

Проектирование условий измерений

Обратная задача теории погрешности измерений.

Задача *предрасчета условий измерений*:

- в заданных пределах, предельное (лимитированное) проектирование,

- **оптимальна** по какому-либо критерию, с получением наилучших значений – *оптимальное проектирование*.

Из условий измерений (**средства и методы измерения**):

- точность измерений,
- состав измерений,
- количество измерений,
- внутренняя геометрия измерений.

Проектирование условий измерений

Задача предельного проектирования точности одной функции: задана функция, и ее погрешность σ_f

Предрасчитать (спроектировать) условия измерений чтобы при их реализации мы получили именно наиболее похожую на **заданную** погрешность функции.

Основа:

$$\begin{aligned}\sigma_f^2 &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \cdot \sigma_1^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot \sigma_i^2 + 2 \sum_{i < j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \cdot K_{ij} = \\ &= f_1^2 \cdot \sigma_1^2 + \dots + f_i^2 \cdot \sigma_i^2 + 2 \sum_{i < j} f_i \cdot f_j \cdot r_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j = f \cdot K_x \cdot f^T\end{aligned}$$

Проектирование условий измерений

Необходимость привлечения **дополнительной информации** об условиях измерений.

Принцип взвешенных влияний с равными условиями –

предположение о равном влиянии на конечный результат частей в выражении для погрешности с *коэффициентом влияния (весом)* слагаемых.

Проектирование условий измерений

Пример:

$$\sigma_f^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 \cdot \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 \cdot \sigma_2^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} \right)^2 \cdot \sigma_3^2$$

$$\sigma_f^2 = w_1 \cdot \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 \cdot \sigma_1^2 \right) + w_2 \cdot \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 \cdot \sigma_2^2 \right) + w_3 \cdot \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_3} \right)^2 \cdot \sigma_3^2 \right)$$

$$w_1 \cdot \sigma_1^2 \approx w_2 \cdot \sigma_2^2 \approx w_3 \cdot \sigma_3^2 \quad \sigma_i^2 = \frac{\sigma_f^2}{\left[f^2 \right] \cdot w_i}$$

Другие возможности: досчет (что то задано), равенство.

Проектирование условий измерений

Из равенности - «принцип равных влияний».

Основной способ - проектирование по точности:

$$1. \sigma_1 \approx \sigma_2 \approx \dots = \sigma$$

$$\sigma_f^2 = f_1^2 \cdot \sigma^2 + \dots + f_i^2 \cdot \sigma^2 + 2 \sum_{i < j} f_i \cdot f_j \cdot r_{ij} \cdot \sigma \cdot \sigma =$$

$$= \sigma^2 \cdot \left([f^2] + 2 \sum_{i < j} f_i \cdot f_j \cdot r_{ij} \right)$$

$$\sigma = \sigma_f \cdot \sqrt{\frac{1}{\left([f^2] + 2 \cdot \sum_{i < j} f_i \cdot f_j \cdot r_{ij} \right)}} = \sigma_f \cdot \sqrt{\frac{1}{(f \cdot R_x \cdot f^T)}}$$

Основной частный случай без связи:

$$\sigma = \frac{\sigma_f}{\sqrt{([f^2])}}$$

Проектирование условий измерений

$$\sigma_f^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \cdot \sigma_1^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot \sigma_i^2 + 2 \sum_{i < j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \cdot K_{ij} =$$

$$= f_1^2 \cdot \sigma_1^2 + \dots + f_i^2 \cdot \sigma_i^2 + 2 \sum_{i < j} f_i \cdot f_j \cdot r_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j = f \cdot K_x \cdot f^T$$

2. $f_1 \cdot \sigma_1 \approx f_2 \cdot \sigma_2 \approx \dots \approx f_n \cdot \sigma_n$

$$\sigma_f^2 = n(f_i^2 \cdot \sigma_i^2) + 2 \sum_{i < j} (f_i^2 \cdot \sigma_i^2) \cdot r_{ij} = n(f_i^2 \cdot \sigma_i^2) + 2(f_i^2 \cdot \sigma_i^2) \sum_{i < j} r_{ij} =$$

$$= (f_i^2 \cdot \sigma_i^2) \cdot \left(n + 2 \sum_{i < j} r_{ij} \right) \longrightarrow \frac{\sigma_f^2}{n + 2 \sum_{i < j} r_{ij}} = f_i^2 \cdot \sigma_i^2$$

$$\sigma_i = \sigma_f \cdot \sqrt{\frac{1}{f_i^2 \cdot e R_x e^T}} = \sigma_f \cdot \sqrt{\frac{1}{\bar{f}_i R_x \bar{f}_i^T}}$$

Главный частный случай без связи

где \bar{f}_i - вектор од. пр.

$$\sigma_i = \frac{\sigma_f}{f_i \sqrt{n}}$$

Проектирование условий измерений

$$\begin{aligned}\sigma_f^2 &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \cdot \sigma_1^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot \sigma_i^2 + 2 \sum_{i < j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \cdot K_{ij} = \\ &= f_1^2 \cdot \sigma_1^2 + \dots + f_i^2 \cdot \sigma_i^2 + 2 \sum_{i < j} f_i \cdot f_j \cdot r_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j = f \cdot K_x \cdot f^T\end{aligned}$$

3. $f_1 \cdot \sigma_1^2 \approx f_2 \cdot \sigma_2^2 \approx \dots \approx f_i \cdot \sigma_i^2$

$$\sigma_f^2 = f_1 \cdot (f_1 \sigma_1^2) + \dots + f_n \cdot (f_n \sigma_n^2) + 2 \sum_{i < j} f_i \cdot f_j \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j \cdot r_{ij}$$

$$\sigma_f^2 = (f_1 + f_2 + \dots + f_n) \cdot f_i \sigma_i^2 = [f] \cdot f_i \sigma_i^2$$

$$\sigma_i = \sigma_f \cdot \sqrt{\frac{1}{f_i \cdot f R_x e^T}} = \sigma_f \cdot \sqrt{\frac{1}{f R_x \bar{f}^T}} = \sigma_f \cdot \sqrt{\frac{1}{f_i \cdot [f]}}$$

Главный частный случай без связи

$$\sigma_i = \frac{\sigma_f}{\sqrt{f_i \cdot [f]}}$$

Проектирование условий измерений

Маркузе М.Ю. – степенное взвешивание:

$$m_i^2 = \frac{m_f^2}{\left(f_i^{h_i+2}\right) \cdot \left(\left[f^{-h_i} \right]\right)}$$

При $h = -2$, предположение 1;

при $h = 0$, предположение 2;

при $h = -1$, предположение 3.

Тяжесть учета корреляции.

Проектирование условий измерений

Необходимость альтернативы при проектировании.

Проектирование на основе *случайного поиска* (*перебора*) - *сеточный метод*. Суть. Результат - *n*-мерные (по числу аргументов) **сетки**. Пример:

$$m_P^2 = m_S^2 + S^2 \cdot \frac{m_\alpha^2}{\rho^2}$$

Длина $S = 100$ м, $m_P = 5$ см: m_S и m_α - ?.

Шаг погрешности длины 1 см, с 1 см, например, до 7 см,

Шаг погрешности угла с 10" через 10" до 60". Таблица погрешностей для m_P при разных точностях.

Проектирование условий измерений

Оптимальное проектирование - получение **наилучшей** точности из всех возможных. Не
возможность для одномерных задач:
минимальная точность функции при **нулевой**
точности измерений.

Условная оптимизация (минимизация) Лагранжа
– измерения связаны математическим условием.

Проектирование условий измерений

Проектирование по геометрии:

1. Погрешности измерений σ_i известны, $f_1 \approx f_2 \approx \dots \approx f$:

$$\sigma_f^2 = f^2 \cdot \left([\sigma^2] + 2 \sum_{i < j} \sigma_i \cdot \sigma_j \cdot r_{ij} \right)$$

$$f = \sigma_f \cdot \sqrt{\frac{1}{\left([\sigma^2] + 2 \cdot \sum_{i < j} \sigma_i \cdot \sigma_j \cdot r_{ij} \right)}} = \sigma_f \cdot \sqrt{\frac{1}{\left(\sigma \cdot R_x \cdot \sigma^T \right)}} =$$

$$= \sigma_f \cdot \sqrt{\frac{1}{\left(e \cdot K_x \cdot e^T \right)}}$$

Проектирование условий измерений

2. Погрешности измерений σ_i известны и

$$f_1 \cdot \sigma_1 \approx f_2 \cdot \sigma_2 \approx \dots f_n \cdot \sigma_n$$

$$f_i = \sigma_f \cdot \sqrt{\frac{1}{\sigma_i^2 \cdot \left(n + 2 \sum_{i < j} r_{ij} \right)}} = \sigma_f \cdot \sqrt{\frac{1}{\sigma_i^2 \cdot e R_x e^T}} =$$

$$= \sigma_f \cdot \sqrt{\frac{1}{\bar{\sigma}_i \cdot R_x \cdot \bar{\sigma}_i^T}}$$

Проектирование условий измерений

3. Погрешности измерений σ_i известны и

$$f_1 \cdot \sigma_1^2 \approx f_2 \cdot \sigma_2^2 \approx \dots f_i \cdot \sigma_i^2$$

$$f_i = \sigma_f \cdot \sqrt{\frac{1}{\sigma R_x \bar{\sigma}_i^T}}$$

Частности: одинаковые погрешности, нет связей

Проектирование условий измерений

Проектирование условий измерений сводная таблица

<i>Условия</i>	<i>Проектирование σ_i</i>	<i>Проектирование f_i</i>
1	$\sigma = \sigma_f \cdot \sqrt{\frac{1}{fR_x f^T}}$	$f_i = \sigma_f \cdot \sqrt{\frac{1}{\sigma R_x \sigma^T}}$
2	$\sigma_i = \sigma_f \cdot \sqrt{\frac{1}{\bar{f}_i R_x \bar{f}_i^T}}$	$f_i = \sigma_f \cdot \sqrt{\frac{1}{\bar{\sigma}_i R_x \bar{\sigma}_i^T}}$
3	$\sigma_i = \sigma_f \cdot \sqrt{\frac{1}{fR_x \bar{f}_i^T}}$	$f_i = \sigma_f \cdot \sqrt{\frac{1}{\sigma R_x \bar{\sigma}_i^T}}$

Проектирование условий измерений

Проектирование измерений для вектор-функции-
отыскание значений матрицы $K_Y = F K_x F^T$

Всегда K_Y задана, виды проектирования:

- нахождение значений матрицы F - *проектирование геометрии*);
- нахождение матрицы K_x - *проектирование точности*.

Наиболее простой вид задачи:

Заданна матрица результатов K_Y и матрица геометрии F .

Предрасчитать точность измерений без учета тесноты связи -элементы **диагональной** матрицы измерений K_x

$$\begin{matrix} K_Y & = & F & \cdot & K_x & \cdot & F^T \\ (k \times k) & & (k \times n) & & (n \times n) & & (n \times k) \end{matrix}$$

Проектирование условий измерений

Если $n = k$

$$\begin{bmatrix} f_{11} & \boxtimes & f_{1n} \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ f_{n1} & \boxtimes & f_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_1 & \boxtimes & 0 \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ 0 & \boxtimes & k_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_{11} & \boxtimes & f_{n1} \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ f_{1n} & \boxtimes & f_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & \boxtimes & K_{1n} \\ \boxtimes & \boxtimes & \\ K_{n1} & \boxtimes & K_{nn} \end{bmatrix}$$

n НЕИЗВЕСТНЫХ - $t = \frac{n(n+1)}{2}$ уравнений вида

$$K_{11} = f_{11}^2 \cdot k_1 + f_{12}^2 \cdot k_2 + \dots + f_{1n}^2 \cdot k_n$$

$$K_{12} = f_{11}f_{21} \cdot k_1 + f_{12}f_{22} \cdot k_2 + \dots + f_{1n}f_{2n} \cdot k_n$$

... ..

Проектирование условий измерений

Система в матричном виде с размерами будет

$$\begin{matrix} k_y & = & A & \cdot & k_x \\ (t \times 1) & & (t \times n) & & (n \times 1) \end{matrix}$$

Решение по МНК или левая трансформация Гаусса

(домножить на A^T)

$$A^T \cdot A \cdot k_x = A^T \cdot k_y$$

Другие возможности.