

АЛГЕБРА

8 КЛАСС.

УРОК НА ТЕМУ:
СТЕПЕНЬ С
ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ
ПОКАЗАТЕЛЕМ.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Степень с отрицательным показателем.

Ребята, мы с вами хорошо умеем возводить числа в степень. Например,

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16, (-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 27$$

Так же мы хорошо знаем, что любое число в нулевой степени равно единице.

$$a^0 = 1, a \neq 0.$$

Возникает вопрос, а что будет, если возвести число в отрицательную степень?

Чему, например, будет равно число

Первые математики, задавшись этим 2^{-2} вопросом, решили, что изобретать велосипед заново не стоит, и хорошо, чтобы все свойства степеней оставались прежними. То есть при умножении степеней с одинаковым основанием, показатели степени складывались.

Степень с отрицательным показателем.

Давайте рассмотрим такой случай:

$$2^3 \cdot 2^{-3} = 2^{3-3} = 2^0 = 1$$

Получили, что произведение таких чисел должно давать единицу. Единица в произведении получается при перемножении обратных чисел, то есть

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3}$$

Такие рассуждения привели к следующему определению.

Определение. Если n – натуральное число и $a \neq 0$, то выполняется равенство:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Степень с отрицательным показателем.

Важное тождество которое используется часто:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

В частности,

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{-n} = a^n$$



Степень с отрицательным показателем.

Пример. Вычислите $2^{-3} + \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} - 8^{-1}$

Решение. Рассмотрим каждое слагаемое по отдельности:

1. $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{8}$

2. $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5^2}{2^2} = \frac{25}{4}$

3. $8^{-1} = \frac{1}{8}$

Осталось выполнить операции сложения и вычитания:

$$\frac{1}{8} + \frac{25}{4} - \frac{1}{8} = \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$$

Ответ: $6\frac{1}{4}$

Степень с отрицательным показателем.

Пример 2. Представить заданное число в виде степени простого числа

$$\frac{1}{729}$$

Решение. Очевидно, что $\frac{1}{729} = 729^{-1}$

Но 729 не простое число, заканчивающиеся на 9, можно предположить, что это число является степень тройки, последовательно разделим 729 на 3

1) $729:3=243$ **2)** $243:3=81$ **3)** $81:3=27$ **4)** $27:3=9$ **5)** $9:3=3$ **6)** $3:3=1$

Выполнено шесть операций и значит: $729 = 3^6$

Для нашей задачи: $729^{-1} = (3^6)^{-1} = 3^{-6}$

Ответ: 3^{-6}

Степень с отрицательным показателем.

Пример 3. Представьте выражение в виде степени:

$$\frac{a^6 \cdot (a^{-5})^2}{(a^{-3} \cdot a^8)^{-1}}$$

Решение. Первое действие выполняется как всегда внутри скобок, затем умножение

$$\frac{a^6 \cdot (a^{-5})^2}{(a^{-3} \cdot a^8)^{-1}} = \frac{a^6 \cdot a^{-10}}{(a^5)^{-1}} = \frac{a^{-4}}{a^{-5}} = a^{-4-(-5)} = a^{-4+5} = a$$

Ответ: а.

Степень с отрицательным показателем.

Пример 4. Докажите тождество:

$$\left(\frac{y^2(xy^{-1} - 1)^2}{x(1 + x^{-1}y)^2} \cdot \frac{y^2(x^{-2} + y^{-2})}{x(xy^{-1} + x^{-1}y)} \right) : \frac{1 - x^{-1}y}{xy^{-1} + 1} = \frac{x - y}{x + y}$$

Решение.

В левой части, рассмотрим каждый сомножитель в скобках отдельно:
1.

$$\begin{aligned} \frac{y^2(xy^{-1} - 1)^2}{x(1 + x^{-1}y)^2} &= \frac{y^2(\frac{x}{y} - 1)^2}{x(1 + \frac{y}{x})^2} = \\ &= \frac{y^2(\frac{x^2}{y^2} - 2\frac{x}{y} + 1)}{x(1 + 2\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2})} = \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x + 2y + \frac{y^2}{x}} = \frac{x^2 - 2xy + y^2}{\frac{x^2 + 2xy + y^2}{x}} = \frac{x(x^2 - 2xy + y^2)}{x^2 + 2xy + y^2} \end{aligned}$$

Степень с отрицательным показателем.

2.

$$\frac{y^2(x^{-2} + y^{-2})}{x(xy^{-1} + x^{-1}y)} = \frac{y^2\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right)}{x\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)} =$$
$$= \frac{\frac{y^2}{x^2} + 1}{\frac{x^2}{y} + y} = \frac{\frac{y^2 + x^2}{x^2}}{\frac{x^2 + y^2}{y}} = \frac{y^2 + x^2}{x^2} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{y}{x^2}$$

3.

$$\frac{x(x^2 - 2xy + y^2)}{x^2 + 2xy + y^2} \cdot \frac{y}{x^2} = \frac{y(x^2 - 2xy + y^2)}{x(x^2 + 2xy + y^2)} = \frac{y(x - y)^2}{x(x + y)^2}$$

4. Перейдем к дроби на которую делим:

$$\frac{1 - x^{-1}y}{xy^{-1} + 1} = \frac{1 - \frac{y}{x}}{\frac{x}{y} + 1} = \frac{\frac{x - y}{x}}{\frac{x + y}{y}} = \frac{x - y}{x} \cdot \frac{y}{x + y} = \frac{y(x - y)}{x(x + y)}$$

5. Выполним деление:

$$\frac{y(x - y)^2}{x(x + y)^2} : \frac{y(x - y)}{x(x + y)} = \frac{y(x - y)^2}{x(x + y)^2} \cdot \frac{x(x + y)}{y(x - y)} = \frac{x - y}{x + y}$$

Получили верное тождество, что и требовалось доказать.

Степень с отрицательным показателем.

В конце урока еще раз запишем правила действий со степенями, в этот раз показатель степени целое число:

$$a^s \cdot a^t = a^{s+t}$$

$$a^s : a^t = a^{s-t}$$

$$(a^s)^t = a^{st}$$

$$(ab)^s = a^s \cdot b^s$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^s = \frac{a^s}{b^s}$$