Элементы высшей математики

Преподаватель: Гомзяков Борис Игоревич

Каждой группе создать беседу в Телеграмме с названием дисциплины и своей группы и добавить туда меня @gomzyakov1

Тетрадь для лекций и тетрадь для семинаров

Консультационные часы (в колледже или в Discord) сообщу дополнительно

Элементы высшей математики

План на 1 семестр.

В 1 семестре пройдём следующие разделы (с написанием 4 контрольных работ):

- Матрицы и определители (к/р)
- Системы линейных уравнений (СЛУ) (к/р)
- Комплексные числа
- Векторная алгебра (к/р)
- Аналитическая геометрия на плоскости
- Функции, пределы (к/р)

Элементы высшей математики

Для допуска к экзамену должны быть сданы все к/р на оценки «удовлетворительно», «хорошо», «отлично».

Если с 1 раза контрольную написать не удалось, можно будет переписать её в консультационные часы, предварительно сдав работу над ошибками по своей прошлой работе.

Экзамен будет проходить по билетам. В каждом билете будет 1 теоретический вопрос и 2 практических.

Для первых 3 разделов (матрицы и определители, СЛУ, комплексные числа) рекомендую использовать учебник Куроша А.Г. «Курс высшей алгебры».

Матрицы. Операции над матрицами.

Сириус
IT-Колледж

Матрицы

Матрицей A размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица из m строк и n столбцов, состоящая из чисел или иных математических выражений a_{ij} (называемых *элементами матрицы*), $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Матрица A с элементами a_{ij} обозначается также (a_{ij}).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Например, $A = \begin{pmatrix} 1 & x & 3 \\ -2y & -5 & 0 \end{pmatrix}$ — матрица 2×3, ее элементы $a_{11} = 1$, $a_{12} = x$, $a_{13} = 3$, $a_{21} = -2y$, $\ldots$

Матрицы

Квадратной матрицей n-го порядка называется матрица размера $n \times n$. *Диагональной* называется квадратная матрица, у которой все элементы вне главной диагонали (т. е. с индексами $i \neq j$) равны нулю. *Единичной* (обозначается E) называется диагональная матрица с единицами на главной диагонали. *Нулевой* называется матрица, все элементы которой равны нулю.

Примеры матриц: а) квадратная; б) диагональная; в) единичная; г) нулевая: а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 3 & x & -1 \\ 0 & 2x & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Операции над матрицами

⇛ *Суммой матриц* $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинакового размера называется матрица $C = (c_{ij})$ того же размера, причем $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall\, i, j$.

Свойства операции сложения матриц. Для любых матриц A, B и C одного размера выполняются равенства:

1) $A + B = B + A$ (коммутативность);
2) $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$ (ассоциативность).

⇛ *Произведением* матрицы $A = (a_{ij})$ на число λ называется матрица $B = (b_{ij})$ того же размера, что и матрица A, причем $b_{ij} = \lambda a_{ij}, \forall\, i, j$.

Свойства операции умножения матрицы на число:

1) $\lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda \cdot \mu) \cdot A$ (ассоциативность);
2) $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$ (дистрибутивность относительно сложения матриц);
3) $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$ (дистрибутивность относительно сложения чисел).

Сириус IT-Колледж

Операции над матрицами

$\Rrightarrow$ *Линейной комбинацией матриц* A и B одинакового размера называется выражение вида $\alpha \cdot A + \beta \cdot B$, где α и β — произвольные числа.

$\Rrightarrow$ *Произведением* $A \cdot B$ *матриц* A и B (размеров $m \times n$ и $n \times r$ соответственно) называется матрица C размера $m \times r$, такая, что

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{ik} \cdot b_{kj} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Произведение $A \cdot B$ существует, только если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

Свойства операции умножения матриц:

1) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B \cdot C$ (ассоциативность);
2) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ (дистрибутивность);
3) $A \cdot (B + C) = A \cdot C + B \cdot C$ (дистрибутивность);
4) вообще говоря, $A \cdot B \neq B \cdot A$ — отсутствует коммутативность.

Операции над матрицами

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$. Найти произведения AB и BA (если это возможно).

- $$AB = \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 3} \\ 1 \quad 0 \quad -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 6 \\ 7 \end{matrix}} & \begin{matrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 5 \\ -2 \\ 8 \end{matrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{1-я строка матрицы } A \text{ прикладывается} \\ \text{к первому столбцу матрицы } B, \\ \text{соответствующие элементы перемножаются,} \\ \text{а произведения складываются} \end{array} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{1 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7} & 1 \cdot 4 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 5 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 8 \\ 1 \cdot 3 + 0 \cdot 6 + (-1) \cdot 7 & 1 \cdot 4 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 5 + 0 \cdot (-2) + (-1) \cdot 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 36 & 7 & 25 \\ -4 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Сириус
IT-Колледж

Операции над матрицами

$\Rrightarrow$ *Коммутирующими* (или перестановочными) называются матрицы A и B, для которых $AB = BA$.

Если задан многочлен $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, то *матричным многочленом* $f(A)$ называется выражение $a_n \cdot A^n + a_{n-1} \cdot A^{n-1} + \ldots$ $\ldots + a_1 \cdot A + a_0 \cdot E$, где $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ раз}}$ для любого натурального n. Значением матричного многочлена $f(A)$ при заданной матрице A является матрица.

$\Rrightarrow$ *Транспонированной* к матрице $A = (a_{ij})$ называется матрица $A^T = (a^T_{ij})$ такая, что $a^T_{ij} = a_{ji}$, $\forall\ i, j$ (т. е. все строки которой равны соответствующим столбцам матрицы A).

Сириус IT-Колледж

Операции над матрицами

Найти значение матричного многочлена $f(A)$, если $f(x) = -2x^2 + 5x + 9$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

◐ $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot3 & 1\cdot2+2\cdot0 \\ 3\cdot1+0\cdot3 & 3\cdot2+0\cdot0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$,

$f(A) = -2A^2 + 5A + 9E = -2 \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + 9 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -14 & -4 \\ -6 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$. ●

Транспонировать матрицу $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

◐ Записывая первую и вторую строки матрицы A как первый и, соответственно, второй столбец матрицы A^T, получим матрицу $A^T = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. ●

Операции над матрицами

Элемент строки матрицы назовем *крайним*, если он отличен от нуля, а все элементы этой строки, находящиеся левее него, равны нулю. Матрица называется *ступенчатой*, если крайний элемент каждой строки находится правее крайнего элемента предыдущей строки. В матрицах A и B отмечены крайние элементы каждой строки:

$$A = \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 0 \\ 0 & \underline{-1} & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 4 & 7 \\ 0 & \underline{-1} & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

не ступенчатая ступенчатая

Операции над матрицами

Элементарными преобразованиями матрицы называются следующие операции:

1. Перемена местами двух строк (столбцов).

2. Умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля.

3. Прибавление к элементам одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца).

Матрица B, полученная из матрицы A с помощью элементарных преобразований, называется *эквивалентной* матрице A (обозначается $B \sim A$).

Операции над матрицами

Привести к ступенчатому виду матрицу A с помощью элементарных преобразований над строками:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \\ -5 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Операции над матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \\ -5 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mathrm{II} - 3\cdot\mathrm{I} \\ \mathrm{III} + 5\cdot\mathrm{I} \end{matrix} \sim$$

$$\sim A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 2\cdot\mathrm{III} + 3\cdot\mathrm{II} \end{matrix} \sim$$

$$\sim A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ — ступенчатая матрица.} \quad \bullet$$

Сириус
IT-Колледж

Определители

Любой квадратной матрице n-го порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ можно поставить в соответствие выражение, которое называется *определителем (детерминантом)* матрицы A, и обозначается так:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ или } |A| \text{ или } \det A.$$

$\Rrightarrow$ Определитель 2-го порядка задается равенством:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} + (-a_{12}a_{21}).$$

Таким образом, определитель 2-го порядка есть сумма $2 = 2!$ слагаемых, каждое из которых представляет собой произведение 2-х сомножителей — элементов матрицы A, по одному из каждой строки и каждого столбца. Одно из слагаемых берется со знаком «+», другое — со знаком «−».

Определители

$\Rrightarrow$ Определитель 3-го порядка задается равенством:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} +$$

$$+ (-a_{13}a_{22}a_{31}) + (-a_{12}a_{21}a_{33}) + (-a_{11}a_{23}a_{32}). \quad (2.1)$$

Таким образом, определитель 3-го порядка есть сумма $6 = 3!$ слагаемых, каждое из которых представляет собой произведение 3-х сомножителей — элементов матрицы A, по одному из каждой строки и каждого столбца. Одна половина слагаемых берется со знаком «+», другая — со знаком «−». Правило, по которому выбираются эти знаки, задается с помощью формулы (2.1) или другими методами, приведенными ниже.

Определитель n-го порядка задается равенством:

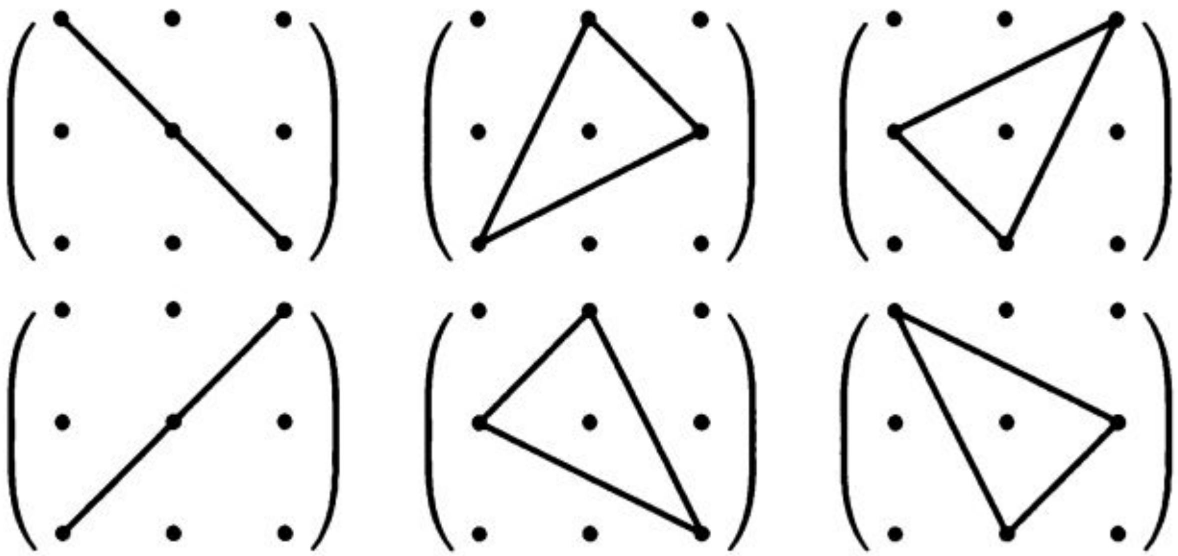
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (\pm a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot \ldots \cdot a_{ni_n}).$$

Методы вычисления определителей

1. *Правило «треугольников»* (правило Саррюса) вычисления определителей 3-го порядка: первое из трех слагаемых, входящих в сумму (2.1) со знаком «+», есть произведение элементов главной диагонали, второе и третье — произведения элементов, находящихся в вершинах двух треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали. Три слагаемых, входящих в сумму (2.1) со знаком «−», определяются аналогично, но относительно второй (побочной) диагонали:

«+»

«−»



Методы вычисления определителей

2. *Разложение определителя 3-го порядка по первой строке:*

$$\det A = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \qquad (2.2)$$

При таком способе вычисления определителя каждый из трех элементов a_{1j} первой строки умножается на определитель 2-го порядка, составленный из элементов матрицы A, оставшихся после вычеркивания 1-й строки и j-го столбца. При этом слагаемое с множителем a_{1j} умножается на число $(-1)^{1+j}$:

$$\det A = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+3} \cdot a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, вычисление определителя 3-го порядка сводится к вычислению 3-х определителей 2-го порядка. В общем случае можно вычислять определитель n-го порядка квадратной матрицы A, сводя его к вычислению n определителей $(n-1)$-го порядка.

Методы вычисления определителей

Вычислить определители второго порядка:

$$\begin{vmatrix} x & xy \\ 1 & y \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}.$$

Вычислить определитель 3-го порядка: $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$

Сириус IT-Колледж

Домашнее задание

Найти значение матричного многочлена $f(A)$:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Проверить, коммутируют ли матрицы A *и* B:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Привести к ступенчатому виду матрицы:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Вычислить определители 3-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

Спасибо за пару!