# Поверхностные интегралы

$S \equiv \{\vec{r} = \vec{r}(u,v),\ (u,v) \in \Omega\}$ – гладкая пов-сть (огранич. и замкнутая)

$T = \{S_i\}_{i=1}^{m}$ – разбиение, $S_i$ и $S_j$ могут иметь лишь общие гран. точки, $S_i$ – – замкнута. $\delta_T = \max\limits_i \operatorname{diam} S_i$ – характеристика разбиения.

$K_i \in S_i$, $\mathbb{K} = \{K_i\}_{i=1}^{m}$ $f(\vec{r}) = f(x,y,z)$ – ф-я, непр. на $S$.

$$\sigma_T(f, \mathbb{K}) \equiv \sum_{i=1}^{m} f(K_i)\,\mu(S_i) \text{ – интегральная сумма.}$$

Опр. $I$ назыв. поверхностный инт-л 1-го рода (типа) от $f(\vec{r}) = f(x,y,z)$ по $S$, если $I = \lim\limits_{\delta_T \to 0} \sigma_T(f, \mathbb{K})$, т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$: $\forall T,\ \delta_T < \delta\ \ \forall \mathbb{K} = \{K_i\}_{i=1}^{m}$ $|\sigma_T(f, \mathbb{K}) - I| < \varepsilon$.

Обозначение: $I \equiv \iint\limits_S f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_S f(\vec{r})\,dS$.

Физич. смысл: масса (заряд) пов-сти, геом. смысл: $\iint\limits_S dS = \mu(S)$

Величина интеграла 1-го рода не зависит от выбора стороны пов-сти.

# Поверхностные интегралы

$S \equiv \{\vec{r} = \vec{r}(u,v),\ (u,v) \in \Omega\}$ – гладкая пов-сть (огранич. и замкнутая)

$T = \{S_i\}_{i=1}^{m}$ – разбиение, $S_i$ и $S_j$ могут иметь лишь общие гран. точки, $S_i$ – – замкнута. $\delta_T = \max\limits_i \operatorname{diam} S_i$ – характеристика разбиения.

$K_i \in S_i$, $\mathbb{K} = \{K_i\}_{i=1}^{m}$ $f(\vec{r}) = f(x,y,z)$ – ф-я, непр. на $S$.

$$\sigma_T(f, \mathbb{K}) \equiv \sum_{i=1}^{m} f(K_i)\,\mu(S_i) \text{ – интегральная сумма.}$$

<u>Опр.</u> $I$ назыв. поверхностный инт-л 1-го рода (типа) от $f(\vec{r}) = f(x,y,z)$ по $S$, если $I = \lim\limits_{\delta_T \to 0} \sigma_T(f, \mathbb{K})$, т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0:$ $\forall T,\ \delta_T < \delta\ \ \forall \mathbb{K} = \{K_i\}_{i=1}^{m}\ \ |\sigma_T(f, \mathbb{K}) - I| < \varepsilon.$

Обозначение: $I \equiv \iint\limits_S f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_S f(\vec{r})\,dS.$

Физич. смысл: масса (заряд) пов-сти, геом. смысл: $\iint\limits_S dS = \mu(S)$

Величина интеграла 1-го рода не зависит от выбора стороны пов-сти.

<u>Т1.</u> $S \equiv \{\vec{r} = \vec{r}(u,v),\ (u,v) \in \Omega$ – огр. замкн. обл.$\}$ – огр. замкн. гл. пов-сть, $f(\vec{r}) = f(x,y,z)$ – непрер. на $S$. Тогда

$$\exists \iint\limits_S f(\vec{r})\,dS = \iint\limits_{\Omega} f(\vec{r}(u,v))\,|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|\,du\,dv$$

$\underline{\text{Т1.}}$ $S \equiv \{\vec{r} = \vec{r}(u,v),\ (u,v) \in \Omega$ - огр. замкн. обл.$\}$ - огр. замкн. гл. пов-ть,

$f(\vec{r}) = f(x,y,z)$ - непрер. на $S$. Тогда

$$\exists \iint\limits_S f(\vec{r})\,dS = \iint\limits_\Omega f(\vec{r}(u,v))\,|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|\,du\,dv = I$$

Д-во. Правый инт-л существует, обозначим

$S_i = \vec{r}(\Omega_i),\ i = 1,2,\dots,m.$ $\mu(S_i) = \iint\limits_{\Omega_i} |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|\,du\,dv$, $K_i = \vec{r}(u_i, v_i)$, $(u_i, v_i) \in \Omega_i$

$f(\vec{r})$ непр. на $S \Rightarrow$ равн. непр. на $S$, т.е. $\underline{\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:}$ $\forall \vec{r}_1, \vec{r}_2 \in S$,

$\rho(\vec{r}_1, \vec{r}_2) < \delta\ \left(\left|\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2} - \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}\right| < \delta\right) \Rightarrow |f(\vec{r}_1) - f(\vec{r}_2)| < \dfrac{\varepsilon}{\mu(S)+1}. \Rightarrow$

$\underline{\forall T,\ \delta_T < \delta\ \ \forall \mathbb{K} = \{K_i\}_{i=1}^m\ \ |\sigma_T(f, \mathbb{K}) - I|} = \left|\sum\limits_{i=1}^m f(K_i)\,\mu(S_i) - I\right| =$

$$= \left|\sum_{i=1}^m f(\vec{r}(u_i,v_i)) \iint\limits_{\Omega_i} |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|\,du\,dv - \sum_{i=1}^m \iint\limits_{\Omega_i} f(\vec{r}(u,v))\,|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|\,du\,dv\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^m \iint\limits_{\Omega_i} |f(\vec{r}(u_i,v_i)) - f(\vec{r}(u,v))| \cdot |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|\,du\,dv \leqslant \frac{\varepsilon}{\mu(S)+1} \underbrace{\sum_{i=1}^m \mu(S_i)}_{\mu(S)} = \frac{\varepsilon\,\mu(S)}{\mu(S)+1} \underline{< \varepsilon}.$$

Теор. д-зана.

$\underline{\text{Т1.}}$ $S \equiv \{\vec{r} = \vec{r}(u,v),\ (u,v) \in \Omega$ - огр. замкн. обл.$\}$ - огр. замкн. гл. пов-сть,

$f(\vec{r}) = f(x,y,z)$ - непрер. по $S$. Тогда

$$\exists \iint\limits_S f(\vec{r})\, dS = \iint\limits_\Omega f(\vec{r}(u,v))\, |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|\, du\, dv$$

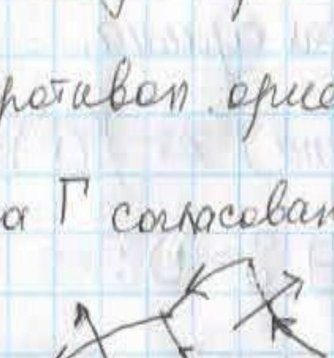
Если пов-сть кус.-гл., то инт-л определяется как сумма инт-лов по глад. компонентам. Все св-ва двойных инт-лов верны и для поверхностных инт-лов 1-го рода. Итак,

$$\iint\limits_S f(\vec{r})\, dS = \iint\limits_S f(x,y,z)\, dS = \iint\limits_\Omega f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

$S \equiv \{\vec{r}=\vec{r}(u,v), (u,v)\in\Omega\}$ - гл. пов-ть $\vec{n}=\dfrac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|}$ - единичный вектор норм., он меняется непрерывно. Но $(-\vec{n})$ - тоже меняется непр-но. Непрерывная единичная нормаль - ориентация пов-ти. У пов-ти м. быть 1 или 2 ориент. Если 2 ориент., то пов-ть назыв. ориентируемой (двусторонней). Если 1 ориент., то неориентируемой (односторонней). Пример одностор. пов-ти - лист Мёбиуса.

$S\equiv\{\vec{r}=\vec{r}(u,v),\ (u,v)\in\Omega\}$ - гл. пов-сть $\vec{n}=\dfrac{[\vec{r}_u,\vec{r}_v]}{|[\vec{r}_u,\vec{r}_v]|}$ - единичный вектор норм., он меняется непрерывно. Но $(-\vec{n})$ - тоже меняется непр-но. Непрерывная единичная нормаль - ориентация пов-сти. У пов-сти м. быть 1 или 2 ориент. Если 2 ориент., то пов-сть назыв. ориентируемой (двусторонней). Если 1 ориент., то неориентируемой (односторонней). Пример одностор. пов-сти - лист Мёбиуса.

Будем рассматривать лишь двустор. пов-сти. $S^+$ и $S^-$ - одна и та же $S$ с противоп. ориент. $\Gamma=\partial S$ - граница гл. пов-сти (кус.-гл. кривая). Напр. на $\Gamma$ согласовано со стороной $S$: обход по $\Gamma$ - против час. стрелки (для норм.)



Если пов-сть $S$ - кус.-гл., то ориентируем все гл. компоненты так: общие части границ получают противоп. напр. обхода. Так получается при делении на части гладкой пов-сти.

$S \equiv \{\vec{r} = \vec{r}(u,v), (u,v) \in \Omega\}$ - гладкая, огран., замкн. двустор. пов-сть.

$T = \{S_i\}_{i=1}^{m}$ - разбиение, $\vec{n} = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$ - выбранная един. нормаль

$\vec{u}(\vec{r}) = \vec{u}(x,y,z) = \{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\}$ - векторная ф-я (вект. поле), непр. на $S$, т.е. $P, Q, R$ - непр. ф-ии. $\mathbb{K} = \{K_i\}_{i=1}^{m}$, $K_i \in S_i$.

$$\sigma_T^{(1)}(P, \mathbb{K}) \equiv \sum_{i=1}^{m} P(K_i) \cdot \cos\alpha(K_i) \cdot \mu(S_i)$$

$$\sigma_T^{(2)}(Q, \mathbb{K}) \equiv \sum_{i=1}^{m} Q(K_i) \cos\beta(K_i) \cdot \mu(S_i)$$

$$\sigma_T^{(3)}(R, \mathbb{K}) \equiv \sum_{i=1}^{m} R(K_i) \cos\gamma(K_i) \cdot \mu(S_i)$$

интегральные суммы

<u>Опр.</u> $I_1$ ($I_2$, $I_3$) называ. поверхн. инт-л 2-го рода (типа) от $P(x,y,z)$ ($Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$) по $S$, если $I_1 = \lim\limits_{\delta_T \to 0} \sigma_T^{(1)}(P, \mathbb{K})$ $\left(I_2 = \lim\limits_{\delta_T \to 0} \sigma_T^{(2)}(Q, \mathbb{K}),\right.$ $\left.I_3 = \lim\limits_{\delta_T \to 0} \sigma_T^{(3)}(R, \mathbb{K})\right)$.

Обозначения:

$$I_1 \equiv \iint_S P(\vec{r}) \cos\alpha \, dS = \iint_S P(\vec{r}) \, dy dz$$

$$I_2 \equiv \iint_S Q(\vec{r}) \cos\beta \, dS = \iint_S Q(\vec{r}) \, dz dx$$

$$I_3 \equiv \iint_S R(\vec{r}) \cos\gamma \, dS = \iint_S R(\vec{r}) \, dx dy$$

Для инт-лов 2-го рода

$$\iint_{S^-} = -\iint_{S^+}$$

Опр. $I_1$ ($I_2$, $I_3$) назыв. поверхн. инт-л 2-го рода (типа) от $P(x,y,z)$ ($Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$) по $S$, если $I_1 = \lim\limits_{\delta_T \to 0} \sigma_T^{(1)}(P, \mathbb{K})$ $\left( I_2 = \lim\limits_{\delta_T \to 0} \sigma_T^{(2)}(Q, \mathbb{K}), \right.$ $\left. I_3 = \lim\limits_{\delta_T \to 0} \sigma_T^{(3)}(R, \mathbb{K}) \right)$.

Обозначения:

$$I_1 \equiv \iint\limits_S P(\vec{r}) \cos\alpha \, dS = \iint\limits_S P(\vec{r})\, dy\,dz$$

$$I_2 \equiv \iint\limits_S Q(\vec{r}) \cos\beta \, dS = \iint\limits_S Q(\vec{r})\, dz\,dx$$

$$I_3 \equiv \iint\limits_S R(\vec{r}) \cos\gamma \, dS = \iint\limits_S R(\vec{r})\, dx\,dy$$

Для инт-лов 2-го рода

$$\iint\limits_{S^-} = - \iint\limits_{S^+}$$

Вводится также общий пов-ый инт-л 2-го рода: $I = I_1 + I_2 + I_3 =$

$$= \iint\limits_S \left( P(\vec{r})\cos\alpha + Q(\vec{r})\cos\beta + R(\vec{r})\cos\gamma \right) dS = \iint\limits_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy.$$

$\vec{u} = \{P; Q; R\}$, $\vec{n} = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\} \Rightarrow I = \iint\limits_S (\vec{u}(\vec{r}), \vec{n})\, dS = (d\vec{S} \equiv \vec{n}\, dS) =$

$= \iint\limits_S (\vec{u}(\vec{r}), d\vec{S})$. Такой инт-л называется поток.

Опр. $I_1$ ($I_2, I_3$) назыв. поверхн. инт-л 2-го рода (типа) от $P(x,y,z)$ ($Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$) по $S$, если $I_1 = \lim\limits_{\delta_T \to 0} \sigma_T^{(1)}(P, \mathbb{K})$ $\left(I_2 = \lim\limits_{\delta_T \to 0} \sigma_T^{(2)}(Q, \mathbb{K}),\right.$ $\left. I_3 = \lim\limits_{\delta_T \to 0} \sigma_T^{(3)}(R, \mathbb{K})\right)$.

Обозначения:

$$I_1 \equiv \iint\limits_S P(\vec{r})\cos\alpha\, dS = \iint\limits_S P(\vec{r})\, dy dz$$

$$I_2 \equiv \iint\limits_S Q(\vec{r})\cos\beta\, dS = \iint\limits_S Q(\vec{r})\, dz dx$$

$$I_3 \equiv \iint\limits_S R(\vec{r})\cos\gamma\, dS = \iint\limits_S R(\vec{r})\, dx dy$$

Для инт-лов 2-го рода $\iint\limits_{S^-} = -\iint\limits_{S^+}$

Вводится также общий пов-ый инт-л 2-го рода: $I = I_1 + I_2 + I_3 =$

$$= \iint\limits_S (P(\vec{r})\cos\alpha + Q(\vec{r})\cos\beta + R(\vec{r})\cos\gamma)\, dS = \iint\limits_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy.$$

$\vec{u} = \{P; Q; R\}$, $\vec{n} = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\} \Rightarrow I = \iint\limits_S (\vec{u}(\vec{r}), \vec{n})\, dS = (d\vec{S} \equiv \vec{n}\, dS) =$

$= \iint\limits_S (\vec{u}(\vec{r}), d\vec{S})$. Такой инт-л называется поток.

Т2. $S \equiv \{\vec{r} = \vec{r}(u,v), (u,v) \in \Omega\}$ - гладкая, огран. замкн. двустор. пов-ть.

$\vec{u}(\vec{r}) = \{P(\vec{r}), Q(\vec{r}), R(\vec{r})\} = \{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\}$ непр. на $S$. $\Rightarrow$

$$\exists \iint\limits_S (\vec{u}(\vec{r}), d\vec{S}) = \iint\limits_\Omega \{P(\vec{r}(u,v))\cos\alpha(\vec{r}(u,v)) + Q(\vec{r}(u,v))\cos\beta(\vec{r}(u,v)) + R(\vec{r}(u,v))\cos\gamma(\vec{r}(u,v))\} |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|\, du dv.$$

Т2. $S \equiv \{\vec r = \vec r(u,v),\ (u,v) \in \Omega\}$ – гладкая, огран. замкн. двустор. пов-сть.

$\vec a(\vec r) = \{P(\vec r), Q(\vec r), R(\vec r)\} = \{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\}$ непр. на $S$. $\Rightarrow$

$$\exists \iint_S (\vec a(\vec r), d\vec S) = \iint_\Omega \{P(\vec r(u,v))\cos\alpha(\vec r(u,v)) + Q(\vec r(u,v))\cos\beta(\vec r(u,v)) + R(\vec r(u,v))\cos\gamma(\vec r(u,v))\}\,|[\vec r_u, \vec r_v]|\,du\,dv.$$

Д-во. Выберем ориентацию (сторону) $S$, т.е. $\vec n = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ – нормаль и введём $f(x,y,z) = f(\vec r) = P(\vec r)\cos\alpha(\vec r) + Q(\vec r)\cos\beta(\vec r) + R(\vec r)\cos\gamma(\vec r)$. Интегр. сумма $\sigma_T^{(1)}(P, \mathbb K) + \sigma_T^{(2)}(Q, \mathbb K) + \sigma_T^{(3)}(R, \mathbb K)$ есть интегр. сумма $\sigma_T(f, \mathbb K)$, а эта сумма имеет предел по Т1. Т. доказана.

Т2. $S \equiv \{\vec{r}=\vec{r}(u,v),\ (u,v)\in\Omega\}$ - гладкая, огран. замкн. двустор. пов-ть.

$\vec{a}(\vec{r}) = \{P(\vec{r}), Q(\vec{r}), R(\vec{r})\} = \{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\}$ непр. на $S$. $\Rightarrow$

$\exists \iint\limits_S (\vec{a}(\vec{r}), d\vec{S}) = \iint\limits_\Omega \{P(\vec{r}(u,v))\cos\alpha(\vec{r}(u,v)) + Q(\vec{r}(u,v))\cos\beta(\vec{r}(u,v)) + R(\vec{r}(u,v))\cos\gamma(\vec{r}(u,v))\} |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|\,du\,dv.$

Д-во. Выберем ориентацию (сторону) $S$, т.е. $\vec{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ - нормаль и введём $f(x,y,z) = f(\vec{r}) = P(\vec{r})\cos\alpha(\vec{r}) + Q(\vec{r})\cos\beta(\vec{r}) + R(\vec{r})\cos\gamma(\vec{r})$. Интегр. сумма $\sigma_T^{(1)}(P, \mathbb{K}) + \sigma_T^{(2)}(Q, \mathbb{K}) + \sigma_T^{(3)}(R, \mathbb{K})$ есть интегр. сумма $\sigma_T(f, \mathbb{K})$, а эта сумма имеет предел по Т1. Т. доказана.

Инт-л по кус.-гл. пов-ти определяется как сумма инт-лов по гладким компонентам (надо лишь следить за общей ориентацией пов-ти) $\Rightarrow$ все св-ва двойных инт-лов верны и для пов-ых инт-лов 2-го рода.

Т2. $S \equiv \{\vec{r} = \vec{r}(u,v),\ (u,v)\in\Omega\}$ – гладкая, огран. замкн. двустор. пов-сть.

$\vec{a}(\vec{r}) = \{P(\vec{r}), Q(\vec{r}), R(\vec{r})\} = \{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\}$ непр. на $S$ $\Rightarrow$

$$\exists \iint\limits_S (\vec{a}(\vec{r}), d\vec{S}) = \iint\limits_\Omega \{P(\vec{r}(u,v))\cos\alpha(\vec{r}(u,v)) + Q(\vec{r}(u,v))\cos\beta(\vec{r}(u,v)) + R(\vec{r}(u,v))\cos\gamma(\vec{r}(u,v))\} \left|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]\right| du\,dv.$$

Д-во. Выберем ориентацию (сторону) $S$, т.е. $\vec{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ – нормаль и введём $f(x,y,z) = f(\vec{r}) = P(\vec{r})\cos\alpha(\vec{r}) + Q(\vec{r})\cos\beta(\vec{r}) + R(\vec{r})\cos\gamma(\vec{r})$. Интегр. сумма $\sigma_T^{(1)}(P, \mathbb{K}) + \sigma_T^{(2)}(Q, \mathbb{K}) + \sigma_T^{(3)}(R, \mathbb{K})$ есть интегр. сумма $\sigma_T(f, \mathbb{K})$, а эта сумма имеет предел по Т1. Т. доказана.

Инт-л по кус.-гл. пов-сти определяется как сумма инт-лов по гладким компонентам (надо лишь следить за общей ориентацией пов-сти) $\Rightarrow$ все св-ва двойных инт-лов верны и для пов-тных инт-лов 2-го рода.

Для инт-лов 2-го рода по $S = \partial V$ можно ввести обозначения:

$\oiint\limits_S$ $\quad$ $\oiint\limits_S$ $\quad$ $\oiint\limits_S$

внешняя нормаль $\quad$ внутр. нормаль