МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ЗАДАНИЮ 14.

Метод рационализации

Введение

Решение неравенств - важный раздел в математике. Успешное изучение математики невозможно без умения решать разнообразные неравенства, поэтому мы решили рассмотреть один из способов решения неравенств – метод рационализации. В школьной программе он не изучается, но его применение значительно облегчает решение задания С3 ЕГЭ, в частности логарифмических и показательных неравенств.

Теоретическое обоснование метода

Часто, при решении логарифмических неравенств, встречаются задачи с переменным основанием логарифма. Так, $\log_{a(x)} b(x) > \log_{a(x)} c(x)$ неравенство вида является стандартным школьным неравенством. Как правило, для его решения применяется переход к равносильной совокупности систем:

$$\log_{a(x)} b(x) > \log_{a(x)} c(x) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < a(x) < 1 \\ 0 < b(x) < c(x) \end{cases} \\ \begin{cases} a(x) > 1 \\ b(x) > c(x) > 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Сведение логарифмического неравенства к системе рациональных неравенств

Рассмотрим логарифмическое неравенство вида

$$\log_{a(x)} f(x) \geq \log_{a(x)} g(x) \quad , \quad \textbf{(1)}$$

где $a(x),\ f(x),\ g(x)$ **- некоторые функции**

<u>Теорема 1.</u>

Логарифмическое неравенство $\log_{a(x)} f(x) \geq \log_{a(x)} g(x)$ ***равносильно следующей системе неравенств*:**

$$\begin{cases} a(x) > 0, \\ a(x) \neq 1, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ (a(x)-1)(f(x)-g(x)) \geq 0. \end{cases} \qquad \textbf{(2)}$$

Сведение показательных неравенств к системе рациональных неравенств

Теперь рассмотрим показательное неравенство вида

$$a(x)^{f(x)} \geq a(x)^{g(x)} \quad 3)$$

Так же, как в предыдущем пункте $a(x), f(x), g(x)$ - некоторые функции.

И снова вспомним, что традиционное решение такого неравенства приводит к *двум случаям*. <u>В первом</u> основание степени положительно, но меньше единицы (знак неравенства обращается), <u>во втором</u> случае основание степени больше единицы (знак неравенства сохраняется).

Как и в случае с логарифмическим неравенством, имеется возможность значительно укоротить решение задачи, используя метод рационализации. Этот метод основан на следующей теореме.

Теорема 2.

Показательное неравенство $a(x)^{f(x)} \ge a(x)^{g(x)}$ ***равносильно следующей системе неравенств*:**

$$\begin{cases} a(x) > 0, \\ a(x) \ne 1, \\ (a(x)-1)(f(x)-g(x)) \ge 0. \end{cases} \qquad \textbf{(4)}$$

Доказательство

Если $0 < a(x) < 1$, то первый множитель третьего неравенства будет отрицателен. При сокращении на него придется изменить знак неравенства на противоположный, тогда получится неравенство $f(x) \leq g(x)$

Если $a(x) > 1$, то первый множитель третьего неравенства положителен, сокращаем его без изменения знака неравенства, получаем неравенство $f(x) \geq g(x)$.

Выделим некоторые выражения F и соответствующие им рационализирующие выражения G, где f, g, h, p, q – выражения с переменной x (h > 0,h ≠ 1, f > 0, g > 0), a – фиксированное число (a > 0, a ≠ 1).

	Выражение F	Выражение G
1 1а 1б	$\log_a f - \log_a g$ $\log_a f - 1$ $\log_a f$	$(a-1)(f-g)$ $(a-1)(f-a)$ $(a-1)(f-1)$
2 2а 2б	$\log_h f - \log_h g$ $\log_h - 1$ $\log_h f$	$(h-1)(f-g)$ $(h-1)(f-h)$ $(h-1)(f-1)$
3	$\log_f h - \log_g h$ $(g \neq 1, f \neq 1)$	$(f-1)(g-1)(h-1)(g-f)$
4 4а	$h^f - h^g \ (h > 0)$ $h^f - 1$	$(h-1)(f-g)$ $(h-1)f$
5	$f^h - g^h$ $(f > 0, g > 0)$	$(f-g)h$
6	$\lvert f\rvert - \lvert g\rvert$	$(f-g)(f+g)$

$$h^f - h^g \quad (h > 0)$$

Из неравенства $h^f - h^g > 0$ следует $h^f > h^g$. Пусть число а > 1, тогда

$\log_a h^f > \log_a h^g$ или $(h - g)\log_a h > 0$.

Отсюда с учётом замены 1б и условия $a > 1$ получаем

$(f - g)(a - 1)(h - 1) > 0$, $(f - g)(h - 1) > 0$.

Аналогично, доказываются неравенства F < 0, F ≤ 0, F ≥ 0.

$$f^h - g^h \quad (f > 0, g > 0)$$

Доказательство проводится аналогично доказательству 4.

$$|f| - |g|$$

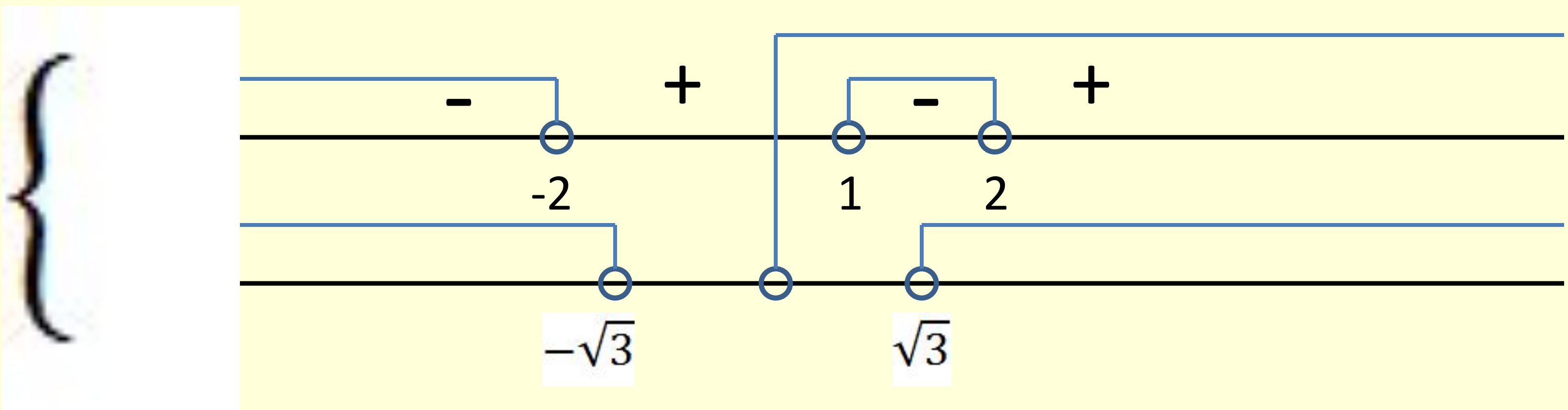
Доказательство замены 6 следует из равносильности неравенств $|p| > |q|$ и $p^2 > q^2$ ($|p| < |q|$ и $p^2 < q^2$).

Пример 1.

Решить неравенство: $\log_x(x^2-3)<0$

Решение:

$$\begin{cases}(x-1)(x^2-3-1)<0\\ x>0\\ x\neq 1\\ x^2-3>0\end{cases}\qquad \begin{cases}(x-1)(x-2)(x+2)<0\\ x>0\\ x\neq 1\\ (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})>0\end{cases}$$



ОТВЕТ: $(-\sqrt{3}; 2)$

Пример 2.

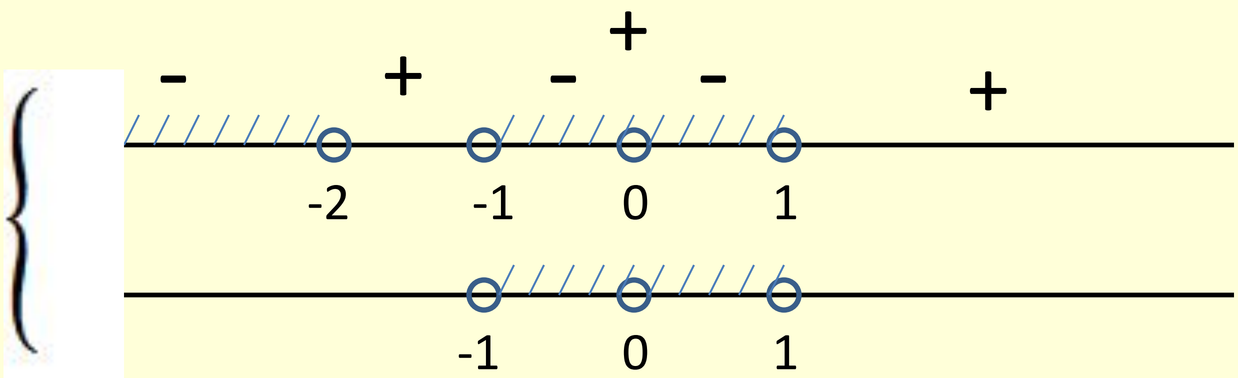
Решить неравенство:

$$\log_{x+3}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right) > 0$$

$$\begin{cases} (x+3-1)\left(\dfrac{1+x^2}{1-x^2}-1\right) > 0; \\ x+3>0; \\ x+3 \neq 1; \\ \dfrac{1+x^2}{1-x^2} > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+2)\dfrac{2x^2}{1-x^2} > 0; \\ x > -3; \\ x \neq -2; \\ 1-x^2 > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2x^2(x+2)}{(x-1)(x+1)} < 0; \\ x > -3; \\ x \neq -2; \\ (x-1)(x+1) < 0; \end{cases}$$



ОТВЕТ: $(-1;0)\cup(0;1)$

Пример 3.

Решить неравенство:

$$\log_{\frac{x}{3}}\left(\log_x\sqrt{3-x}\right)\ge 0$$

Решение:

$$\begin{cases}\left(\frac{x}{3}-1\right)\left(\log_x\sqrt{3-x}-1\right)\ge 0\\ \log_x\sqrt{3-x}>0\\ 3-x>0\\ x>0\\ x\ne 3\\ x\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-3)(x-1)\left(\sqrt{3-x}-x\right)\ge 0\\ (x-1)\left(\sqrt{3-x}-1\right)>0\\ x<3\\ x>0\\ x\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)\left(3-x-x^2\right)\le 0\\ (x-1)(3-x-1)>0\\ x<3\\ x>0\\ x\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+\dfrac{\sqrt{13}+1}{2}\right)\left(x-\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}\right) \geq 0 \\ 1 \langle x \langle 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{13}-1}{2} \leq x \langle 2$$

Ответ: $\left[\dfrac{\sqrt{13}-1}{2};2\right)$

Пример 4.

Решить неравенство:

$$\log_{12x^2-41x+35}(3-x)\geq \log_{2x^2-5x+3}(3-x)$$

Решение:

$$\log_{12x^2-41x+35}(3-x)-\log_{2x^2-5x+3}(3-x)\geq 0$$

$$\begin{cases}(12x^2-41x+34)(2x^2-5x+2)(2-x)(-10x^2+36\quad -32)\geq 0\\ 12x^2-41x+35>0\\ 2x^2-5x+3>0\\ 12x^2-41x+34\neq 0\\ 2x^2-5x+2\neq 0\\ 3-x>0\end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-2)^4\left(x-\dfrac{8}{5}\right)\left(x-\dfrac{17}{12}\right)\left(x-\dfrac{1}{2}\right) \ge 0 \\ \left(x-\dfrac{5}{3}\right)\left(x-\dfrac{7}{4}\right) > 0 \\ (x-1)\left(x-\dfrac{2}{3}\right) > 0 \\ \left(x-\dfrac{17}{12}\right)(x-2) \ne 0 \\ (x-2)\left(x-\dfrac{1}{2}\right) \ne 0 \\ x < 3 \end{cases}$$

Ответ: $\left(\dfrac{1}{2};1\right) \cup \left[\dfrac{8}{5};\dfrac{5}{3}\right) \cup \left(\dfrac{7}{2};2\right) \cup (2;3)$

Решите примеры

Пример 5.

$$\log_{2x}(2x^2 - 4x + 6) \le \log_{2x}(x^2 + x)$$

ОТВЕТ

Пример 6.

$$\frac{\log_x(x-3) - \log_x(9-x)}{\log_{x-1} x} < 0$$

ОТВЕТ

$$\log_{\frac{1}{x}}\left(\frac{x}{x+1}\right) \cdot \log_{x-2}(x^2+1) \le 0$$

ОТВЕТ

Пример 7.

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x^2} > \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x-2}$$

ОТВЕТ

Пример 9. $\log_{|x+2|}(4+7x-2x^2) \leq 2$

ОТВ
ЕТ

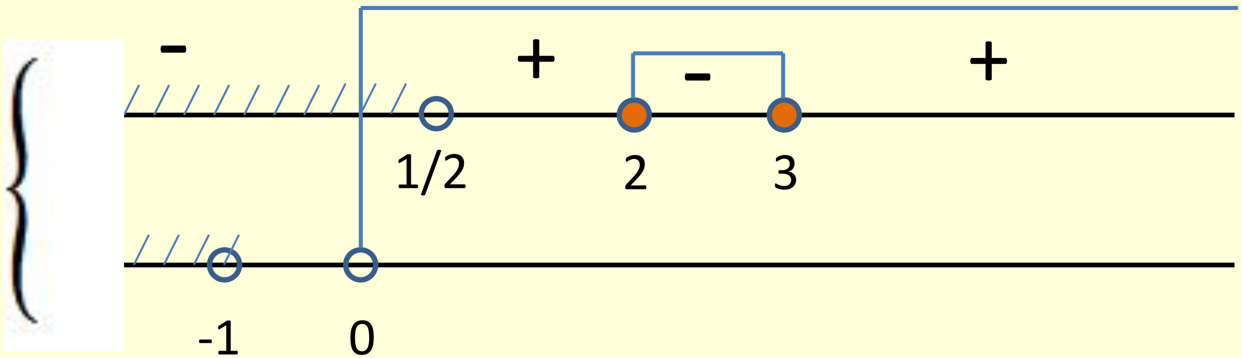
Пример 10. $\log_{\frac{x}{3}}(\log_x \sqrt{3-x}) \geq 0$

ОТВ
ЕТ

Пример 11. $\log_{2x+1}(4x-5)+\log_{4x-5}(2x+1) \leq 2$

ОТВ
ЕТ

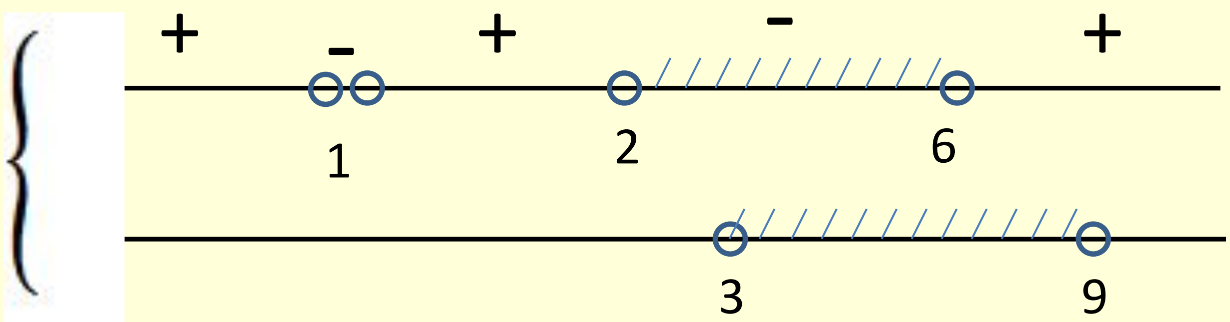
Пример 5



ОТВЕТ: $\left(0;\frac{1}{2}\right) \cup [2;3]$

НАЗАД

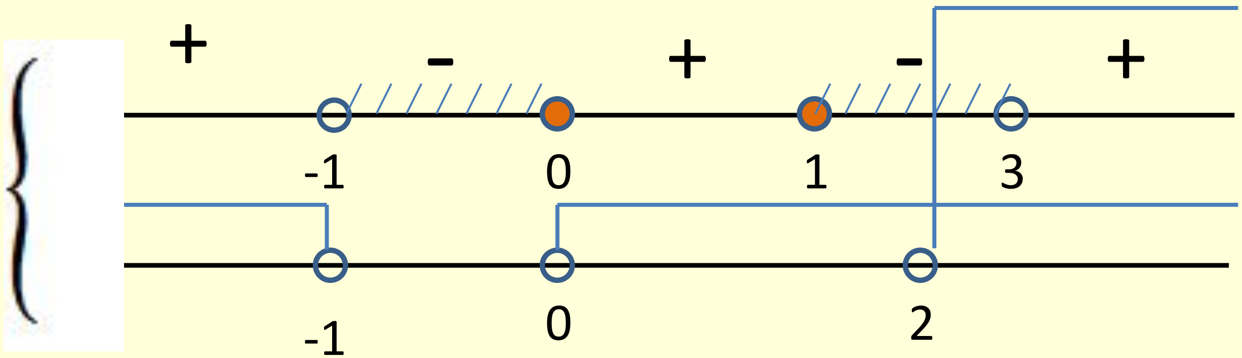
Пример 6



ОТВЕ
Т: $(3; 6)$

НАЗА
Д

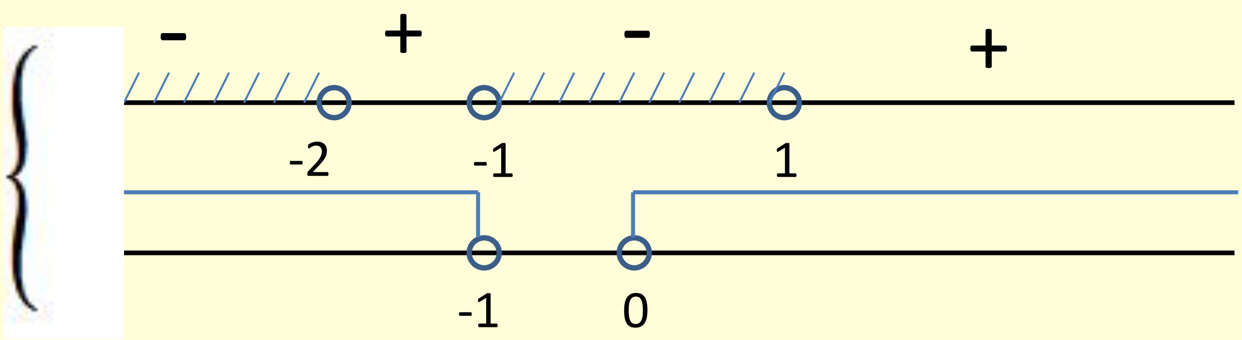
Пример 7



ОТВЕ
Т: (2;3)

НАЗА
Д

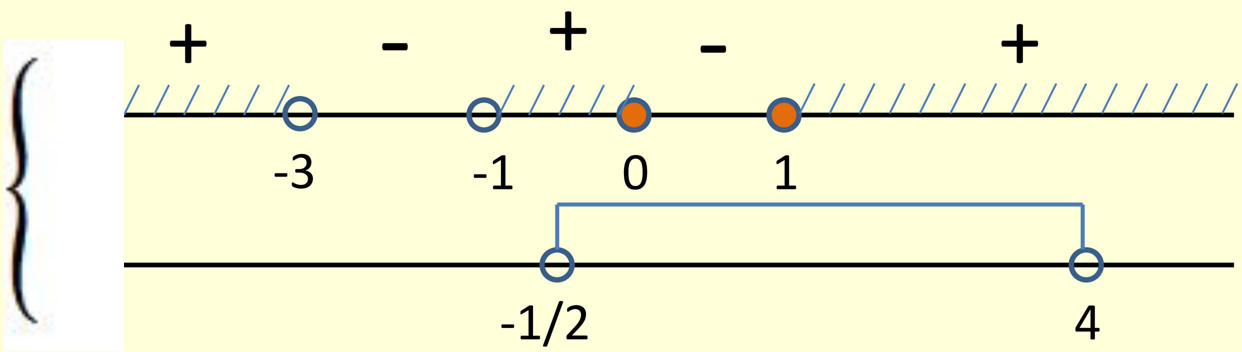
Пример 8



ОТВЕ
Т: $(-\infty; -2) \cup (0; 1)$

НАЗА
Д

Пример 9

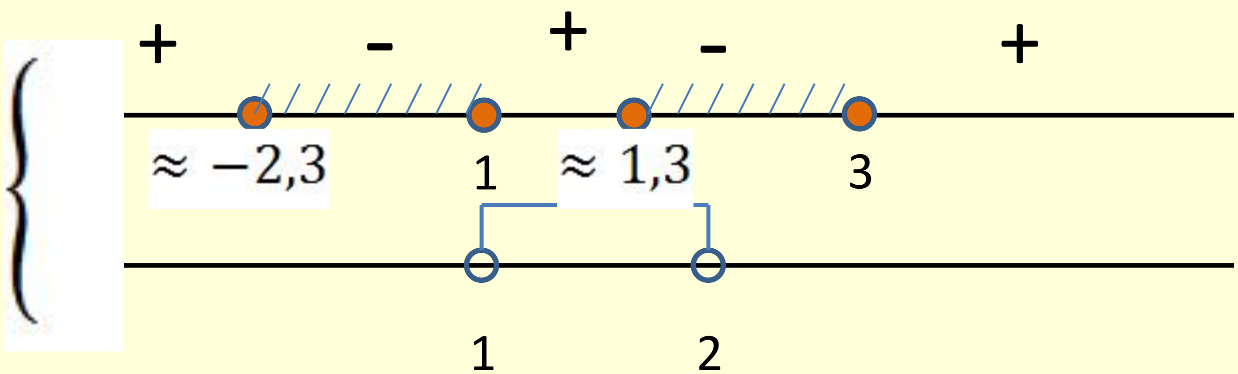


ОТВЕТ:

$$\left(-\frac{1}{2};0\right] \cup [1;4)$$

НАЗАД

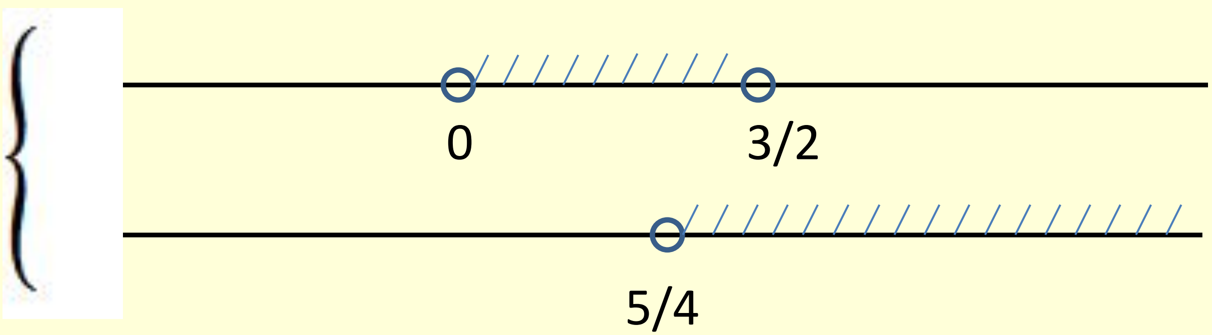
Пример 10



ОТВЕТ: $\left[\dfrac{\sqrt{13}-1}{2};2\right)$

НАЗАД

Пример 11



ОТВЕ
Т:

$$x \in \left(\frac{5}{4};\frac{3}{2}\right) \cup \{3\}$$

СПИСОК использованной литературы

- Корянов А. Г., Прокофьев А. А. – Методы решения неравенств с одной переменной. – 2011.
- Моденов В. П. – Пособие по математике. – 1972.
- Ткачук В.В. - Математика абитуриенту. Москва: МЦНМО, 2008.