетики** – вещества, приобретающие в поле магнитный момент, направленный против внешнего магнитного поля

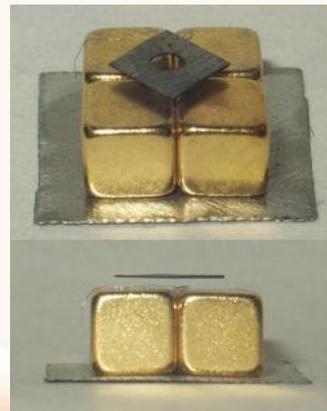
$\mu_{\text{диа}} < 1$  ( $\sim 0,999xxx$ )  
 $\chi_{\text{диа}} < 0$   $|\chi_{\text{диа}}| \ll 1$  ( $\sim 10^{-(4-5)}$ )

Особый случай - **ферромагнетики** и антиферромагнетики –  
- про них потом...



Парамагнетики  
втягиваются в область  
большого поля (а),  
Диамагнетики  
выталкиваются из  
него (б)

Левитация живой лягушки в поле 16Тл  
(Андрей Гейм и Майкл Берри –  
«Шнобелевская» премия (IgNoble Prize) 2000 г.)



Левитация  
пиролитического  
углерода



1 H 2 He

3 Ферромагнетик 4 Антиферромагнетик

5 Парамагнетик 6 Диамагнетик

3	4											5	6	7	8	9	10
Li	Be											B	C	N	O	F	Ne
11	12											13	14	15	16	17	18
Na	Mg											Al	Si	P	S	Cl	Ar
19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
K	Ca	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Ga	Ge	As	Se	Br	Kr
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
Rb	Sr	Y	Zr	Nb	Mo	Tc	Ru	Rh	Pd	Ag	Cd	In	Sn	Sb	Te	I	Xe
55	56	57	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86
Cs	Ba	La	Hf	Ta	W	Re	Os	Ir	Pt	Au	Hg	Tl	Pb	Bi	Po	At	Rn
87	88	89															
Fr	Ra	Ac															

58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
Ce	Pr	Nd	Pm	Sm	Eu	Gd	Tb	Dy	Ho	Er	Tm	Yb	Lu

Периодическая таблица элементов и различные типы намагничивания при комнатной температуре.



## Магнитное поле в среде



Для описания магнитного поля в средах используют не только вектор магнитной индукции  $\mathbf{B}$  (ед измерения - Тл (Тесла), но и вектор напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$ . (ед. измерения - А/м)

В вакууме  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ .  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Н/А<sup>2</sup> – магнитная постоянная

В изотропной среде  $\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}$ .

Аналогия с электрическим полем:

в вакууме  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$ , в изотропной среде  $\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}$ .



При рассмотрении *электрических* явлений в диэлектриках разделяют заряды **связанные** (внутримолекулярные) и **сторонние** (внешние, создающие в среде избыточный заряд).

При изучении явлений *магнитных* различают токи:

- **Молекулярные** токи, обусловленные движением электронов в оболочках атомов (а также электронными и ядерными спинами)
- **Токи проводимости** обусловленные дрейфом свободных зарядов.

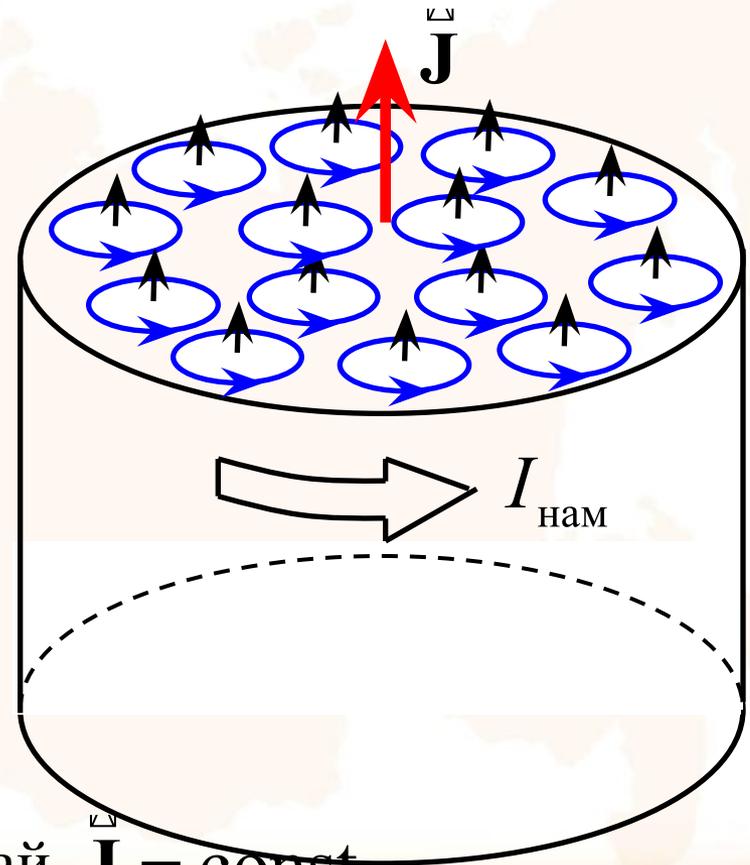
По аналогии с вектором поляризованности диэлектрика  $\mathbf{P}$ , вводится вектор намагниченности магнетика  $\mathbf{J} =$  усредненное значение вектора магнитного момента атомов среды в данной точке

$$\mathbf{J} = \frac{\sum \mathbf{p}_{mi}}{\Delta V} \quad \frac{\text{А}}{\text{М}}$$

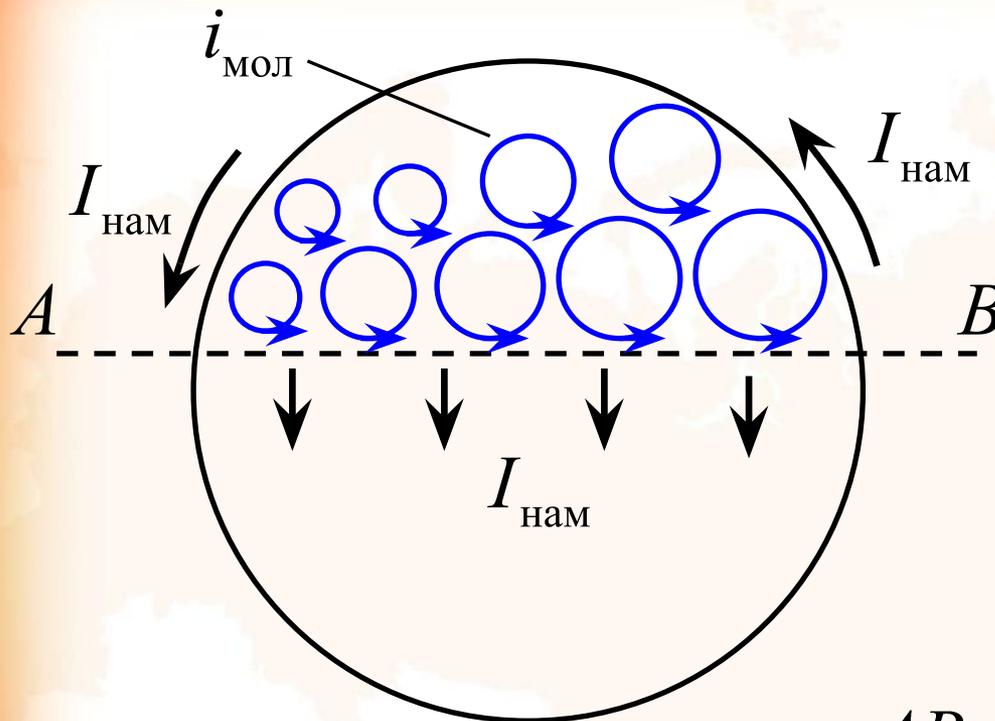
## Вектор намагниченности магнетика

$$\vec{J} = \frac{\sum_{mi} \vec{p}_{mi}}{\Delta V} \quad \frac{\text{А}}{\text{М}}$$

Молекулярные токи на поверхности магнетика создают макроскопический ток  $I_{\text{нам}}$ , называемый током намагничивания



Случай  $\vec{J} = \text{const}$



Если магнетик намагничен неоднородно, то и в глубине его могут течь макроскопические объемные молекулярные токи.

$$\mathbf{j}_{\text{МОЛ}} = \frac{dI_{\text{МОЛ}}}{dS_{\perp}}$$

$$AB: I_{\text{МОЛ}} = \int_{S_{AB}} \mathbf{j}_{\text{МОЛ}} \cdot \mathbf{dS} = 0$$

Случай  $\vec{\mathbf{J}} \neq \text{const}$



$$\left[ \nabla \times \vec{B}' \right] = \mu_0 \vec{j}_{\text{мол}}$$

$$\left[ \nabla \times \vec{B}_{\text{пров}} \right] = \mu_0 \vec{j}$$

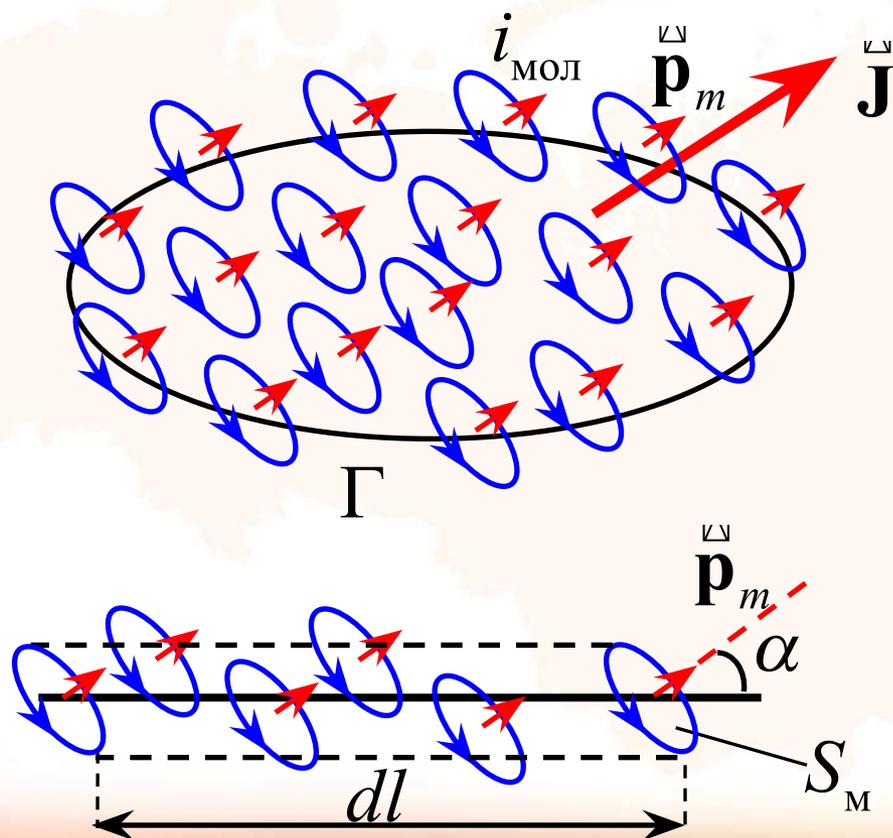
$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}' \Rightarrow$$

$$\left[ \nabla \times \vec{B} \right] = \mu_0 \left( \vec{j}_{\text{пров}} + \vec{j}_{\text{мол}} \right)$$

Аналогично характеристикам электрического поля, индукция и напряжённость магнитного поля связаны с разными токами. .

$$H = B / \mu_0 \mu = B_0 / \mu_0$$
$$\text{rot } H = \vec{j}_{\text{пров}}$$

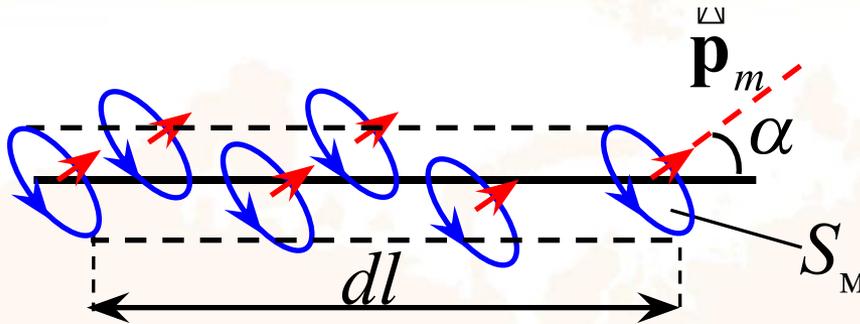
## Связь между намагниченностью и плотностью молекулярных токов



$$\vec{p}_m \parallel \vec{J}$$

Вклад в молекулярный ток  $I_{\text{МОЛ}}$  дают только те молекулы, площадь которых «нанизана» на контур.

$$dV = S_M dl \cos \alpha$$



$$dI_{\text{МОЛ}} = i_{\text{МОЛ}} ndV =$$

$$= i_{\text{МОЛ}} n S_M dl \cos \alpha$$

$$p_m = i_{\text{МОЛ}} S_M$$

$$J = np_m = ni_{\text{МОЛ}} S_M \Rightarrow dI_{\text{МОЛ}} = J dl \cos \alpha = (\vec{J} \cdot d\vec{l})$$

$$I_{\text{МОЛ}} = \oint_{\Gamma} (\vec{J} \cdot d\vec{l})$$

$$\oint_{\Gamma} (\vec{J} \cdot d\vec{l}) = \int_S [\nabla \times \vec{J}] \cdot d\vec{S} =$$

$$= I_{\text{МОЛ}} = \int_S \vec{j}_{\text{МОЛ}} \cdot d\vec{S} \Rightarrow$$

$$\vec{j}_{\text{МОЛ}} = [\nabla \times \vec{J}]$$

$$\Rightarrow \vec{J} = \vec{B}' / \mu_0$$



$$[\nabla \times \mathbf{B}] = \mu_0 (\mathbf{j}_{\text{пров}} + \mathbf{j}_{\text{мол}}) = \mu_0 \mathbf{j}_{\text{пров}} + \mu [\nabla \times \mathbf{J}]$$

$$\Rightarrow \mathbf{j}_{\text{пров}} = \frac{1}{\mu_0} [\nabla \times \mathbf{B}] - [\nabla \times \mathbf{J}] = \left[ \nabla \times \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J} \right) \right]$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{J} \quad \frac{\text{А}}{\text{М}}$$

$$[\nabla \times \mathbf{H}] = \mathbf{j}_{\text{пров}}$$



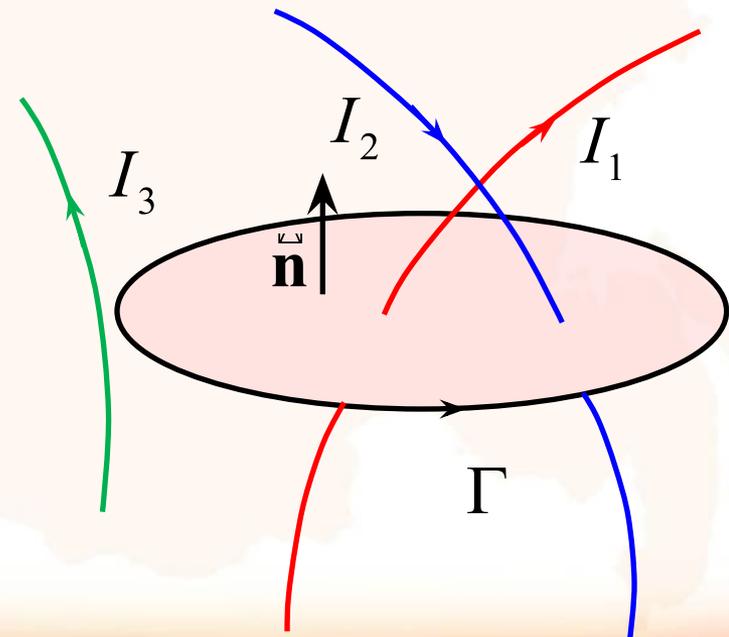
## Циркуляция вектора напряжённости

$$\oint_{\Gamma} (\vec{H} \cdot d\vec{l}) = \int_S [\nabla \times \vec{H}] \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{j}_{\text{пров}} \cdot d\vec{S} = I_{\text{пров}}$$

$$\oint_{\Gamma} (\vec{H} \cdot d\vec{l}) = \sum_i I_{\text{пров}_i}$$

Пример.

$$\oint_{\Gamma} (\vec{H} \cdot d\vec{l}) = \mu_0 (I_1 - I_2)$$





## Магнитная восприимчивость и магнитная проницаемость

Опыт показывает, что в изотропных диа- и парамагнетиках:  $\vec{J} \sim \vec{H}$

$$\boxed{\vec{J} = \chi \vec{H}} \quad \chi - \text{магнитная восприимчивость}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi \vec{H} \Rightarrow \vec{H}(1 + \chi) = \frac{\vec{B}}{\mu_0}, \quad \mu = 1 + \chi$$

$$\boxed{\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu \mu_0}} \quad \mu - \text{магнитная проницаемость}$$

В анизотропном магнетике  $J_i = \sum_{k=1}^3 \chi_{ik} H_k, \quad i, k = x, y, z.$



$$\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{J} = \mathbf{B}/\mu_0 - \chi\mathbf{H} \quad \mathbf{B} = \mu_0(1+\chi)\mathbf{H} = \mu_0\mu\mathbf{H}$$

$\mathbf{B}$  [Тл] – вектор магнитной индукции.

$\mathbf{H}$  [А/м] – вектор напряженности магнитного поля.

$\mu_0 = 2 \cdot 10^{-7}$  Н/А<sup>2</sup> – магнитная постоянная

$\chi$  - магнитная восприимчивость

$\mu = 1 + \chi$  - магнитная проницаемость

$$\oint_{\Gamma} (\vec{\mathbf{H}} \cdot d\vec{\mathbf{l}}) = \sum_i I_{\text{пров},i}$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = \mu_0 \sum_{i=1}^N I_i$$

$$[\nabla \times \vec{\mathbf{H}}] = \vec{\mathbf{j}}_{\text{пров}}$$

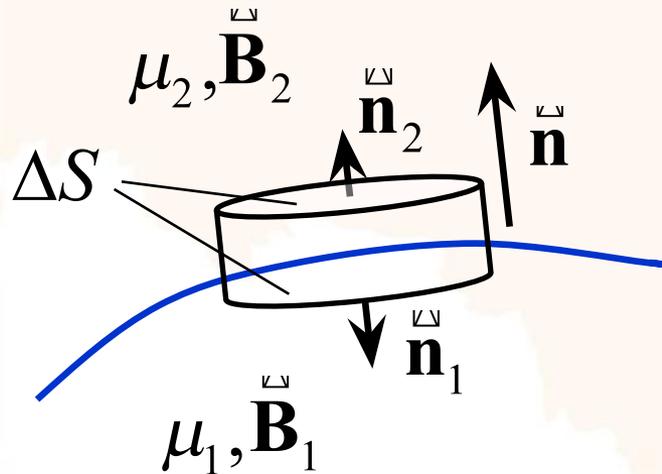
$$[\nabla \times \vec{\mathbf{B}}] = \mu_0 \left( \vec{\mathbf{j}}_{\text{пров}} + \vec{\mathbf{j}}_{\text{мол}} \right)$$



Парамагнетики:  $\chi > 0$      $\mu > 1$      $\vec{\mathbf{J}} \uparrow \uparrow \vec{\mathbf{H}}$

Диамагнетики:  $\chi < 0$      $\mu < 1$      $\vec{\mathbf{J}} \uparrow \downarrow \vec{\mathbf{H}}$

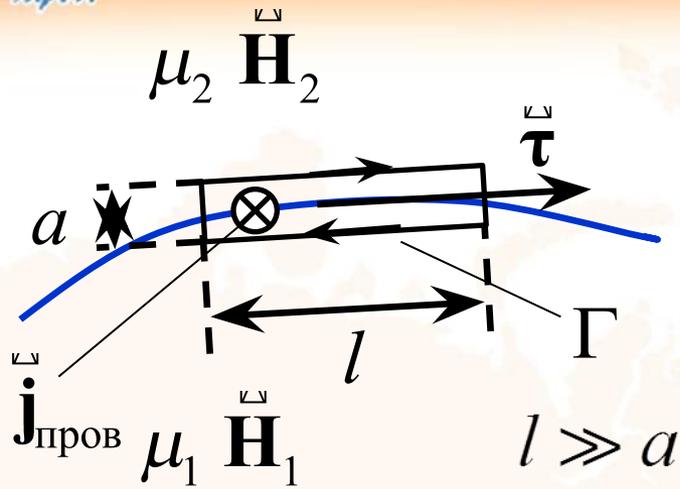
## Условия на границе двух магнетиков



$$\oint_S \vec{\mathbf{B}} d\vec{\mathbf{S}} = 0$$

$$\Rightarrow B_{2n} \Delta S - B_{1n} \Delta S = 0$$

$$B_{1n} = B_{2n}$$



$$\oint_{\Gamma} (\vec{H} \cdot d\vec{l}) = H_{\text{пров}} l - H_{1\tau} l = I$$

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = I' \quad I' = \frac{I_{\text{пров}}}{l}$$

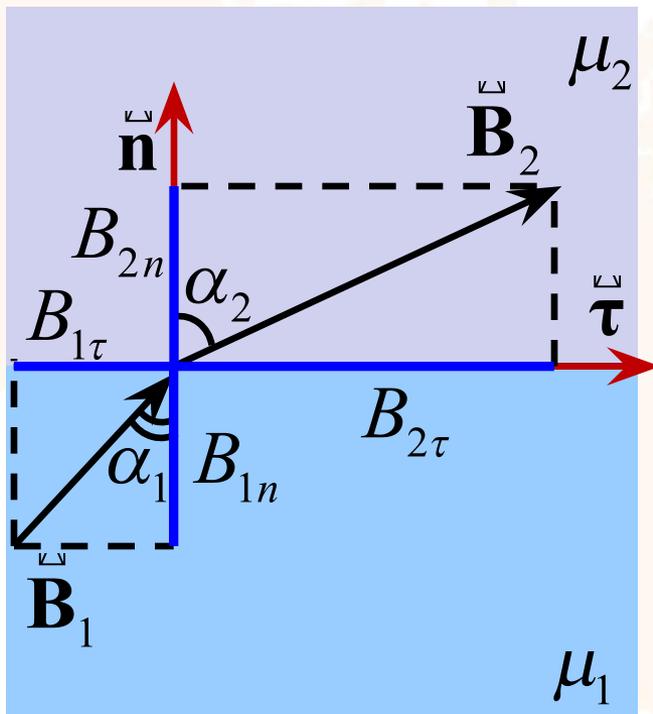
$$I' = 0 \Rightarrow H_{1\tau} = H_{2\tau}$$

$$B_{1n} = B_{2n} \Rightarrow \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$$

$$H_{1\tau} = H_{2\tau} \Rightarrow \frac{B_{1\tau}}{\mu_1} = \frac{B_{2\tau}}{\mu_2}$$



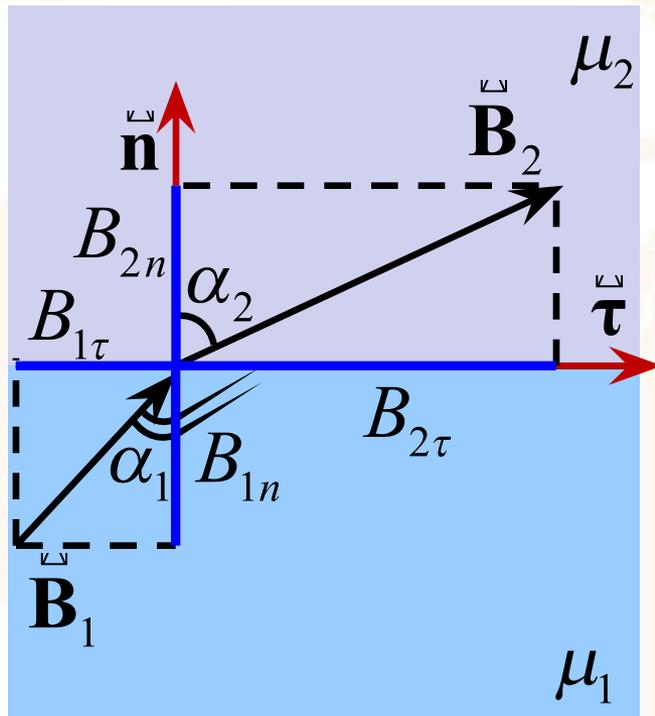
## Преломление линий векторов $\vec{B}$ и $\vec{H}$ на границе двух магнетиков



$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{B_{1\tau}}{B_{1n}}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{B_{2\tau}}{B_{2n}},$$

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{B_{2\tau}}{B_{2n}} \frac{B_{1n}}{B_{1\tau}} = \frac{B_{2\tau}}{B_{1\tau}}$$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$



$$B_{1n} = B_{2n} \Rightarrow \boxed{\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}}$$

$$H_{1\tau} = H_{2\tau} \Rightarrow \boxed{\frac{B_{1\tau}}{\mu_1} = \frac{B_{2\tau}}{\mu_2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}}$$

В реальности, в силу того, что магнитная восприимчивость у пара- и диамагнетиков невелика, эффект преломления линий индукции и напряженности магнитного поля заметен слабо



# Магнетики



Магнетики - вещества, способные в той или иной степени намагничиваться во внешнем магнитном поле. Различаются величинами магнитной проницаемости  $\mu$  и магнитной восприимчивости  $\chi = \mu - 1$

Диамагнетики:  $\chi < 0$ .  $\mu < \sim 1$

Парамагнетики:  $\chi > 0$ .  $\mu > \sim 1$

Ферромагнетики:  $\chi > 0$ .  $\mu \gg 1$



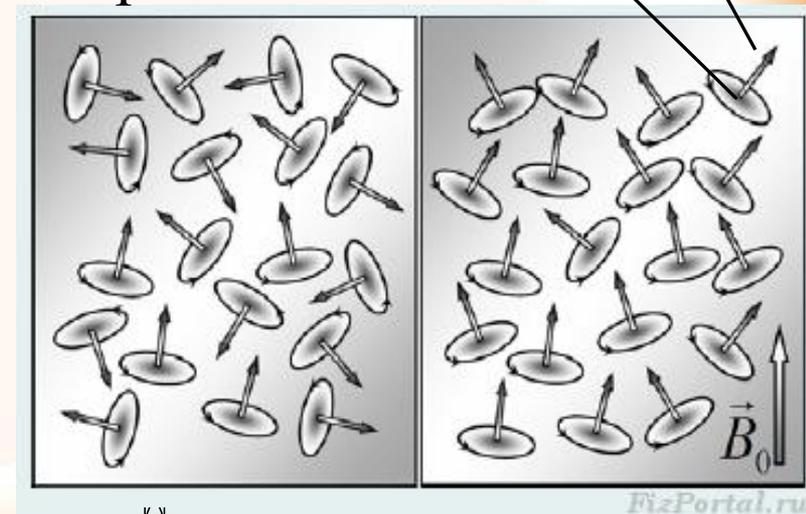
Эксперимент П. Кюри:  $\chi_{\text{пара}} = \frac{C}{T} \Rightarrow J = \chi H \quad \chi = \frac{np_m^2 \mu_0}{3kT}$

Закон Кюри – Вейса для жидких и твёрдых тел:  $\chi_{\text{пара}} = \frac{C}{T - T_0}$

Для жидких и твёрдых тел:  $\chi \sim 10^{-4}$

Модель молекул парамагнетика  $i_{\text{МОЛ}}$   $\vec{p}_m$

1. Магнитная восприимчивость парамагнетиков зависит от температуры
2. Парамагнетики - вещества, у которых собственный магнитный момент атомов не равен нулю.

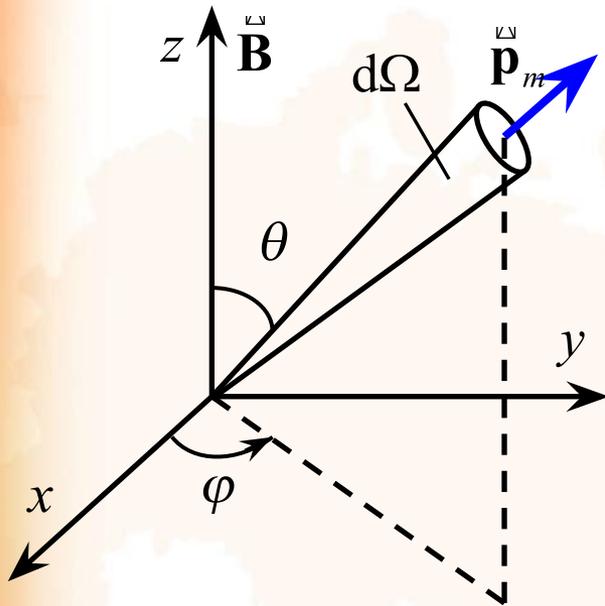


$\vec{B}_0 = 0$

$\vec{B}_0 \neq 0$



Атомы в диамагнетиках подобно гироскопам прецессируют под действием моментов сил вокруг направления вектора  $\mathbf{B}$ .

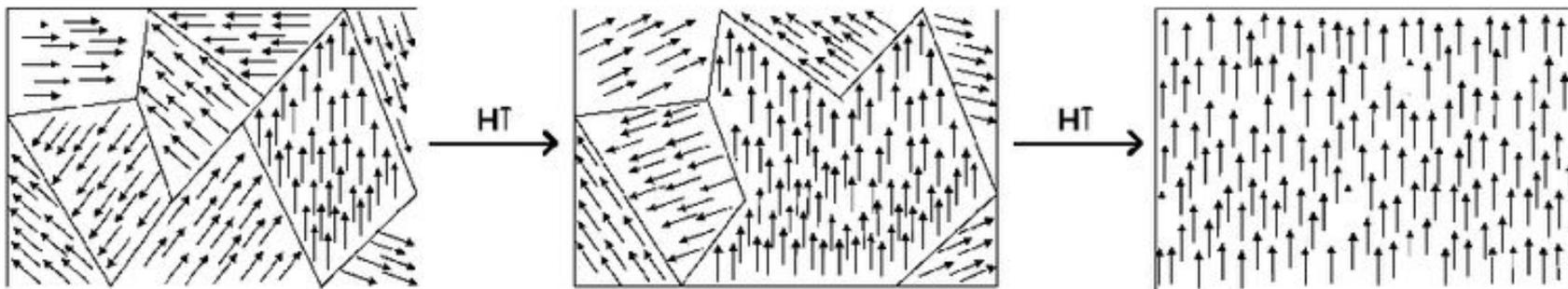


$$\mathbf{J} = \chi \mathbf{H}$$

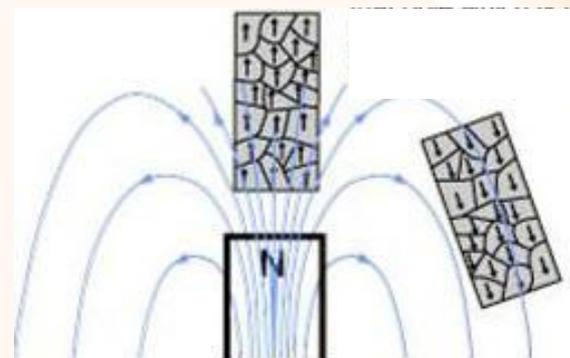
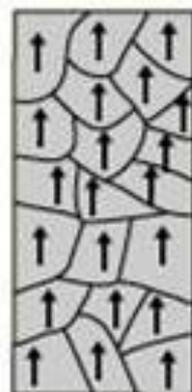
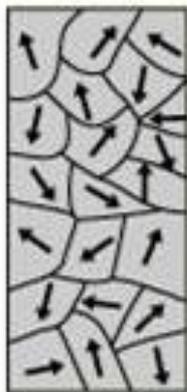
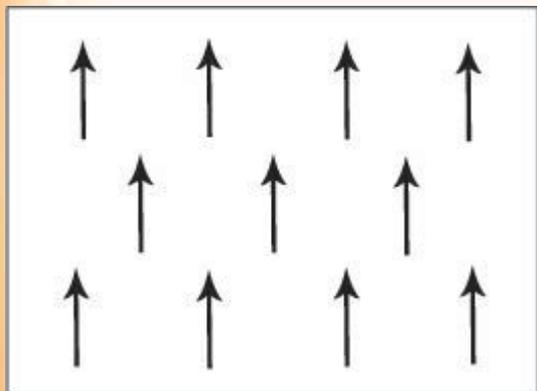
$$\chi = -\frac{\mu_0 n e^2}{6 m_e} \sum_{i=1}^Z \langle R_i^2 \rangle$$

1. Магнитная восприимчивость диамагнетиков не зависит от температуры (П. Кюри, 1895).
2. Диамагнетиками - вещества, у которых собственный магнитный момент атомов равен нулю.

**Особый случай: ферромагнетики (Fe, Ni, Co).** При температуре ниже критической (т.н. температура Кюри) они могут обладать спонтанной намагниченностью даже в отсутствие внешнего магнитного поля. Намагничивание возникает благодаря взаимодействию магнитных моментов электронов из внутренних оболочек атомов (квантовый эффект – т.н. «обменное взаимодействие»). В результате спины и магнитные моменты соседних атомов (в пределах доменов  $\sim 1-10$  мкм) ориентируются параллельно.



Во внешнем поле магнитные моменты доменов ориентируются по полю, создавая намагниченность, которая может превысить внешнее поле в тысячи раз (!). При температурах ниже  $T_{\text{Кюри}}$  намагниченность сохраняется и после отключения внешнего поля.



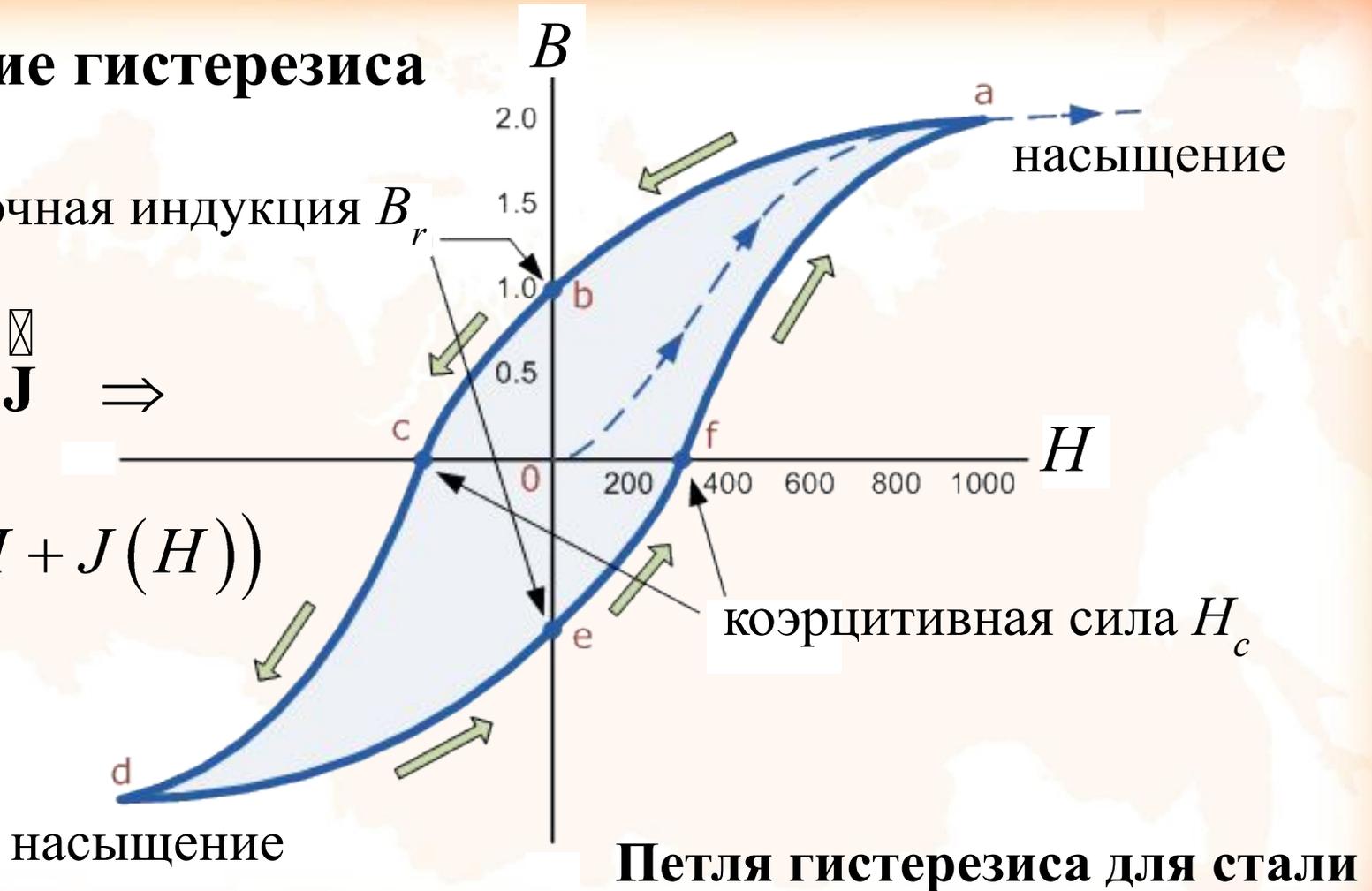


## Явление гистерезиса

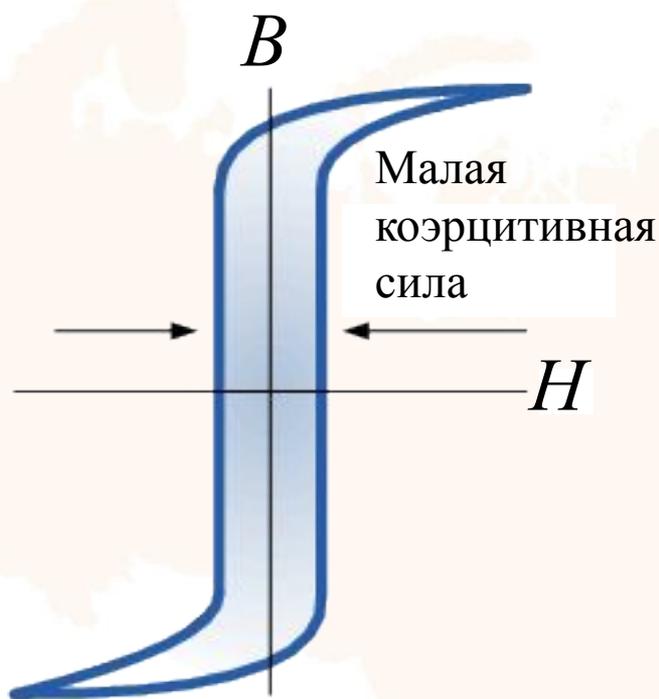
остаточная индукция  $B_r$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \Rightarrow$$

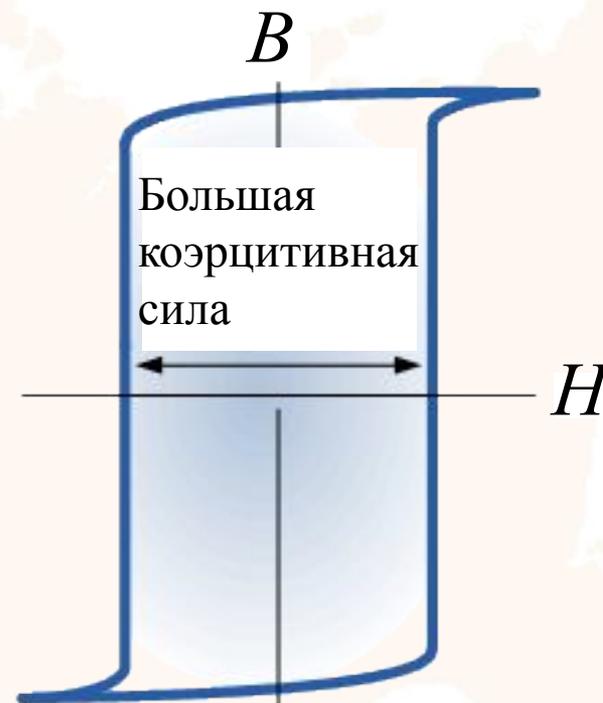
$$B = \mu_0 (H + J(H))$$



## Классификация ферромагнитных материалов

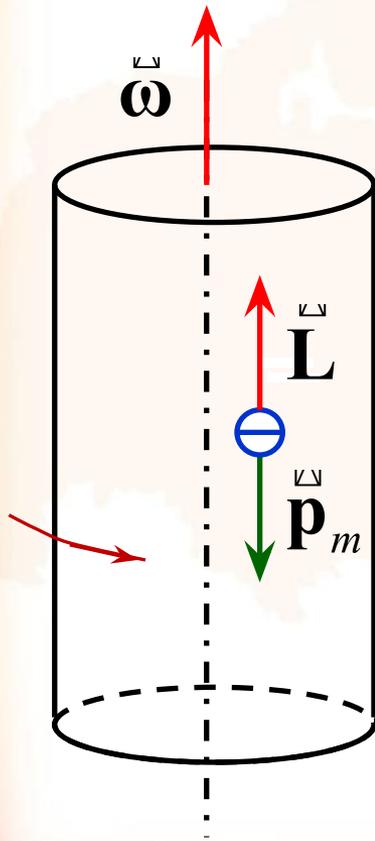


«Мягкие» магнитные материалы



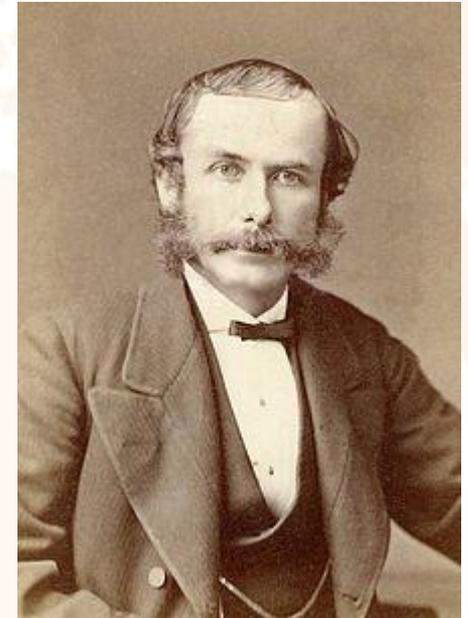
«Жёсткие» магнитные материалы

## Опыт Барнетта

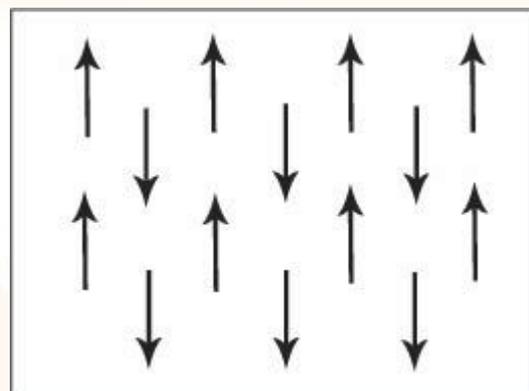
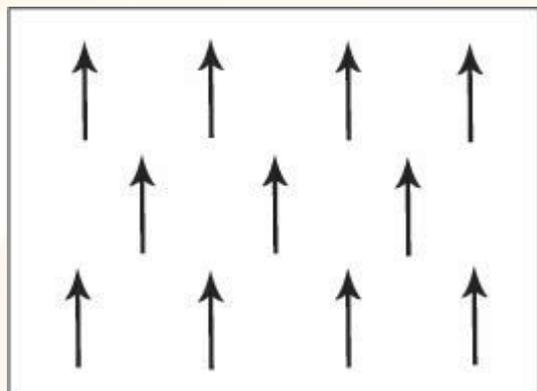


Механическое намагничивание – гироскопический эффект действия центробежной силы на атомарные электроны

Вращающийся ферромагнитный стержень намагничивается.



Сэмьюэл Джексон Барнетт  
(1873–1956)



## Ферромагнетизм и антиферромагнетизм

Магнитные моменты соседних ионов Cr имеют тенденцию в отсутствие приложенного магнитного поля строиться антипараллельно соседям. Если соседние магнитные моменты имеют одинаковые по модулю значения, то в среднем намагничивание отсутствует.



1 H 2 He

■ Ферромагнетик ■ Антиферромагнетик

□ Парамагнетик ■ Диамагнетик

3	4											5	6	7	8	9	10
Li	Be											B	C	N	O	F	Ne
11	12											13	14	15	16	17	18
Na	Mg											Al	Si	P	S	Cl	Ar
19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
K	Ca	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Ga	Ge	As	Se	Br	Kr
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
Rb	Sr	Y	Zr	Nb	Mo	Tc	Ru	Rh	Pd	Ag	Cd	In	Sn	Sb	Te	I	Xe
55	56	57	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86
Cs	Ba	La	Hf	Ta	W	Re	Os	Ir	Pt	Au	Hg	Tl	Pb	Bi	Po	At	Rn
87	88	89															
Fr	Ra	Ac															

58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
Ce	Pr	Nd	Pm	Sm	Eu	Gd	Tb	Dy	Ho	Er	Tm	Yb	Lu

Периодическая таблица элементов, показывающая различные типы намагничивания при комнатной температуре.



**Спасибо за внимание!**

**Следующая лекция  
24 ноября**