ДИНАМИКА СИСТЕМЫ

ЛЕКЦИЯ 1:
ЦЕНТР МАСС

1. ЦЕНТР МАСС: система материальных точек

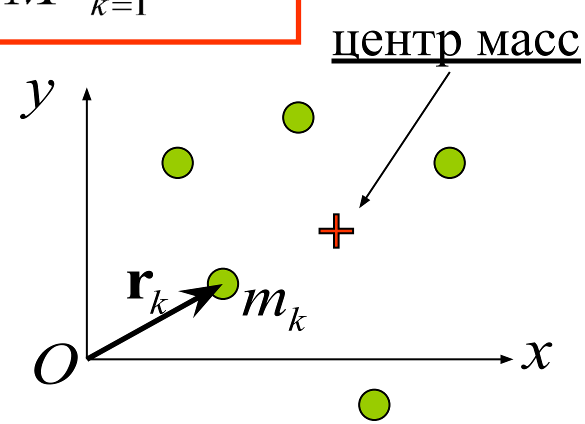
Рассматриваем систему материальных точек

$$m_1\left(x_1, y_1, z_1\right), \quad m_2\left(x_2, y_2, z_2\right), \ldots \; m_n\left(x_n, y_n, z_n\right)$$

Центр масс системы есть geometрическая точка с координатами

$$\boxed{\bar{\mathbf{r}} = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{r}_k} \qquad M = \sum_{k=1}^{n} m_k$$

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k x_k, \quad \bar{y} = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k y_k, \ldots \; \bar{z} = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k k_k}$$



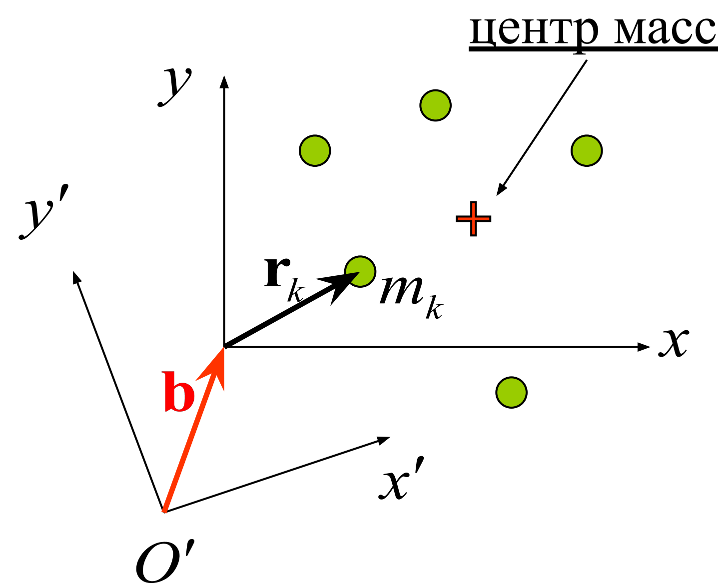
$\sum_{k=1}^{n} m_k x_k$ — 1-й момент масс по отношению к плоскости $y - z$

M — масса системы

2. ЦЕНТР МАСС- ИНВАРИАНТ

$$\bar{\mathbf{r}}'_k = \mathbf{b} + \mathbf{A}\bar{\mathbf{r}}_k$$

смещение   матрица поворота



<u>Нужно показать</u> $\bar{\mathbf{r}}' = \mathbf{b} + \mathbf{A}\bar{\mathbf{r}}$

$$\boxed{\bar{\mathbf{r}}'} =$$

$$= \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k\left(\mathbf{b} + \mathbf{A}\mathbf{r}_k\right) =$$

$$\frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k\mathbf{b} + \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k\mathbf{A}\mathbf{r}_k = \frac{1}{M}\mathbf{b}\underbrace{\sum_{k=1}^{n} m_k}_{M} + \frac{1}{M}\mathbf{A}\underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} m_k\mathbf{r}_k\right)}_{M\bar{\mathbf{r}}} =$$

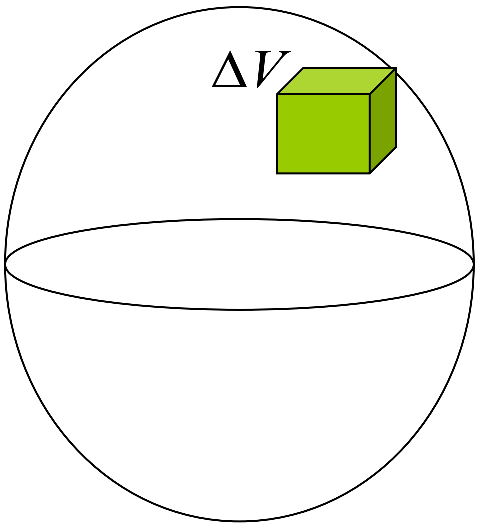
$$= \boxed{\mathbf{b} + \mathbf{A}\bar{\mathbf{r}}}$$

$$\boxed{\bar{\mathbf{r}} = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k\mathbf{r}_k}$$

3. ЦЕНТР МАСС: сплошное тело

$$x_C = \frac{\iiint x\rho dV}{\iiint \rho dV}, \quad y_C = \frac{\iiint y\rho dV}{\iiint \rho dV}, \quad z_C = \frac{\iiint z\rho dV}{\iiint \rho dV}$$

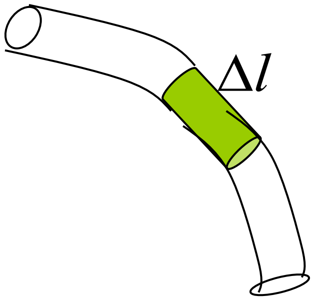
плотность $\rho = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta V}$



Для однородного тела $\rho = \mathrm{Const}$

$$\underbrace{x_C = \frac{1}{V}\iiint xdV, \; y_C = \frac{1}{V}\iiint ydV, \; z_C = \frac{1}{V}\iiint zdV}_{\text{Центр массы объема}}$$

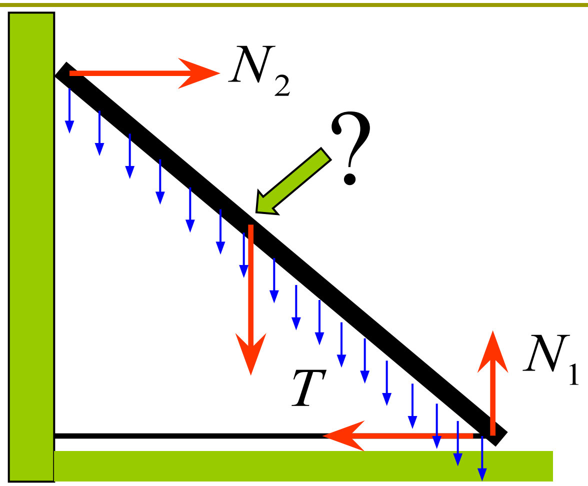
Для однородного криволинейного стержня $\rho' = \mathrm{Const}$



$$\underbrace{x_C = \frac{1}{L}\int_{(L)} xdl, \; y_C = \frac{1}{L}\int_{(L)} ydl, \; z_C = \frac{1}{L}\int_{(L)} zdl}_{\text{Центр тяжести линии}}$$

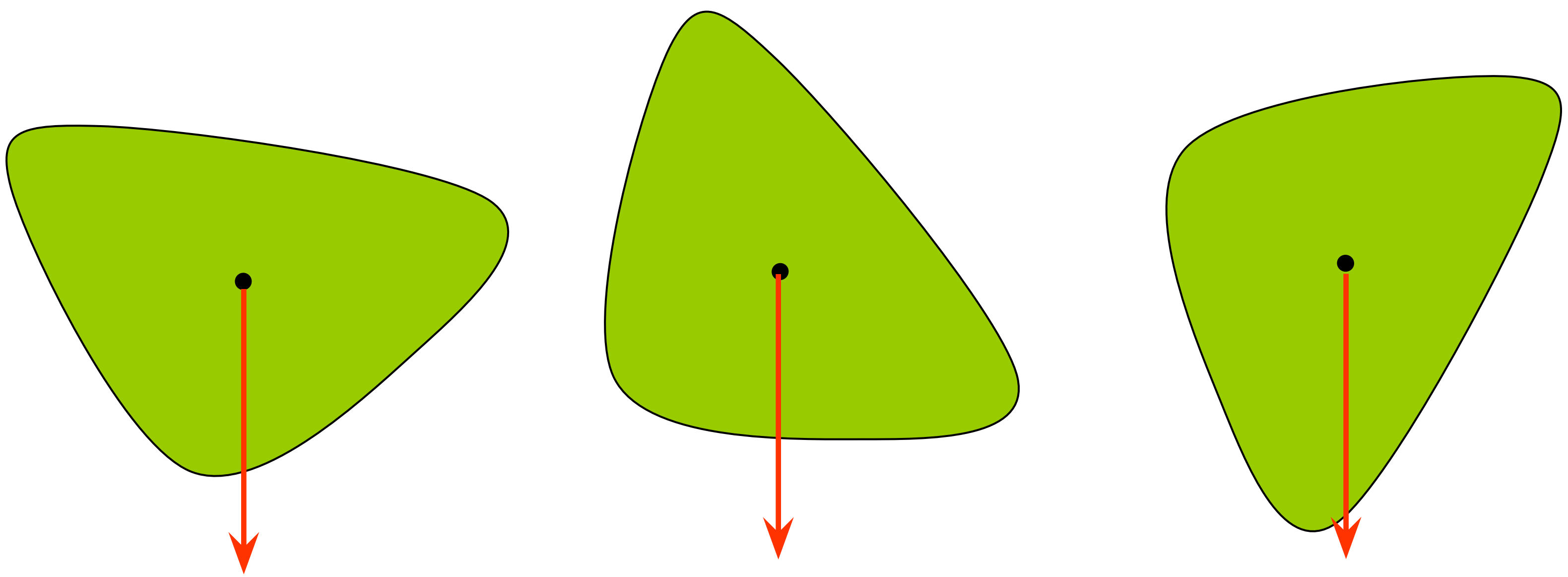
погонная плотность $\rho' = \lim\limits_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta l}$

4. ЗАЧЕМ ОН НУЖЕН: статика



Равнодействующая сил тяжести проходит через центр масс

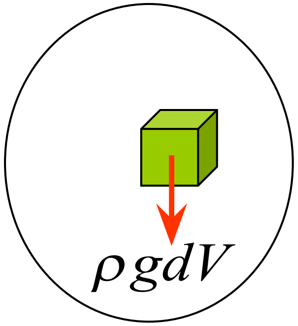
Центр масс = Центр тяжести



5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Силы, действующие на элементарные объемы параллельны. Система параллельных сил сводится к равнодействующей

$$F = g\iiint \rho dV = Mg$$



Линия действия равнодействующей находится по теореме Вариньена

$$M_O(\mathbf{F}) = \iiint M_O(\rho \mathbf{g} dV)$$

<u>Теорема Вариньона</u>. <u>**Если система сил имеет равнодействующую, то момент равнодействующей равен сумме моментов всех сил системы**</u>

$$M_{0y}(\vec{F}) = F_x z_C - F_z x_C = -Mgx_C$$

$$\iiint M_{Oy}(\rho \mathbf{g} dV) = -\rho \iiint xg dV$$

$$x_C = \frac{\iiint x\rho dV}{\iiint \rho dV}$$

$$M_{0y} \leftrightarrow M_{0x}$$

$$y_C = \frac{\iiint y\rho dV}{\iiint \rho dV}$$

Линия действия проходит через центр масс

6. ЗАЧЕМ ОН НУЖЕН: динамика

Уравнения динамики системы n материальных точек

$$
+\begin{cases}
m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \ldots + \mathbf{F}_{1n} \\
m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} + \ldots + \mathbf{F}_{2n} \\
\cdots \\
m_n\ddot{\mathbf{r}}_n = \mathbf{F}_n + \mathbf{F}_{n1} + \mathbf{F}_{n2} + \ldots + \mathbf{F}_{nn-1}
\end{cases}
$$

$\mathbf{F}_i$ внешняя сила, действующая на i- ую точку

$\mathbf{F}_{ij}$ внутренняя сила, действующая на i- ую точку со стороны j –ой

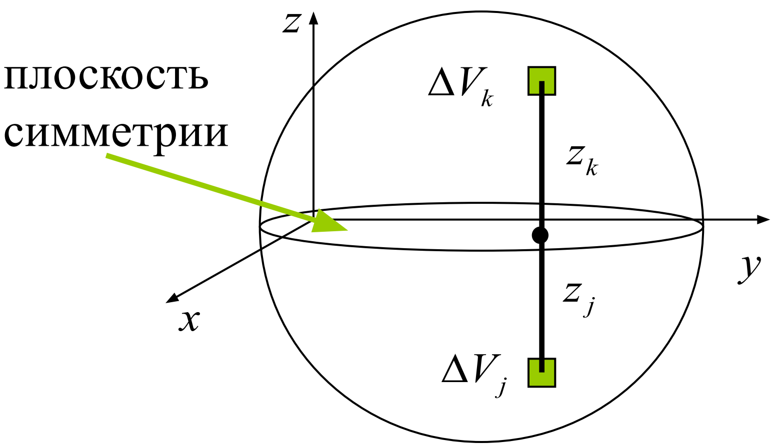
3-й закон Ньютона

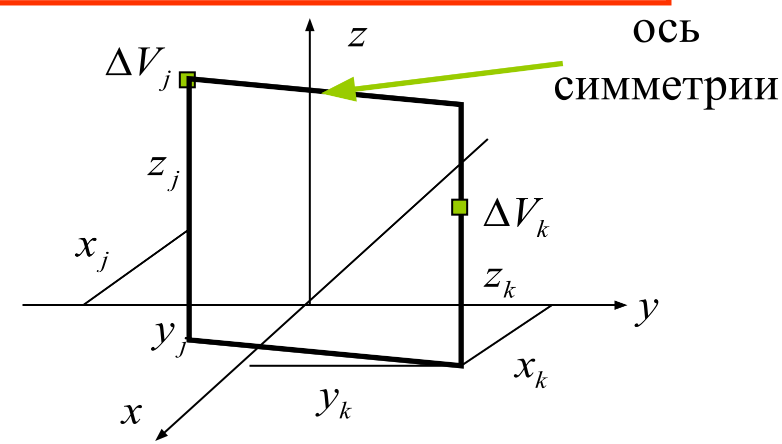
$$
\frac{d^2}{dt^2}\underbrace{\left(\sum_k m_k \mathbf{r}_k\right)}_{M\overline{\mathbf{r}}} = \sum_k \mathbf{F}_k
$$

Центр масс материальной системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена вся масса системы и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему

7. МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ ЦЕНТРА МАСС. СИММЕТРИЯ

Если однородное тело имеет плоскость, ось или центр симметрии, то его центр масс лежит соответственно или в плоскости симметрии, или на оси симметрии, или в центре симметрии.





$$\Delta V_j = \Delta V_k,\ x_j = x_k,\ y_j = y_k,\ z_j = -z_k,$$

$$z_C = \frac{1}{V} \lim_{n \to 0} \sum_{k=1}^{n} z_k \Delta V_k = 0$$

$$\Delta V_j = \Delta V_k,\ x_j = -x_k,\ y_j = -y_k,\ z_j = z_k,$$

$$x_C = y_C = 0$$

СЛЕДСТВИЕ: Центр тяжести однородного круглого **кольца**, **круглой или прямоугольной пластины, прямоугольного параллелепипеда, шара** и других, имеющих центр симметрии, лежит в их **центре симметрии**.

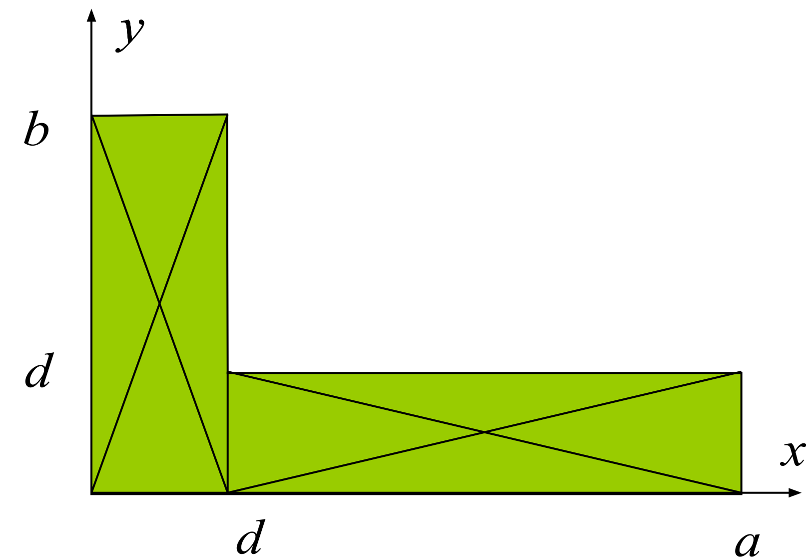
8. МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ ЦЕНТРА МАСС. РАЗБИЕНИЕ

Если тело можно разбить на конечное число таких частей, для каждой из которых положение центра тяжести известно, то координаты центра тяжести всего тела можно непосредственно вычислить по формулам

$$x_C = \frac{x_1 V_1 + x_2 V_2 + \ldots + x_n V_n}{V}$$

$$y_C = \frac{y_1 V_1 + y_2 V_2 + \ldots + y_n V_n}{V}$$

$$z_C = \frac{z_1 V_1 + z_2 V_2 + \ldots + z_n V_n}{V}$$



$$S_1 = bd,\ x_1 = \frac{d}{2},\ y_1 = \frac{b}{2}$$

$$S_2 = (a-d)d,\ x_2 = d + \frac{a-d}{2},\ y_2 = \frac{d}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_C = \dfrac{a^2 + bd - d^2}{2(a+b-d)} \\ y_C = \dfrac{b^2 + ad - d^2}{2(a+b-d)} \end{cases}$$

9. МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ ЦЕНТРА МАСС. ВЫЧИТАНИЕ

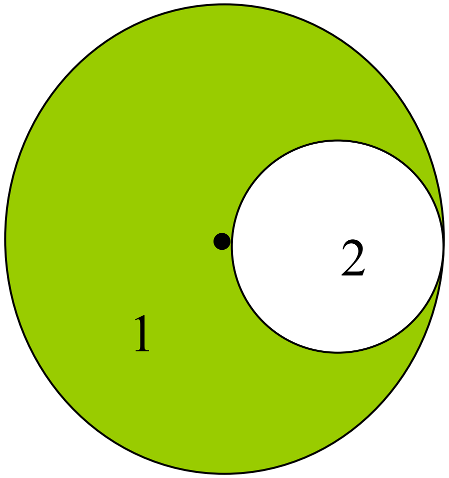
То же самое, что разбиение, но массы выкинутых частей нужно брать отрицательными

$$S_1 = \pi R^2,\ x_1 = 0,\ y_1 = 0$$

$$S_2 = -\pi\left(R/2\right)^2,\ x_2 = R/2,\ y_2 = 0$$

$$\overline{x} = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2}{S_1 + S_2}$$

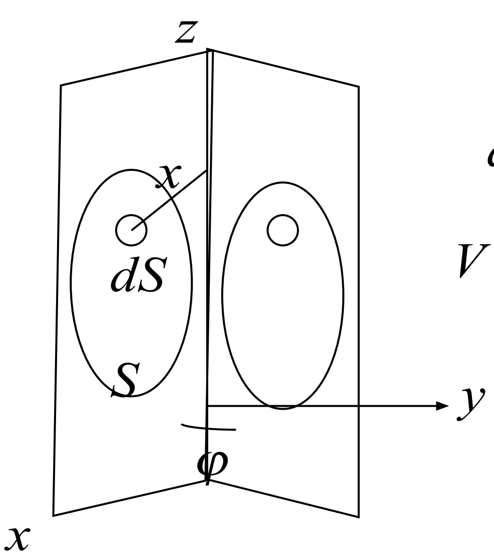
$$\overline{x} = \frac{0 \cdot \pi R^2 - \left(R/2\right) \cdot \left(\pi R^2/4\right)}{\pi R^2 - \pi R^2/4} = -\frac{R}{6}$$



10. ТЕОРЕМЫ ПАППА-ГЮЛЬДЕНА

1) Если плоская фигура вращается вокруг оси, проходящей в ее плоскости и не пересекающей фигуру, то заметенный объем равен произведению площади фигуры на путь, пройденный ее центром масс.

2) Если плоская кривая вращается вокруг оси, проходящей в ее плоскости и не пересекающей кривую, то заметенная площадь равна произведению длины кривой на путь, пройденный ее центром масс.

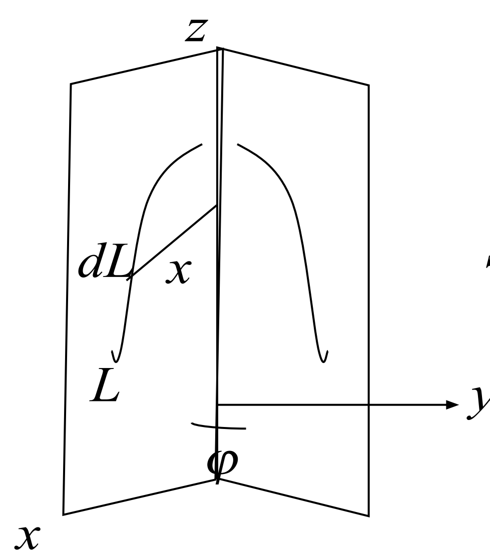


$$dV = x\varphi dS$$

$$V = \iint x\varphi dS =$$

$$= \varphi \iint x dS =$$

$$= \varphi \bar{x} S = lS$$



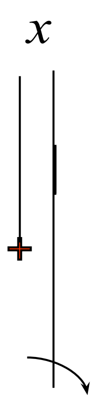
$$dS = x\varphi dL$$

$$S = \iint x\varphi dL =$$

$$= \varphi \iint x dL =$$

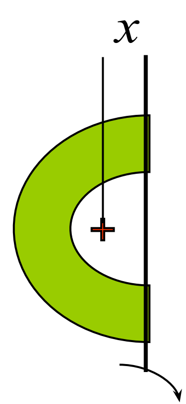
$$= \varphi \bar{x} L = lL$$

11. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕОРЕМ ПАППА-ГЮЛЬДЕНА



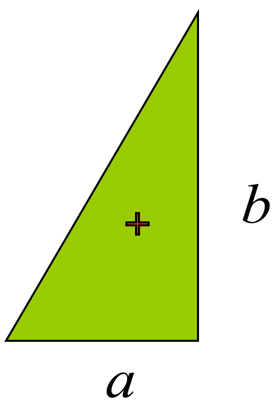
$$2\pi x \cdot \pi R = 4\pi R^2$$

$$x = \frac{2}{\pi} R$$



$$2\pi x \cdot \pi R^2 / 2 = \frac{4}{3}\pi R^3$$

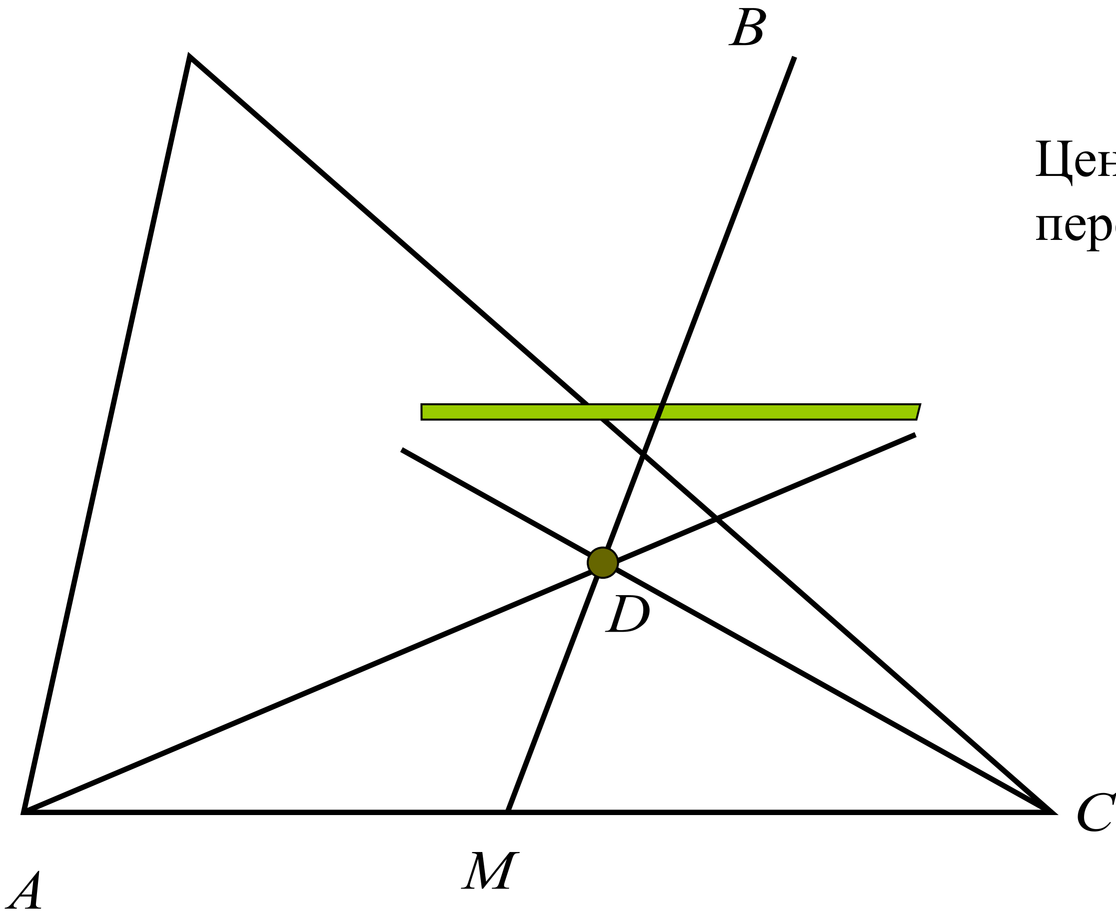
$$x = \frac{4}{3\pi} R$$



$$2\pi x \cdot \frac{ab}{2} = \frac{\pi}{3} a^2 b$$

$$x = \frac{a}{3}$$

12. ЦЕНТР МАСС ТРЕУГОЛЬНИКА

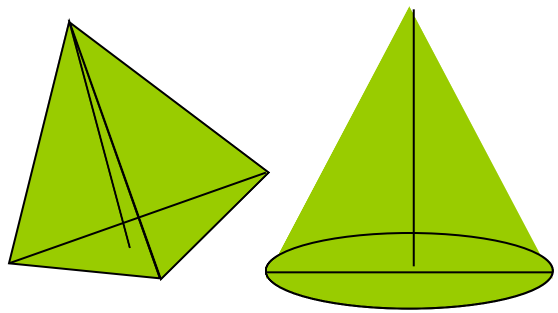


Центр масс – в точке пересечения медиан

$$DM = \frac{1}{3} BM$$

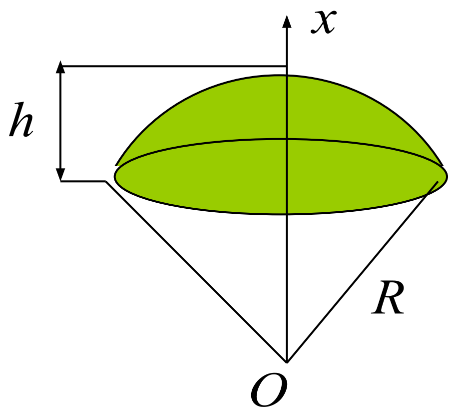
13. ЦЕНТР МАСС ПРОСТЕЙШИХ ФИГУР

Пирамида и конус



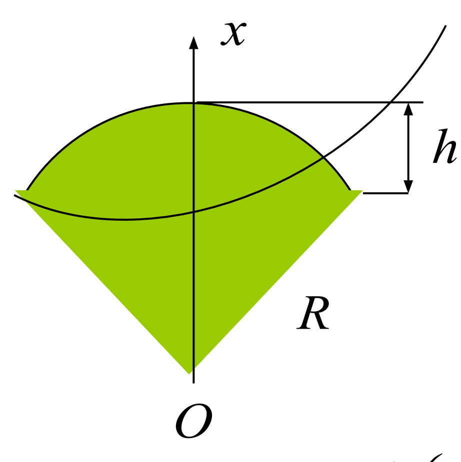
Центр масс находится на прямой, соединяющей вершину с центром масс площади основания на расстоянии ¼ длины считая от основания

Шаровой сегмент



$$x_c = R - \frac{h}{2}$$

Шаровой сектор



$$x_c = \frac{3}{4}\left(R - \frac{h}{2}\right)$$