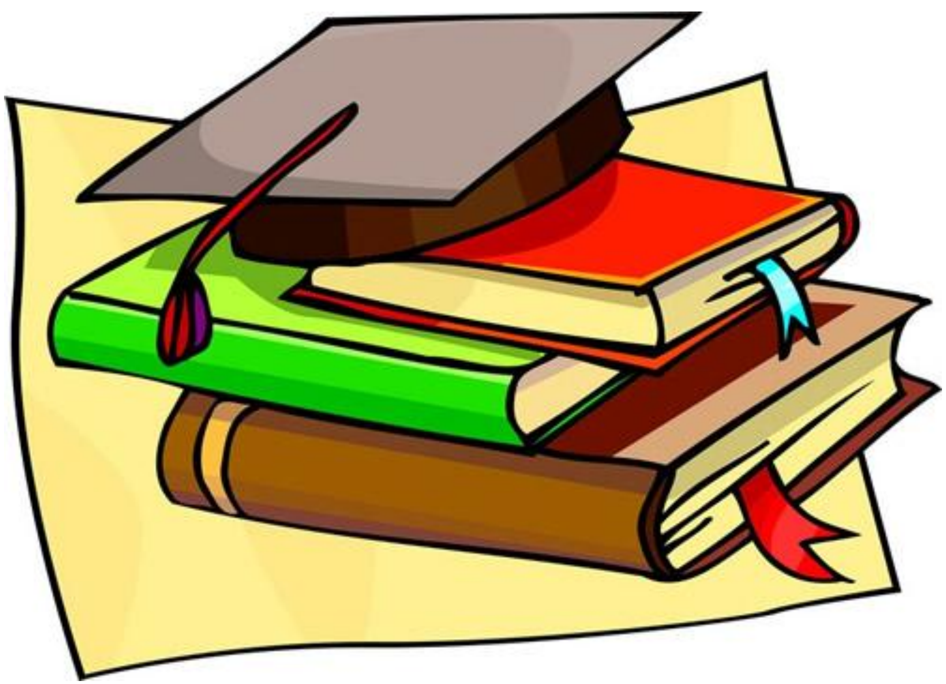
Площадь криволинейной трапеции

вторник, 1 декабря 2020 г.



Криволинейная трапеция

В декартовой прямоугольной системе координат XOY фигура, ограниченная осью OX, прямыми x=a, x=b (a<b) и графиком непрерывной неотрицательной на отрезке [a;b] функции y=f(x), называется криволинейной трапецией

Для вычисления площади этой фигуры применяется следующая теорема

Теорема: Если функция f(x) непрерывна и не отрицательна на [а ; в], *то* справедлива формула

$$S=\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

Формула Ньютона-Лейбница

В честь английского физика Исаака Ньютона и немецкого философа Готфрида Лейбница.

Получивших ее независимо друг от друга и практически одновременно

Определённый интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

И. Ньютон

Формула Ньютона-Лейбница

Г. Лейбниц

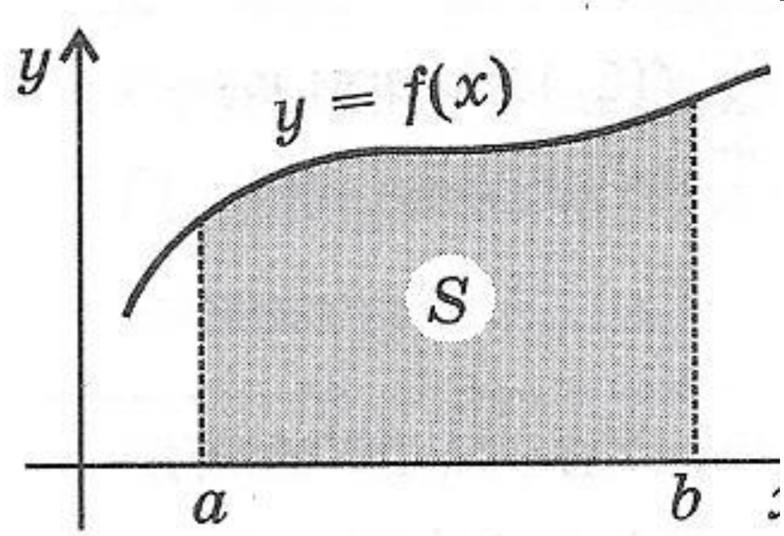
$$\int_a^b f(x)dx$$

Называется определенным интегралом

Числа а и в пределами интегрирования. (нижний, в – верхний)

Геометрический смысл определенного интеграла

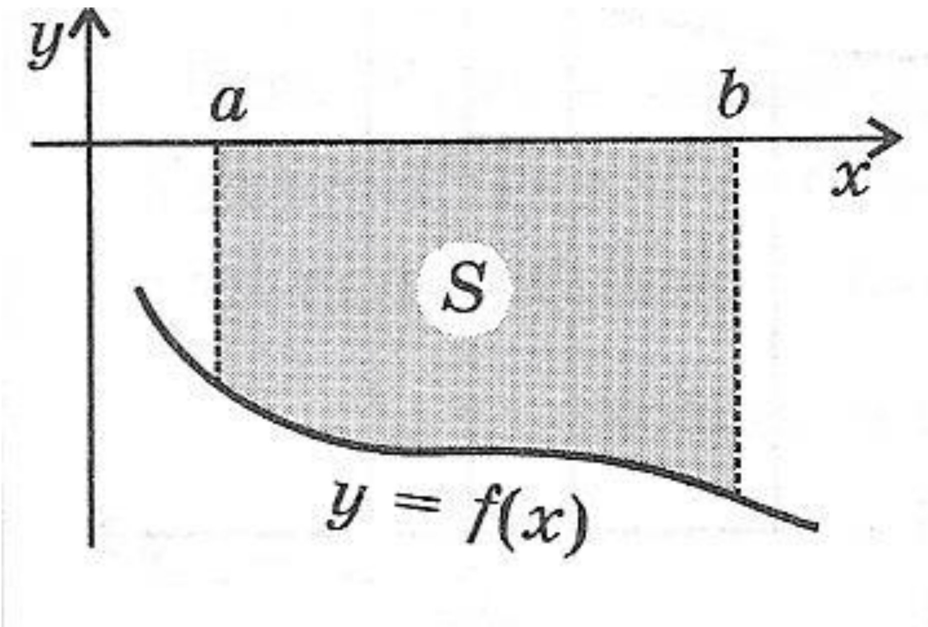
Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной положительной на промежутке [a;b] функции f(x), осью x и прямыми x=a и x=b:



$$S = \int_a^b f(x)dx$$

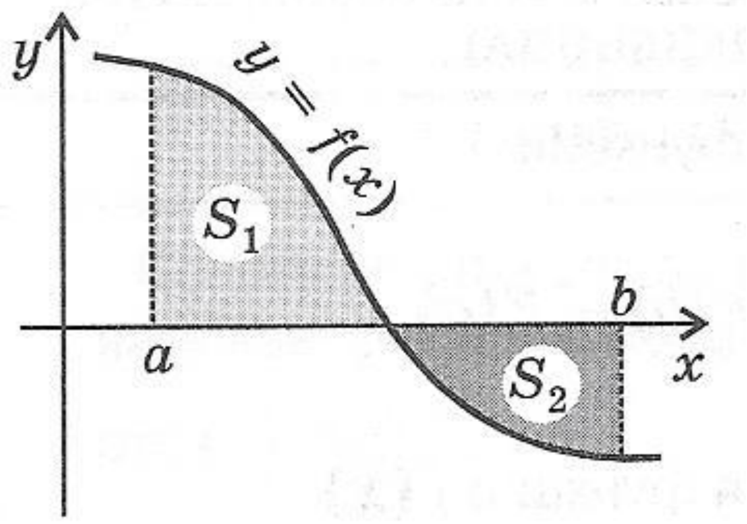
Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной отрицательной на промежутке [a;b] функции f(x), осью x

x=a и x=b:



$$S=-\int_a^b f(x)dx$$

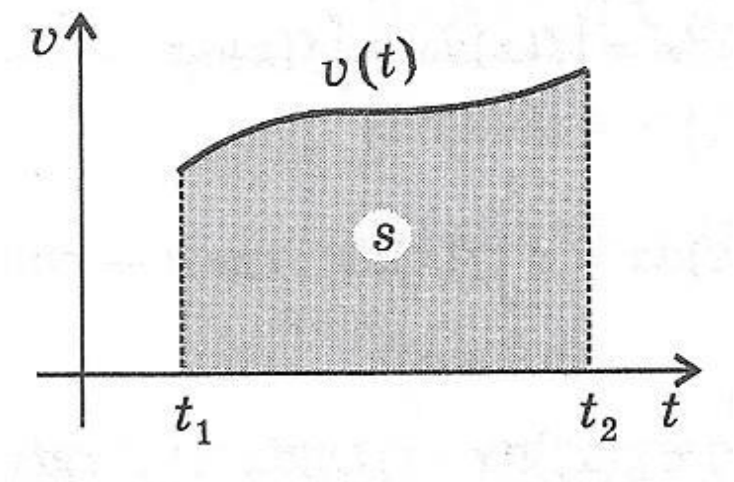
Замечание: Если функция изменяет знак на промежутке [a;b] , то



$$S = S_1 - S_2 = \int_a^b f(x)dx$$

Физический смысл определенного интеграла

При прямолинейном движении перемещение s численно равно площади криволинейной трапеции под графиком зависимости от времени t:

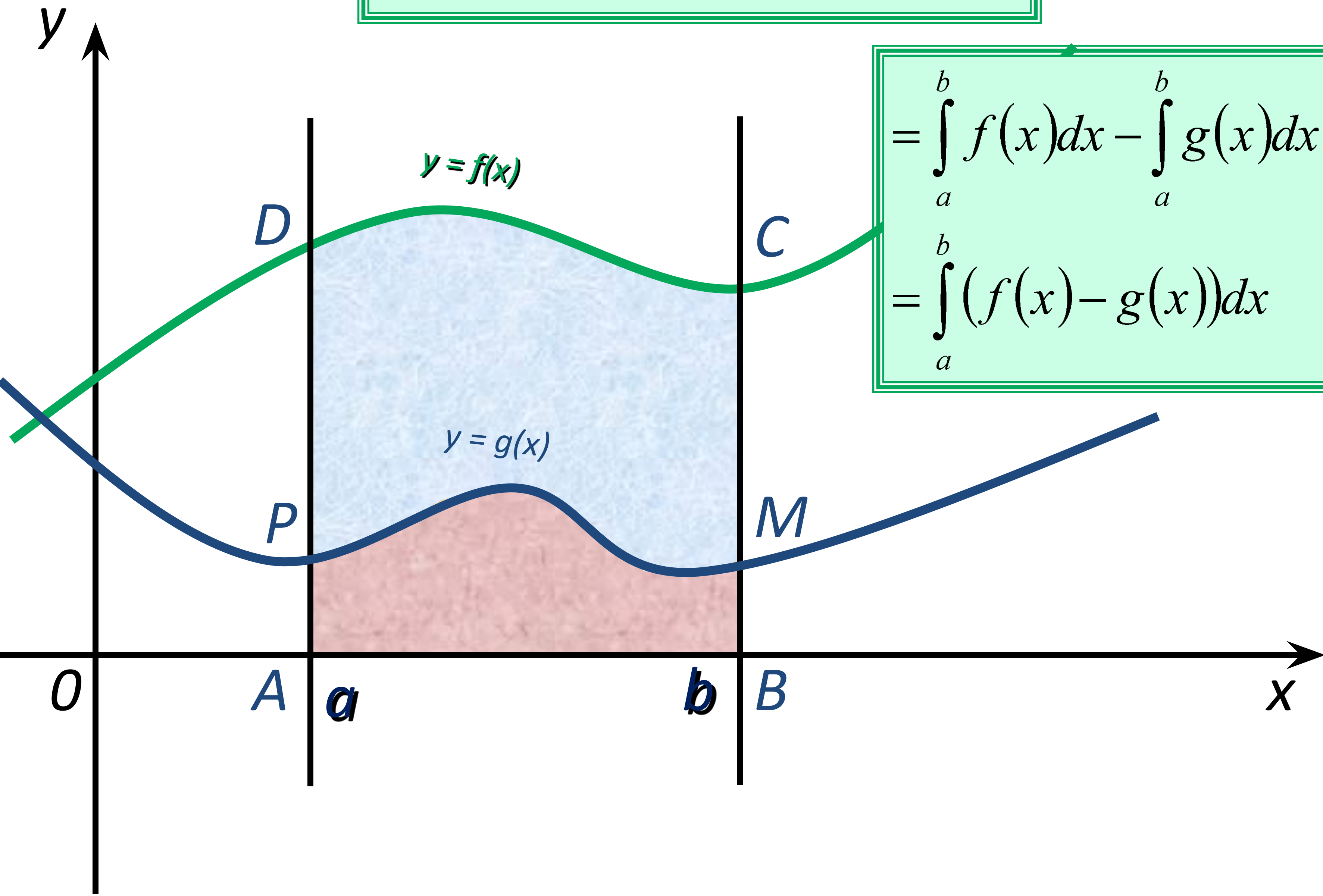


$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$$

$$S_{PMCD} = S_{ABCD} - S_{ABMP} =$$

$$= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx =$$

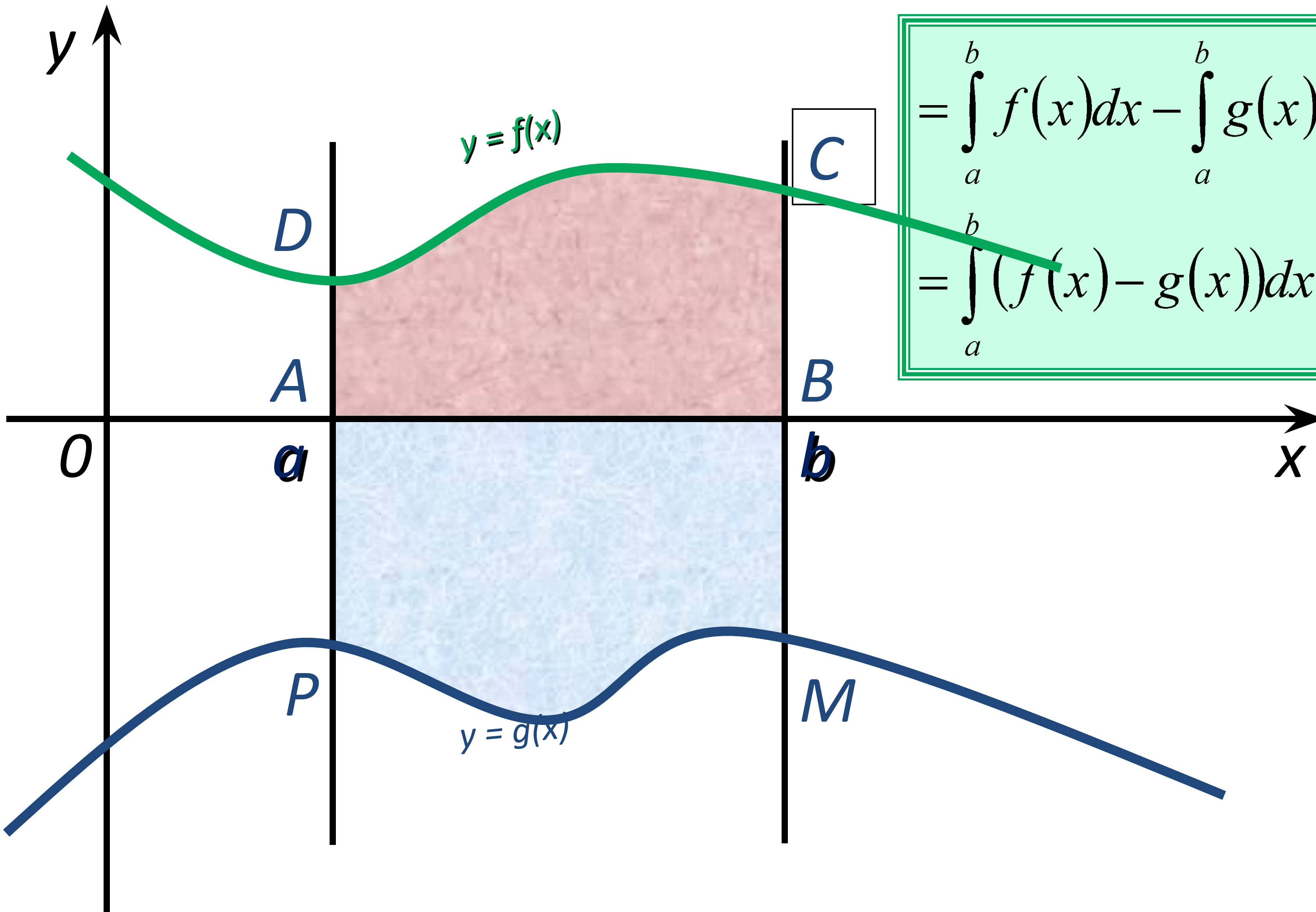
$$= \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$



$$S_{PMCD} = S_{ABCD} + S_{ABMP} =$$

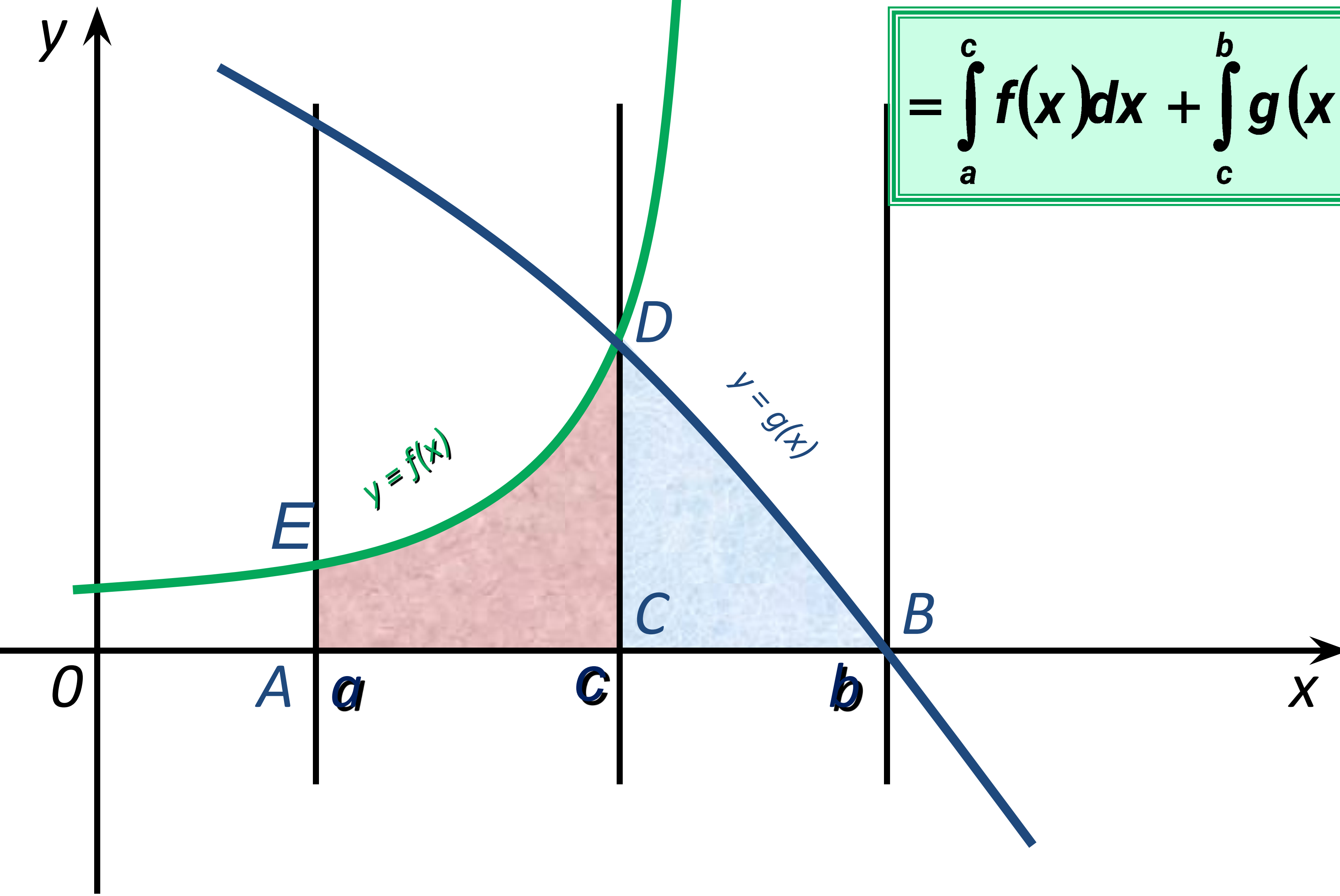
$$= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx =$$

$$= \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx$$

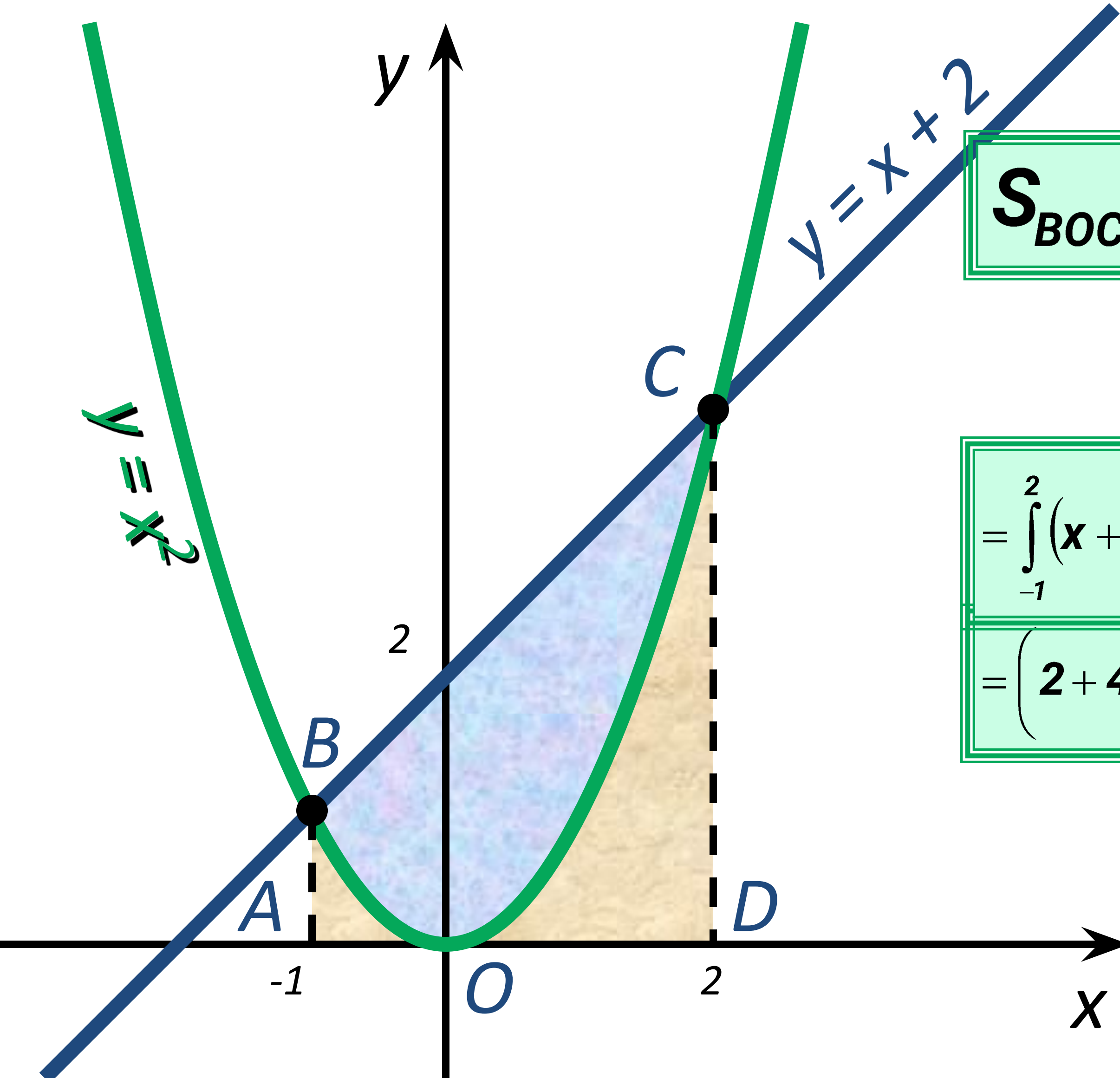


$$S_{AEDB} = S_{AEDC} + S_{CDB} =$$

$$= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b g(x)dx$$



вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = x + 2$.



$$S_{BOC} = S_{ABCD} - S_{ABOCD} =$$

$$= \int_{-1}^{2} (x+2)dx - \int_{-1}^{2} (x^2)dx =$$

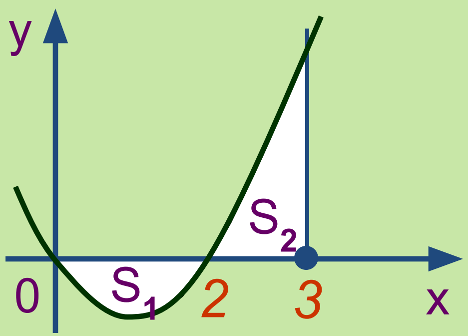
$$= \int_{-1}^{2} \left(x + 2 - x^2\right)dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2} =$$

$$= \left(2 + 4 - \frac{8}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}\right) = 5 - \frac{1}{2} = 4{,}5$$

Пример.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью ОХ, и графиком функции:

$$y = x^2 - 2x \qquad x \in [0; 3]$$



$$S = S_1 + S_2 =$$

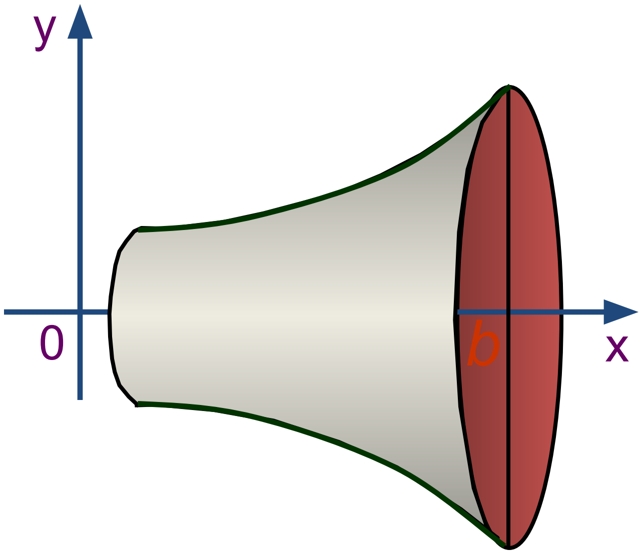
$$= \left| \int_0^2 (x^2 - 2x)\, dx \right| + \left| \int_2^3 (x^2 - 2x)\, dx \right| =$$

$$= \left| \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Bigg|_0^2 \right| + \left| \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Bigg|_2^3 \right| =$$

$$= \left| \left(\frac{8}{3} - 4 \right) \right| + \left| \left(\frac{27}{3} - 9 \right) - \left(\frac{8}{3} - 4 \right) \right| = \left| -\frac{4}{3} \right| + \left| \frac{4}{3} \right| = \boxed{\frac{8}{3}}$$

Вычисление объема тела вращения

Пусть вокруг оси *OX* вращается криволинейная трапеция, ограниченная непрерывной линией $y = f(x) > 0$, отрезком [a; b] и прямыми $x = a$, $x = b$.



Полученная при вращении фигура называется ***телом вращения***. Объем полученного тела вычисляется по формуле:

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx$$

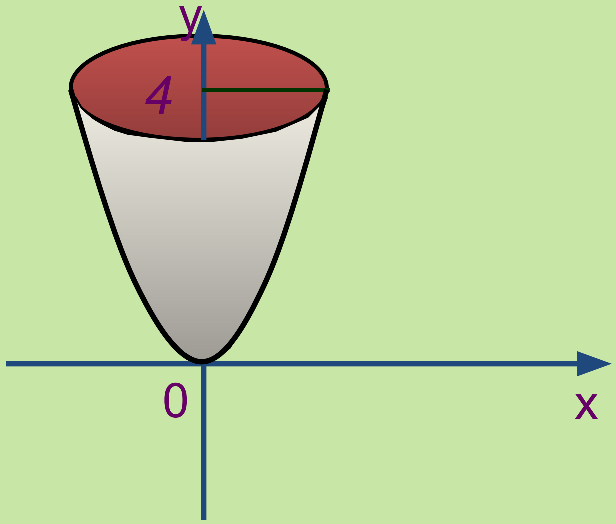
Если криволинейная трапеция, ограниченная графиком функции $x = q(y) > 0$, прямыми $y = c$, $y = d$ и осью *OY*, то объем тела, образованного вращением этой фигуры вокруг оси *OY* равен:

$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dy$$

Пример.

Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями:

$y = x^2; \quad x = 0; \quad y = 4$ *вокруг оси OY.*



$$V_y = \pi \int_0^4 \sqrt{y}^2 dy = \pi \int_0^4 y dy =$$

$$= \pi \left. \frac{y^2}{2} \right|_0^4 = \boxed{8\pi}$$