Определители II и III порядка. Их свойства и вычисление

Сунайт А.В 950 группа

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Определителем или детерминантом второго порядка, соответствующим матрице (1.1), называется число, равное разности произведений элементов стоящих на главной диагонали, и элементов, стоящих на побочной диагонали (определитель обозначается как detA):

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Пример: 1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 4 \cdot 3 = 0$; 2) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - 4 \cdot (-2) = 29$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Определителем или детерминантом третьего порядка, соответствующим матрице (1.2), называется число равное:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}.$$

Пример:
$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 8\cdot 2 + 3\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 1 - 2\cdot 8\cdot 1 - (-1)\cdot 1\cdot 1 - 3\cdot 2\cdot 2 =$$
$$= -16 + 3 + 4 - 16 + 1 - 12 = -36.$$

Свойства определителей

Величина определителя не изменится, если его строки и столбцы поменять местами:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Перестановка двух строк или столбцов определителя равносильна умножению его на (-1)

Если определитель имеет две одинаковые строки или два одинаковых столбца, то он равен нулю.

Умножение всех элементов строки или столбца определителя на любое число равносильно умножению определителя на это число:

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \lambda a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Если все элементы некоторого столбца или строки определителя равны нулю, то и сам определитель равен нулю.

Если элементы двух строк или двух столбцов определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

Если каждый элемент любого столбца или любой строки определителя представлен в виде двух слагаемых, то определитель можно представить в виде суммы двух определителей, аналогично для определителей 2-го порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Определение 3. Алгебраическим дополнением

Для вычисления алгебраических дополнений элементов определителей третьего порядка знаки легко запомнить по следующей схеме: $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

Например: $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 5 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ $M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - 5 \cdot 5 = 21 - 25 = -4$ $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1) \cdot (-4) = 4.$