Лекция 2
Числовые функции
(Количество и сумма натуральных делителей числа. Функция Эйлера)

Количество натуральных делителей числа

Теорема

Пусть $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$ - каноническое разложение натурального числа n (n>1)

Количество натуральных делителей числа n равно $\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\dots(\alpha_s + 1)$

Пример

$\tau(60) = \tau(2^2 \cdot 3 \cdot 5) = (2+1)(1+1)(1+1) = 12$

Сумма натуральных делителей числа

Теорема

Если $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$ ***- каноническое разложение натурального числа n (n>1), то сумма всех натуральных делителей числа n равна***

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_s^{\alpha_s+1} - 1}{p_s - 1}$$

Примеры

$$\tau(1000000) = \tau\left(2^6 \cdot 5^6\right) = 7 \cdot 7 = 49;$$

$$\sigma(1000000) = \frac{2^7 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{5^7 - 1}{5 - 1};$$

$$\tau(4050) = \tau\left(2 \cdot 3^4 \cdot 5^2\right) = 2 \cdot 5 \cdot 3 = 30;$$

$$\sigma(4050) = \frac{2^2 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{3^5 - 1}{3 - 1} \cdot \frac{5^3 - 1}{5 - 1} = 11253.$$

Функция Эйлера

Функция Эйлера $\varphi(a)$ определяется для всех целых положительных a и представляет собою число чисел ряда

$$0,\ 1,\ \ldots.,\ a - 1, \tag{1}$$

взаимно простых с a.

Пример:

$\varphi(1) = 1$, $\varphi(4) = 2$,

$\varphi(2) = 1$, $\varphi(5) = 4$,

$\varphi(3) = 2$, $\varphi(6) = 2$.

Теорема 1: Пусть

$$a = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k} \tag{2}$$

- каноническое разложение числа a. Тогда имеем

$$\varphi(a) = a\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right), \tag{3}$$

или также

$$\varphi(a) = \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}\right)\left(p_2^{\alpha_2} - p_2^{\alpha_2 - 1}\right)\ldots\left(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k - 1}\right). \tag{4}$$

В частности, будем иметь

$$\varphi\left(p^{\alpha}\right) = p^{\alpha} - p^{\alpha - 1}, \varphi(p) = p - 1. \tag{5}$$

Функция Эйлера

Пример:

$$\varphi(60) = 60\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right) = 16,$$

$$\varphi(81) = 81 - 27 = 54,$$

$$\varphi(5) = 5 - 1 = 4.$$