



Элементы комбинаторики

Что такое факториал?

Произведение натуральных чисел от 1 до n в математике называют факториалом числа n и обозначают $n!$

Символ $n!$ от латинского *factor*, что значит множитель.

$$0! = 1, 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

$$\text{При } n=1 \quad n! = 1! = 1$$

Перестановки

Перестановкой из n элементов называется всякое расположение элементов данного конечного множества, получающееся при некотором упорядочении этого множества, причем отдельные подмножества различаются только порядком своих элементов. Число перестановок из n элементов равно произведению первых n натуральных чисел

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$$

Задача: Сколькими способами можно разместить группу учеников 8 «А» класса, изучающих немецкий язык, если их количество 10 человек, а аудитория (кабинет) содержит 10 посадочных мест?

Решение: Число способов равно

$$P_{10} = 10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800.$$

Размещение (от франц. Arrangement-размещение).

Размещением из n элементов по m в каждом (A_n^m) называется любое упорядоченное подмножество из m элементов множества, состоящего из n различных элементов.

$$A_n^m = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - m + 1) = \frac{n!}{(n - m)!}$$

Задача: В президиум собрания избраны 8 человек. Сколькими способами они могут распределить между собой обязанности председателя, секретаря и счётчика (если нет компьютера)?

Решение: Искомое число есть размещение из 8 элементов по 3:

$$A_8^3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$$

Сочетание. (лат. *Combinare* -соединять).

Сочетанием из n элементов по m называется любое подмножество из m элементов, которые принадлежат множеству, состоящему из n различных элементов.

Сочетания(комбинации)

Число сочетаний вычисляется по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_n}$$

Задача: Найти число равновозможных случаев распределения 5 билетов в театр среди 25 учащихся класса.

Решение.

$$C_n^m = C_{25}^5 = \frac{A_{25}^5}{P_5} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 5 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 = 53130$$

Основные свойства:

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \text{ где } n \geq k$$

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

$$C_n^n = 1$$

$$C_n^0 = 1$$

$$C_0^0 = 1$$

Размещения и перестановки с повторениями.

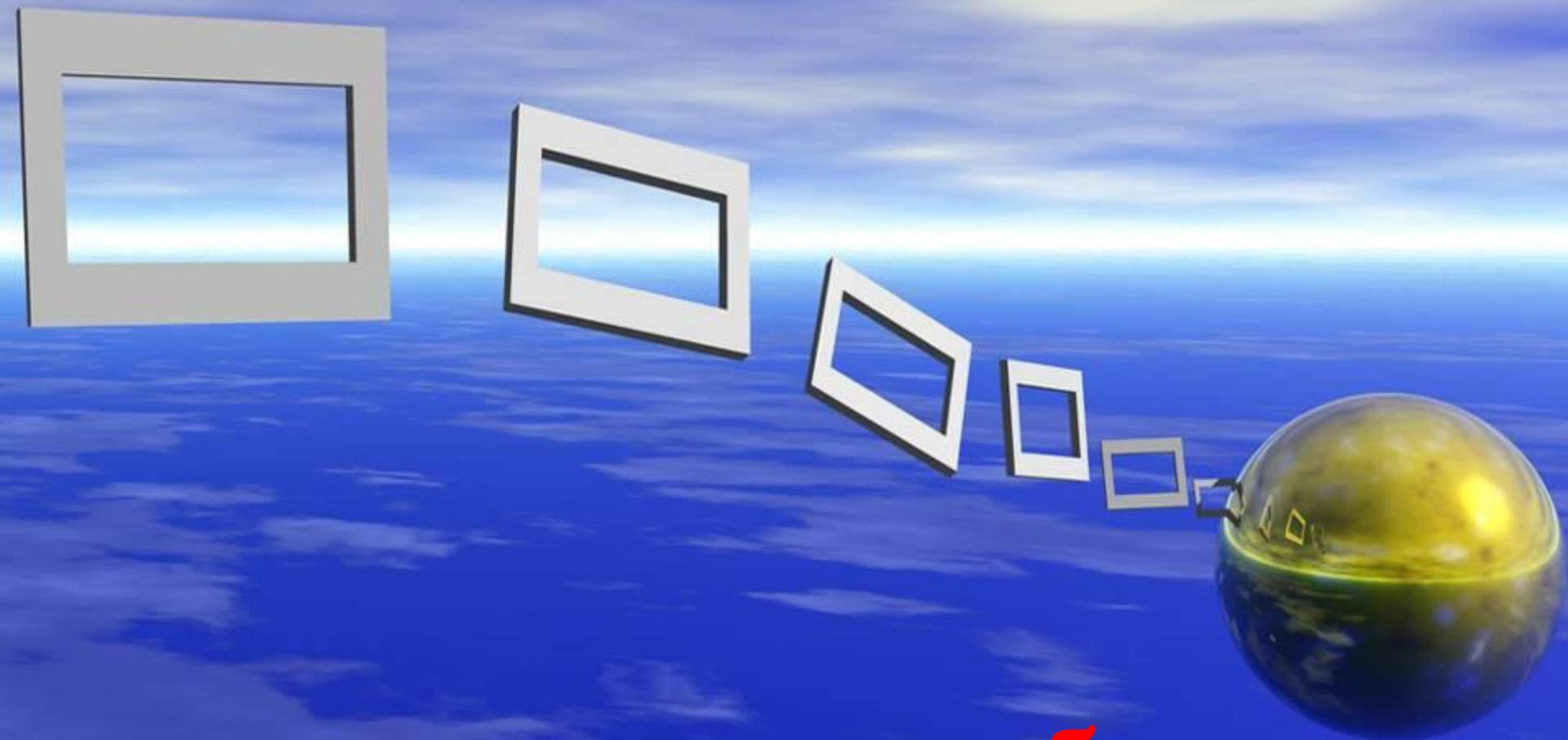
Число размещений из n элементов по k с повторениями вычисляем по формуле

$$\overline{A_n^k} = n^k$$

Задача: В гостинице 10 комнат, каждая из которых может разместить 4 человека. Сколько существует вариантов размещения 4 гостей?

Решение. Каждый гость может быть размещён в одну из 10 комнат.

$$\overline{A_{10}^4} = 10^4 = 10000 \text{ способов.}$$



самостоятельная работа

Вариант I

1. Лена сказала своей подруге, что для покупки обеда, мама дала ей _____ $\frac{10!}{8! \cdot 12!}$ сколько денег дала мама Лене?

Вариант II

1. Чтобы приобрести 8 тетрадей по математике (в клетку) мама дала Серёже $\left(\frac{8!}{3! \cdot 5!} - \frac{9!}{2! \cdot 7!} \right)$ руб. Сколько стоит 1 тетрадь, если все деньги были израсходованы.

Вариант I

1. Число перестановок из n букв относится к числу перестановок из $n+2$ букв, как 0,1 к 3. Найти n .

Вариант II

1. В конференции участвовало 25 человек. Каждый с каждым обменялись визитной карточкой. Сколько всего понадобится карточек?

Вариант I

3. У меня есть 9 разных книг из серии «Занимательная математика».
- Сколькими способами я могу выбрать 3 из них победителю школьной математической олимпиады?

Вариант II

3. Число сочетаний из n элементов по 3 в 5 раз меньше числа сочетаний из $(n+2)$ элементов по 4. Найти n .

4. Составить задачу практической направленности по данным школьной жизни.