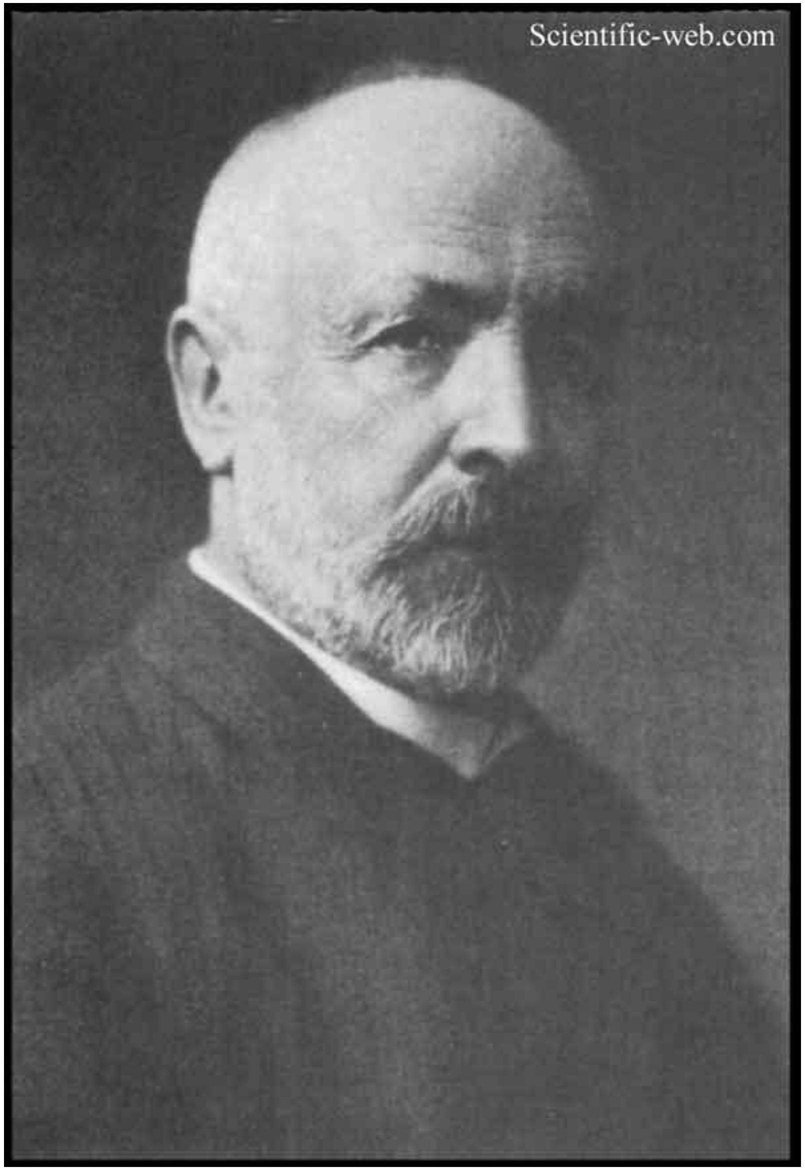
Элементы теории множеств

Определение множества

- **Величиной** называется все что может быть измерено и выражено числом.
- **Множеством** называется совокупность некоторых элементов. Элементами множества могут быть числа, фигуры, предметы, понятия и т.п.



«Множество есть многое, мыслимое нами как единое».

Основоположник теории множеств немецкий математик

Георг Кантор (1845-1918)

- С понятием множества мы соприкасаемся прежде всего тогда, когда по какой-либо причине объединяем по некоторому признаку в одну группу какие-то объекты и далее рассматриваем эту группу или совокупность как единое целое. Множества принято обозначать заглавными латинскими буквами. Объекты, которые образуют множество, называют элементами множества и для обозначения элементов используют, как правило, малые буквы латинского алфавита.

Примеры множеств:

- множество учащихся в данной аудитории;

- множество людей, живущих на нашей планете в данный момент времени;

- множество точек данной геометрической фигуры;
  множество чётных чисел;

- множество корней уравнения $x2-5x+6=0$;

- множество действительных корней уравнения $x2+9=0$;

Дни недели

понедельник

вторник

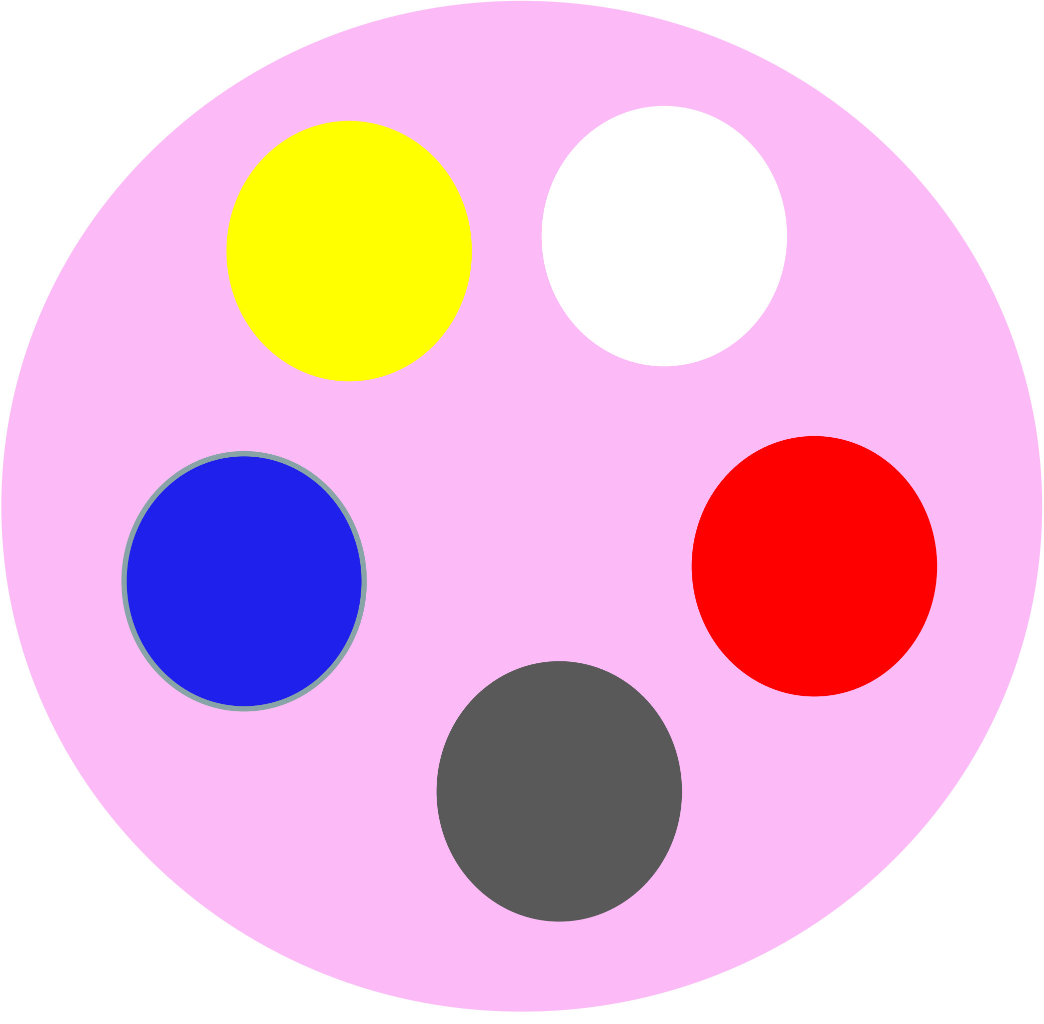
среда

пятница

суббота

Музыкальные инструменты

Цвета



математика

чтение

русский язык

рисование

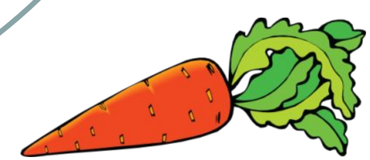
физкультура

родной язык

окружающий мир

информатика

Составь множество из соответствующих элементов



Множество живых существ

- Объекты, из которых состоит множество, называются его ЭЛЕМЕНТАМИ.
- Если элемент x принадлежит множеству X, то записывают $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ ($\in$ — принадлежит).
- В противном случае, если a не принадлежит множеству A, будем $a \notin A$ использовать обозначение $\notin$. Если множество A является частью множества B, то записывают $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ ($\subset$ — содержится).

Способы задания множеств

1. Множество может быть задано перечислением всех его элементов или списком. В этом случае элементы множества записывают внутри фигурных скобок, например: или A={студент А., рабочий Л., школьник М.}.
2. Множество может быть задано описанием свойств его элементов. Чаще всего при этом используют запись, которую читают следующим образом: «A есть множество элементов b таких, что для них выполняется свойство B». Например, a – четное натуральное число.
3. Множество можно задать порождающей процедурой, например: A={a|a=2k, k-любое натуральное число}.

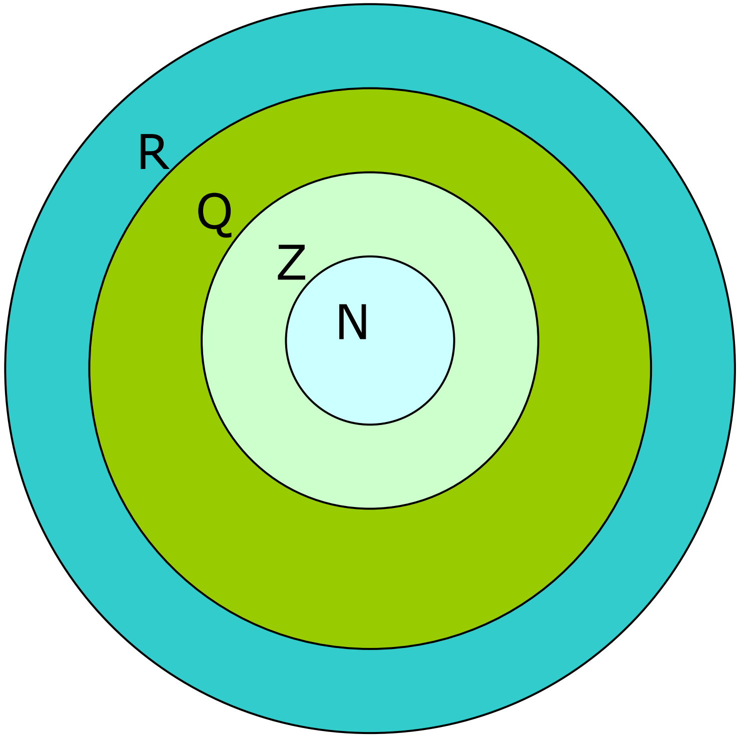
Например, перечислением заданы следующие множества:

- A={1,2,3,5,7} — множество чисел
- X={x1,x2,...,xn} — множество некоторых элементов x1,x2,...,xn
- N={1,2,...,n} — множество натуральных чисел
- Z={0,±1,±2,...,±n} — множество целых

Чисел

$A=\{x \mid x^2-5x+6=0\}$.

- N – множество всех натуральных чисел;
- Z– множество всех целых чисел;
- Q – множество всех рациональных чисел;
- R – множество всех действительных чисел;



Пример

- Мы говорим, что число 5 натуральное, т.е. утверждаем, что число 5 принадлежит множеству натуральных чисел. Символически принадлежность множеству записывается с помощью знака $\in$. В данном случае символическая запись будет такой: $5 \in N$. Читается: “5 принадлежит множеству натуральных чисел”.
- Число 5,2 не принадлежит множеству натуральных чисел, т.к. не является натуральным числом. Символически отношение “не принадлежит” записывается с помощью знака (реже $\notin$). Таким образом, здесь имеем: $5{,}2 \notin N$
- Читается: “5,2 не принадлежит множеству натуральных чисел”.

Поставьте вместо звездочки знак так, чтобы получить правильное утверждение:

- $5 * N$;
- $–5 * Q$;
- $3{,}14 * Q$;
- $2 * R$;
- $0 * N$;
- $-12 * Z$;
- $\pi * Q$;
- $3 * \varnothing$

Задайте перечислением элементов множество:

1) $A = \{x \mid x \in N, x^2 - 4 = 0\}$;
2) $B = \{x \mid x \in Z, |x| < 5\}$;
3) $C = \{x \mid x \in N, x \le 20, x = 5k, k \in Z\}$.

По числу элементов, входящих в множество, множества делятся на три класса:

1 – конечные,

2 – бесконечные,

3 – пустые.

Если элементы множества можно сосчитать, то множество является КОНЕЧНЫМ

Пример

Множество гласных букв в слове “математика” состоит из трёх элементов – это буквы “а”, “е”, “и”, причем, гласная считается только один раз, т.е. элементы множества при перечислении не повторяются.

Если элементы множества сосчитать невозможно, то множество БЕСКОНЕЧНОЕ

Пример

- Множество натуральных чисел бесконечно.

Пример

- Множество точек отрезка [0;1] бесконечно.

Примеры

1). множество, содержащее 6 элементов (конечное множество).

2). бесконечное счетное множество.

3). множество, содержащее 5 элементов, два из которых –   и , сами являются множествами.

- В теории множеств отдельно вводится множество, которое не содержит ни одного элемента. Такое множество называется пустым и обозначается символом $\varnothing$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется ПУСТЫМ. Символически оно обозначается знаком $\varnothing$

Пример

- Множество действительных корней уравнения $x^2+1=0$.

Пример

- Множество людей, проживающих на Солнце.

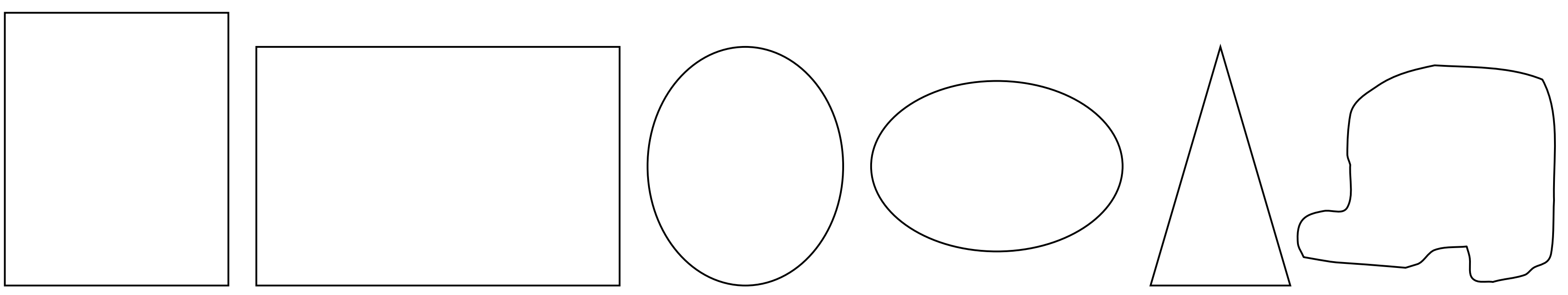
Мощность множества

- Число элементов конечного множества называют мощностью этого множества и обозначают символом Card A или |A|.
- Количество элементов в конечном множестве естественно характеризовать их числом.
- В этом смысле множество чисел {-2, 0, 3,8} и множество букв {c, x, ф, a} эквивалентны, так как они содержат одинаковое число элементов.

- В любой конкретной задаче приходится иметь дело только с подмножествами некоторого, фиксированного для данной задачи, множества. Его принято называть универсальным (универсумом) и обозначать символом U. Например, при сборке некоторого изделия универсальным множеством естественно назвать множество всех деталей и сборочных элементов, из которых это изделие состоит. Если мы рассматриваем множества, связанные с какими-нибудь фигурами на плоскости, то в качестве универсального множества можно выбрать множество всех точек плоскости.

Отношения между множествами

- Наглядно отношения между множествами изображают при помощи особых чертежей, называемых КРУГАМИ ЭЙЛЕРА (или диаграммами Эйлера – Венна).
- Для этого множества, сколько бы они ни содержали элементов, представляют в виде кругов или любых других замкнутых кривых (фигур)



- При графическом изображении множеств удобно использовать диаграммы Венна, на которых универсальное множество обычно представляют в виде прямоугольника, а остальные множества в виде овалов, заключенных внутри этого прямоугольника

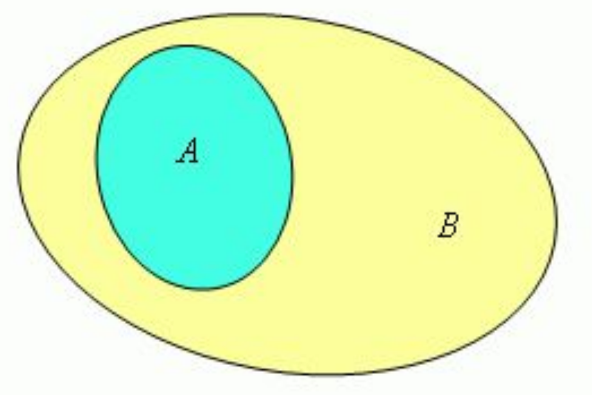


Рис.1

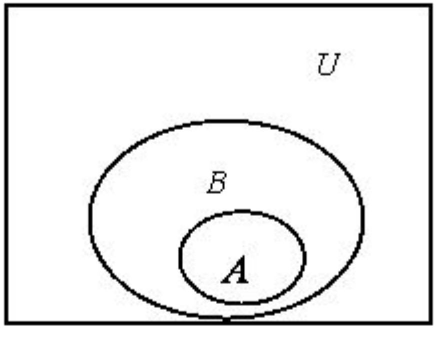
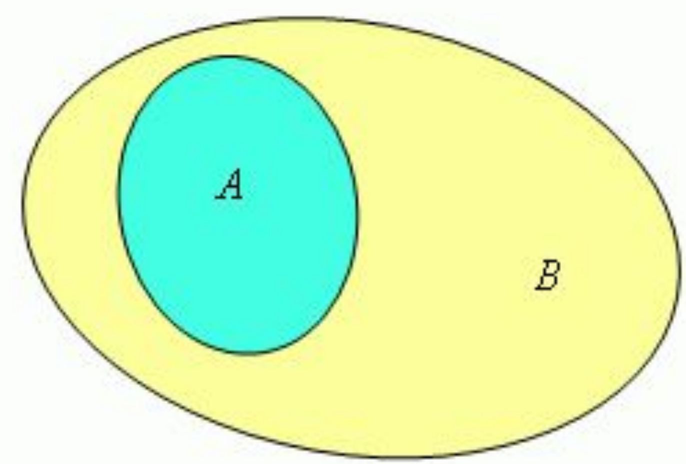


Рис. 1.1

- Множество А называется подмножеством множества В, если любой элемент множества А принадлежит множеству В. При этом пишут $A \subset B$, где $\subset$ есть знак вложения подмножества. Из определения следует, что для любого множества справедливы, как минимум, два вложения $A \subset A$ и $\varnothing \subset A$.

Говорят, что множество *A* содержится в множестве *B* или множество *A* является ***подмножеством*** множества *B* (в этом случае пишут $A \subset B$), если каждый элемент множества *A* одновременно является элементом множества *B* . Эта зависимость между множествами называется ***включением***. Для любого множества *A* имеют место включения:

$\varnothing \subset A$ и $A \subset A$.



- Определить как между собой соотносятся множества $A = \{1, 2, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 3, 5\}$

Количество подмножеств

Если мощность множества n, то у этого множества 2^n подмножеств.

$A=\{1,2\}$

Подмножества A:

$\{\varnothing\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1,2\}$.

Количество подмножеств

B={1,3,5}

Подмножества B:
{∅}, {1}, {3}, {5}, {1,3}, {1,5}, {5,3}, {1,3,5}

C={а,и,е,о}

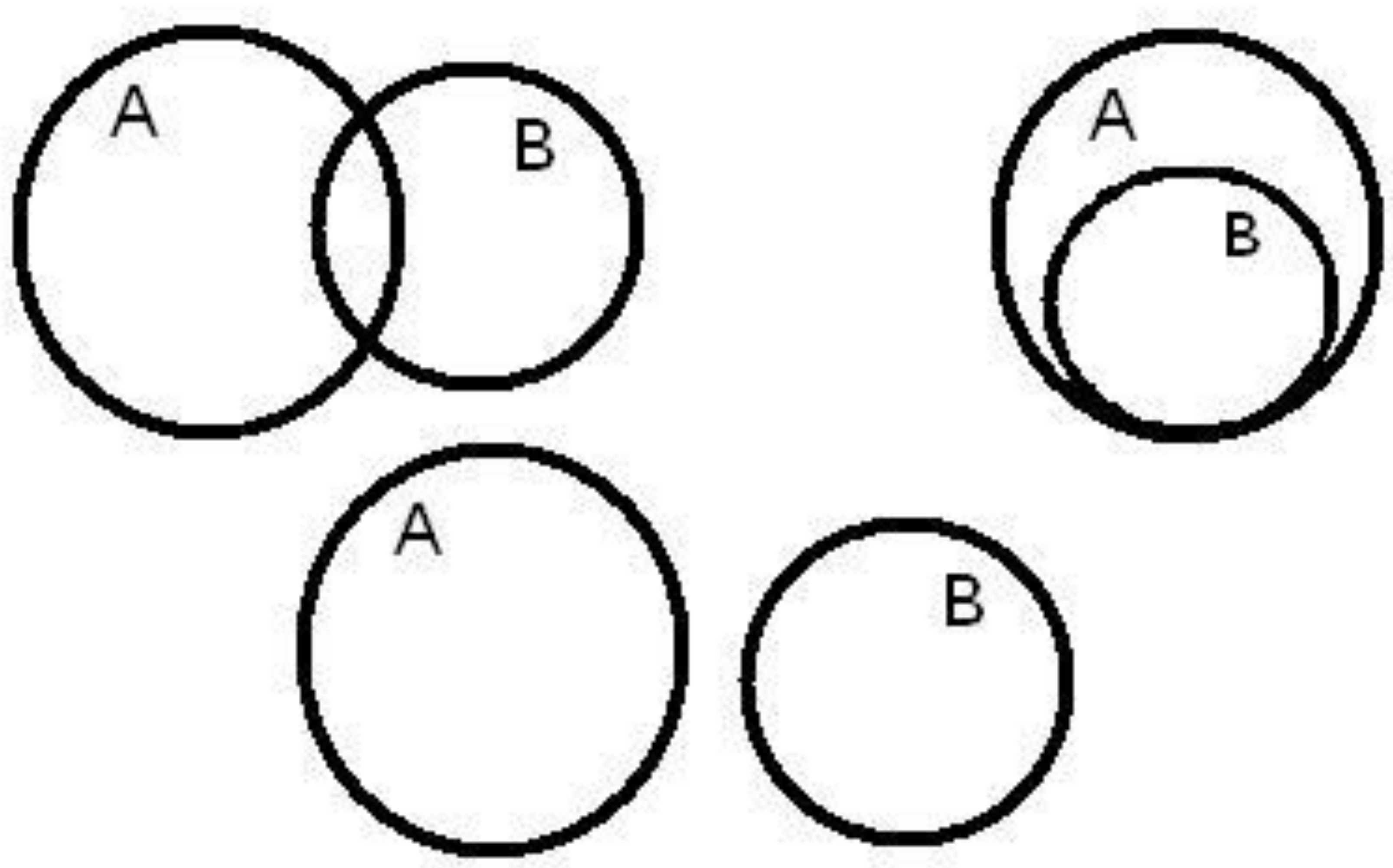
Подмножества C:
{∅}, {а}, {и}, {е}, {о}, {а,и}, {а,е}, {а, о}, {и,е}, {и,о}, {е, о}, {а,и,е}, {а,и,о}, {а,е,о}, {и,е,о}, {а, и,е,о}.

Два множества A и B называются ***равными*** ($A = B$), если они состоят из одних и тех же элементов, то есть каждый элемент множества A является элементом множества B и наоборот, каждый элемент множества B является элементом множества A .

Операции над множествами

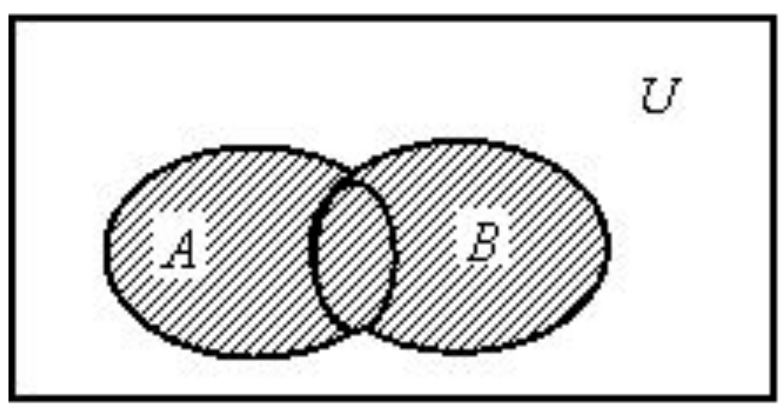
- Два **множества А и В равны** (А=В), если они состоят из одних и тех же элементов.
  Например, если А={1,2,3,4}, В={3,1,4,2} то А=В.
- {a,b,c,d}={c,b,a,d}.

Отношения множеств



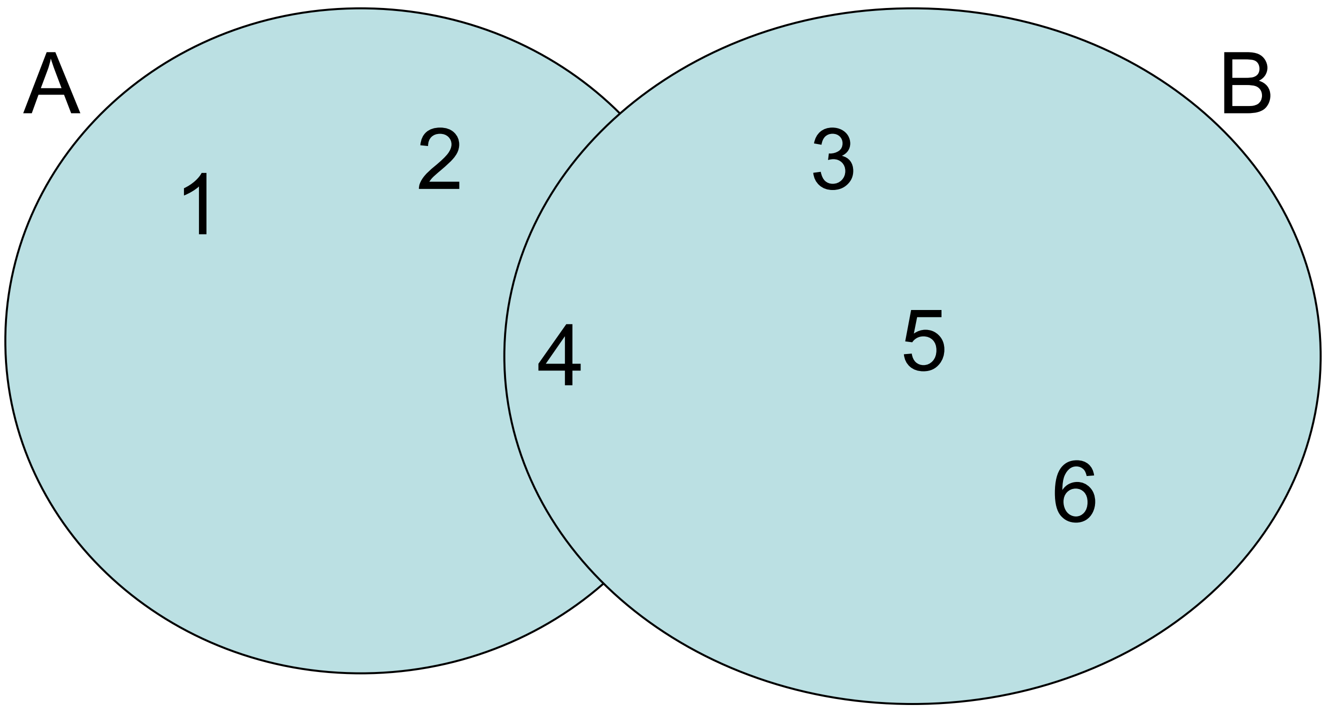
Объединение множеств

Сумма (объединение) множеств *A* и *B* (пишется $A \cup B$) есть множество элементов, каждый из которых принадлежит либо *A* , либо *B*. Таким образом, $e \in A \cup B$ тогда и только тогда, когда либо $e \in A$, либо $e \in B$.



Операции над множествами ***объединение***

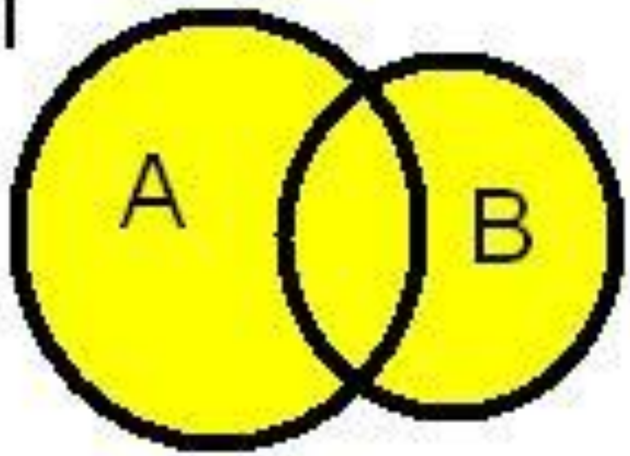
Например, если A={1,2,4}, B={3,4,5,6},



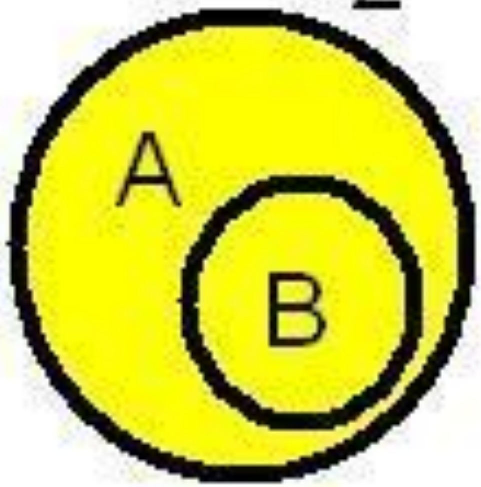
то $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$

Объединение множеств

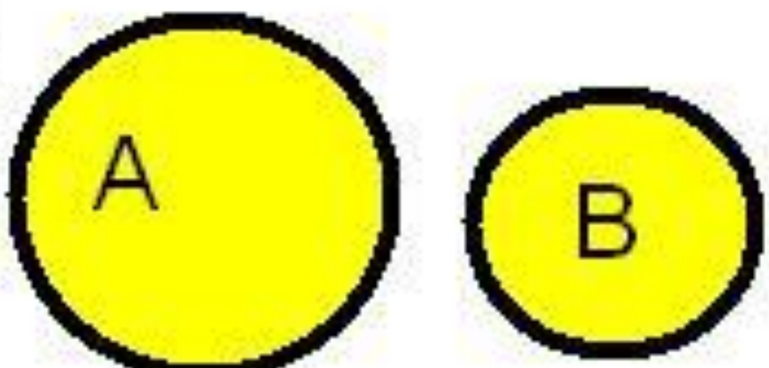
1



2



3



Операции над множествами

- **Пересечением (произведением)** множеств A и B называется множество A ∩ B, элементы которого принадлежат как множеству A, так и множеству B.

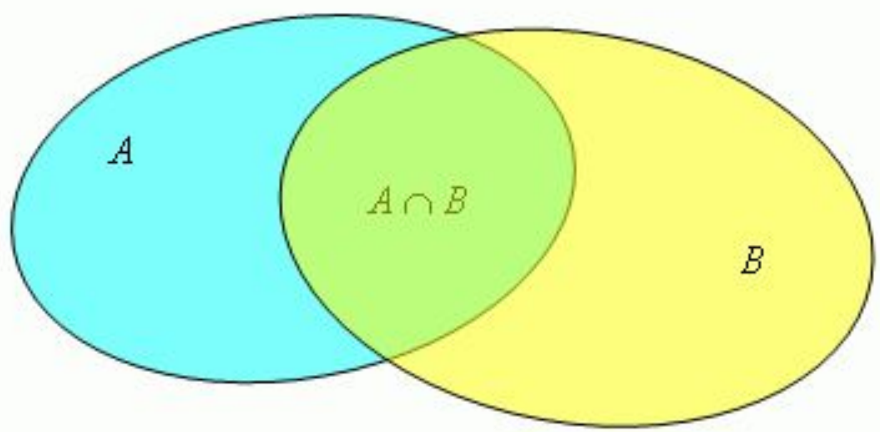
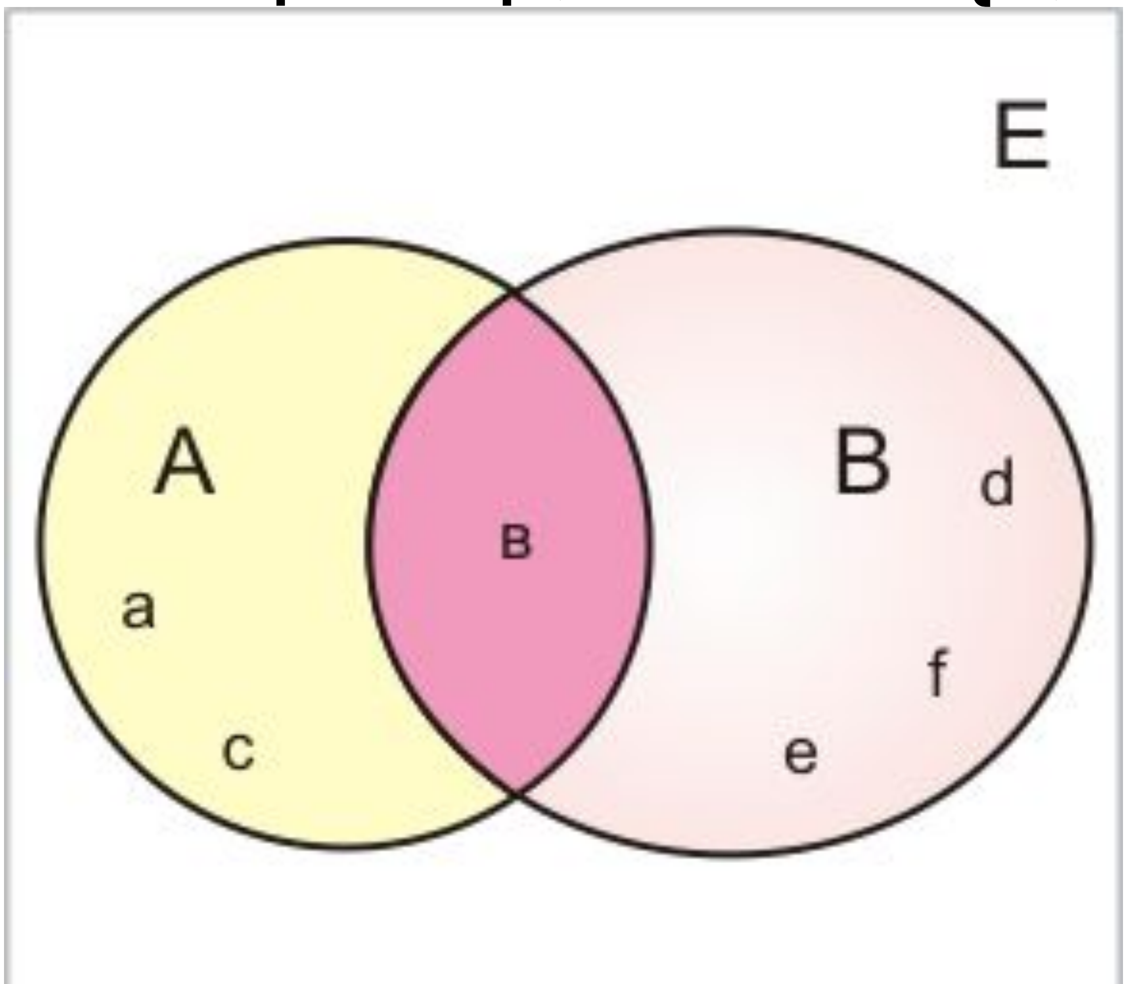


Рис.2

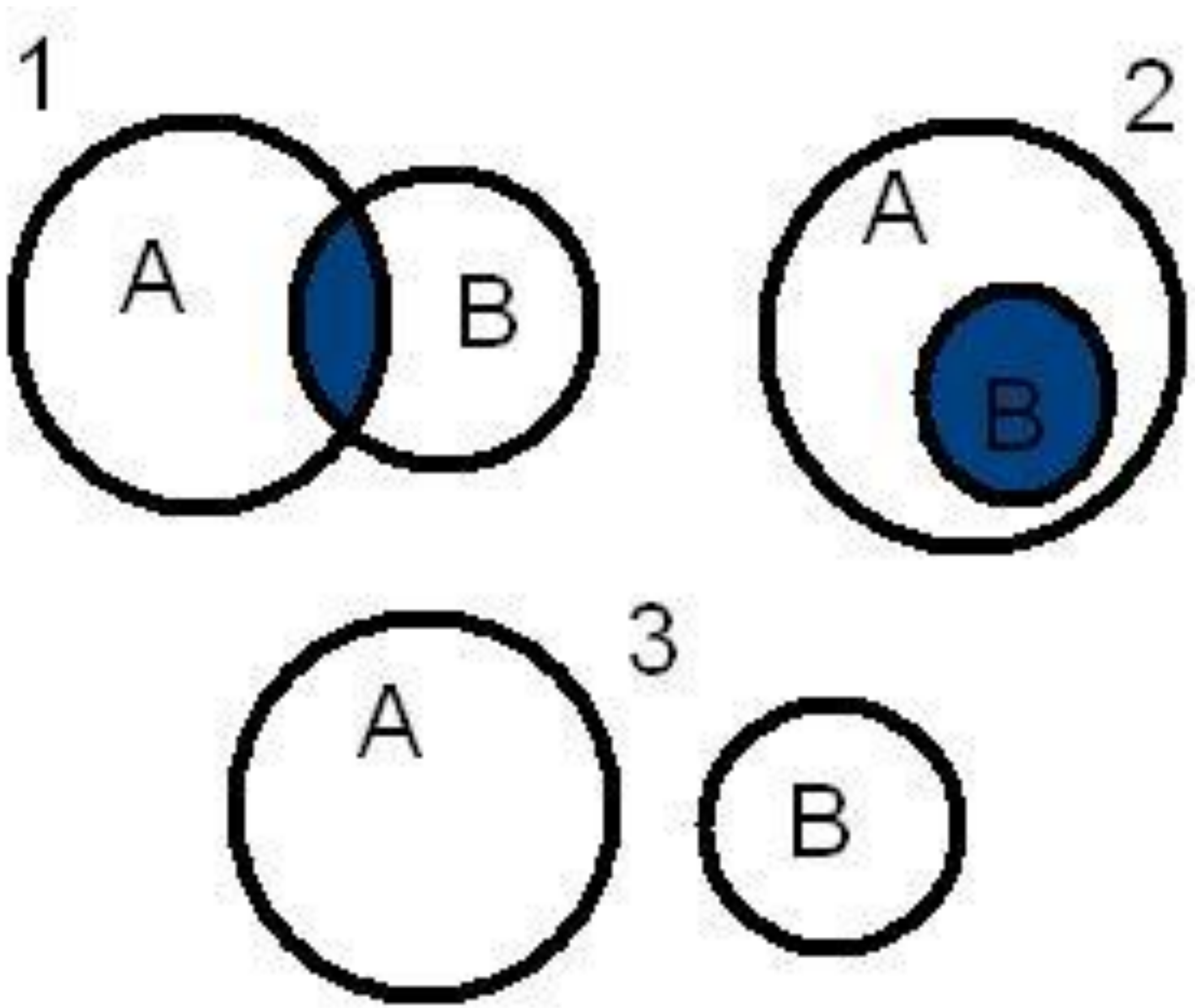
Операции над множествами **пересечение**

Например, если A={a,b,c}, B={b,c,f,e},



то A ∩ B = {b}

Пересечение множеств



Операции над множествами

- **Разностью** множеств А и В называется множество АВ, элементы которого принадлежат множесву А, но не принадлежат множеству В.

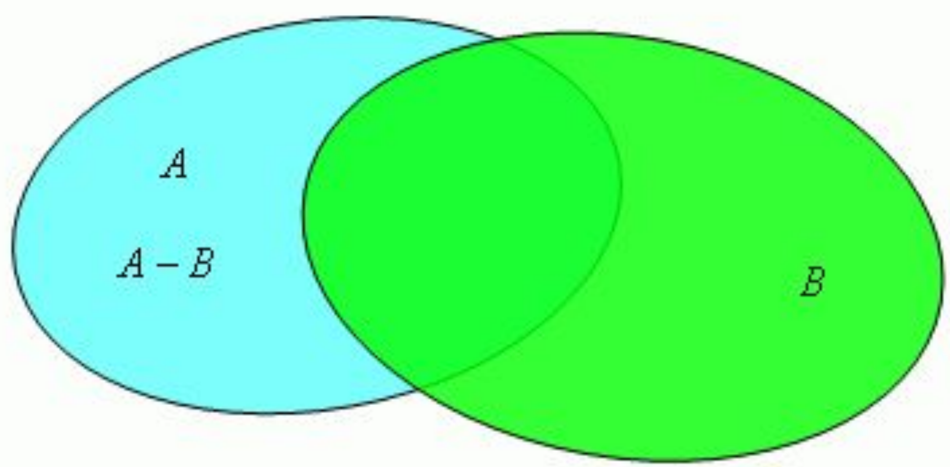
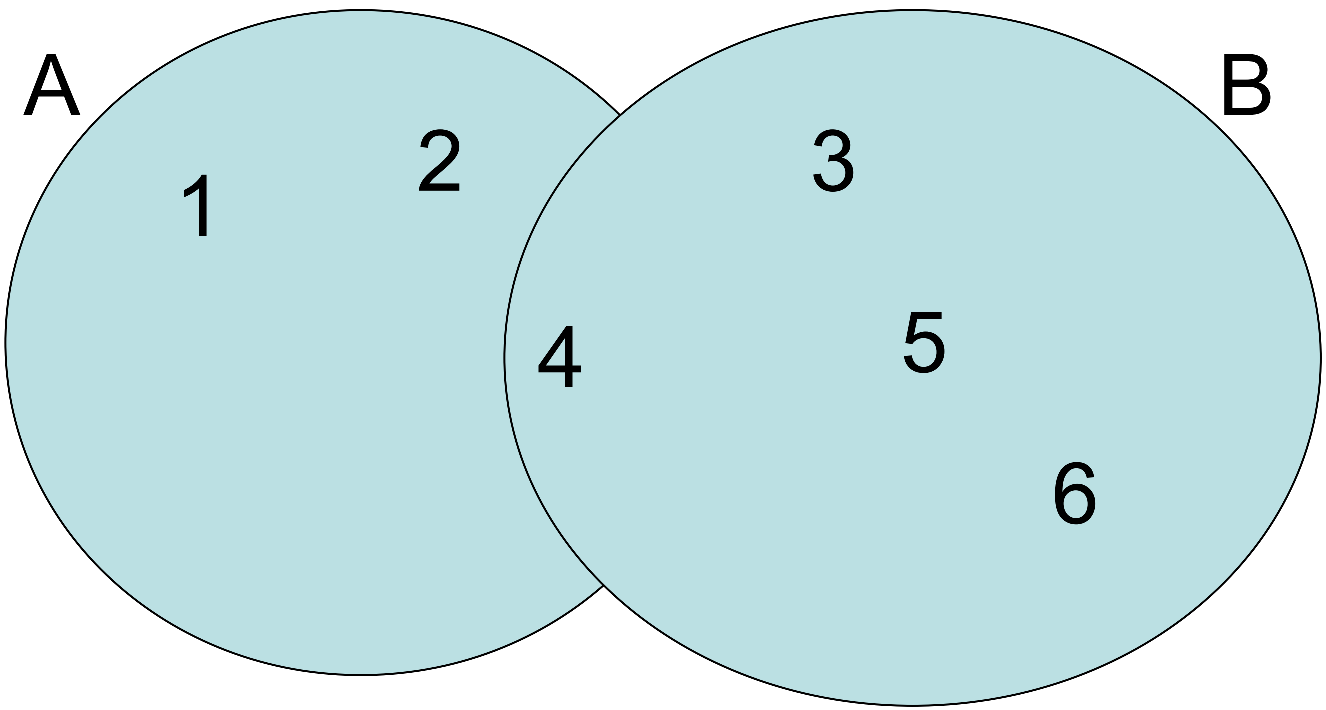


Рис.3

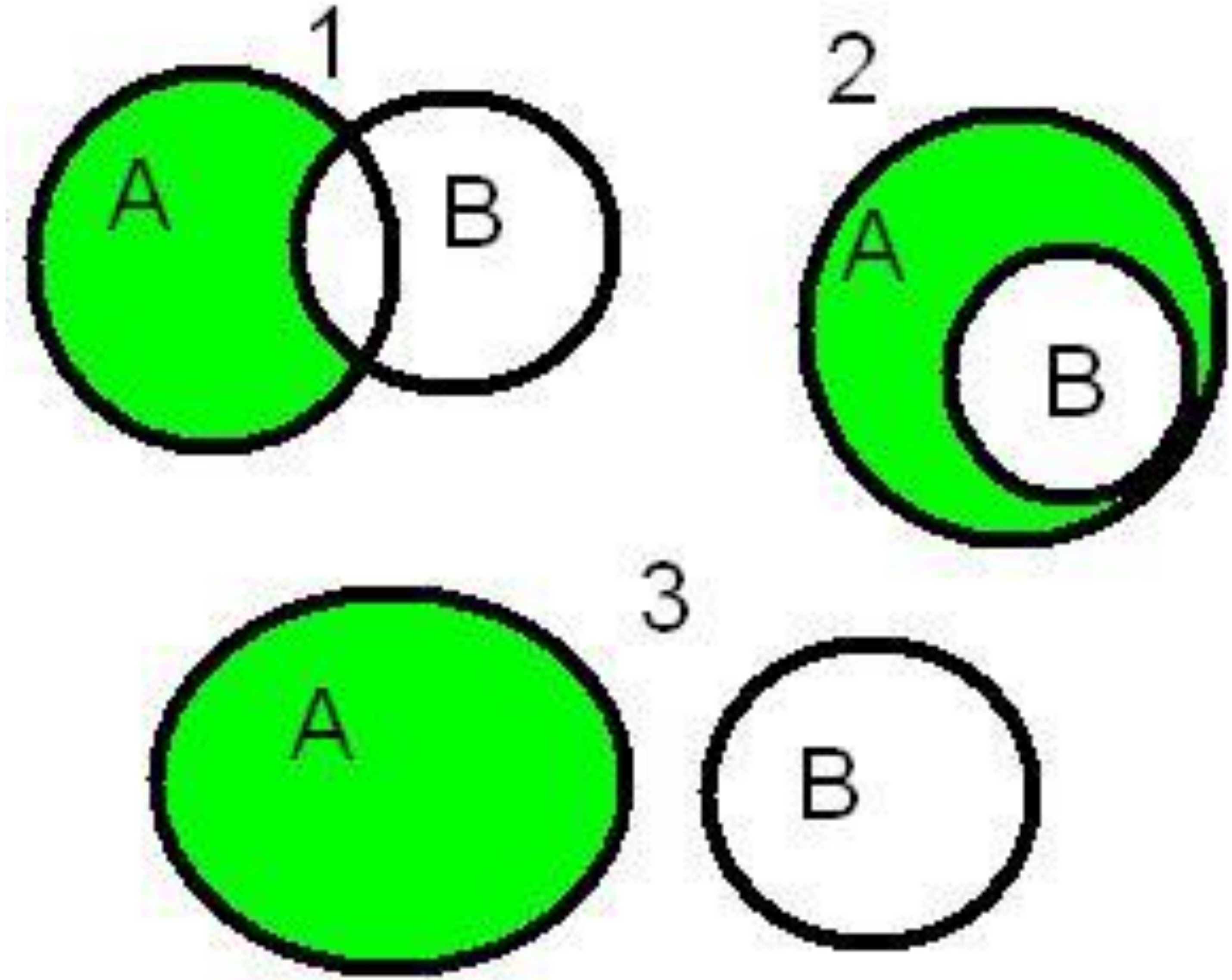
Операции над множествами **разность**

Например, если A={1,2,3,4}, B={3,4,5},

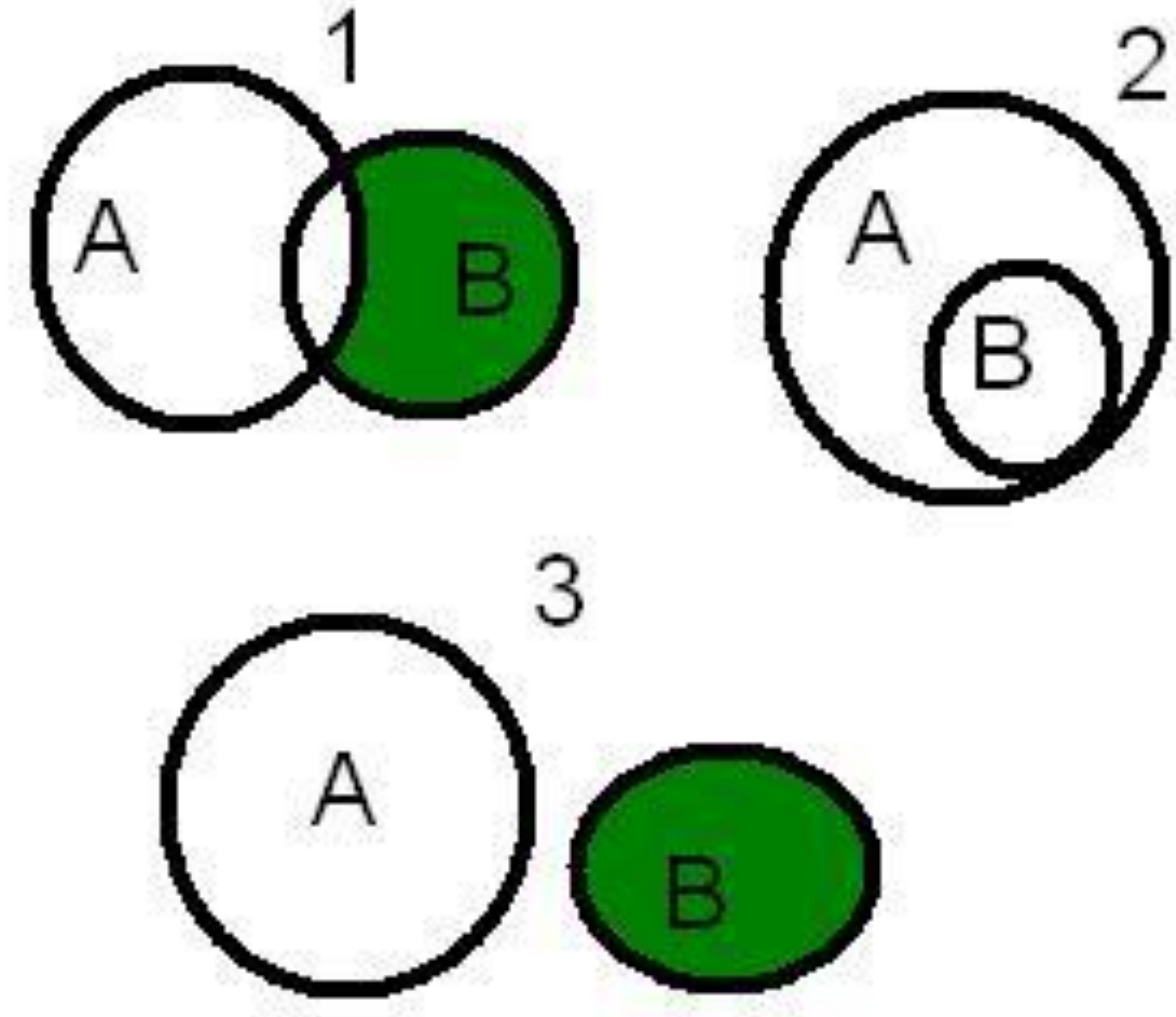


то A\B = {1,2}

Разность множеств



Разность множеств



Операции над множествами

Симметрической разностью множеств A и B называется множество A Δ B, являющееся объединением разностей множеств AB и BA, то есть A Δ B = (A\B) ∪ (B\A).

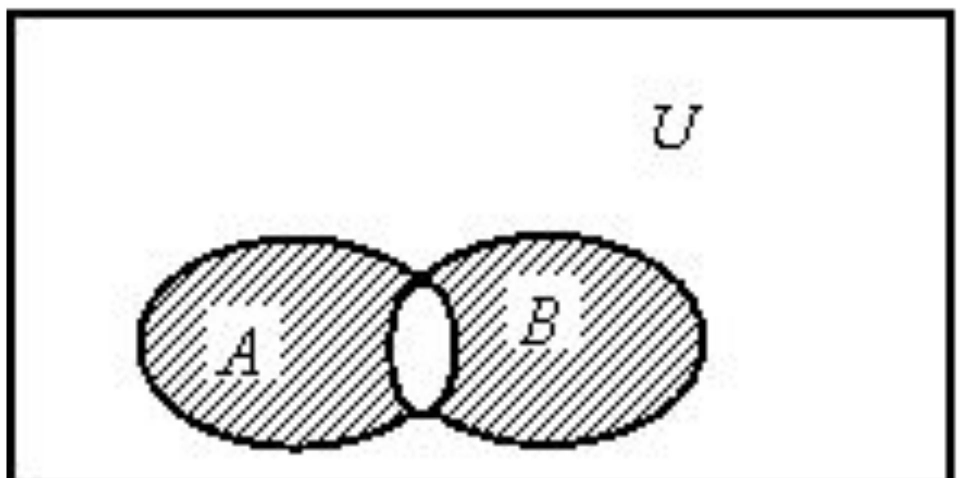
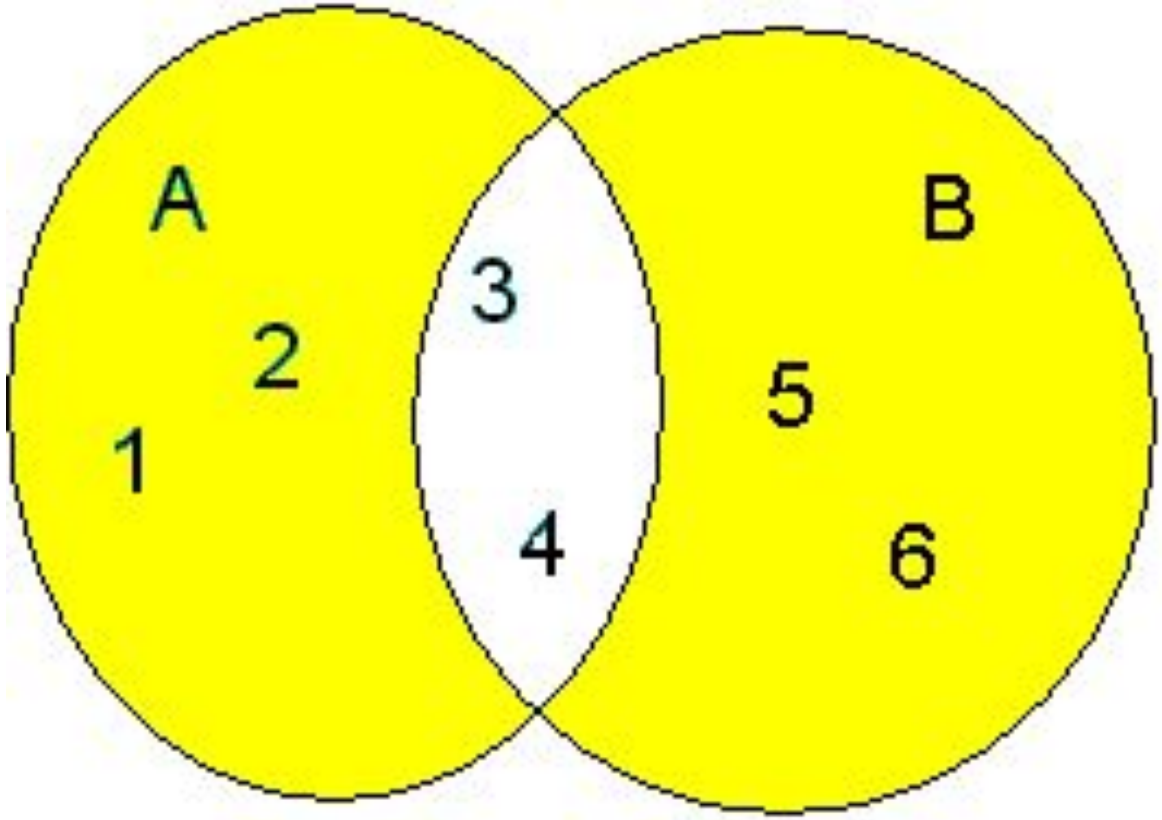


Рис. 1.5

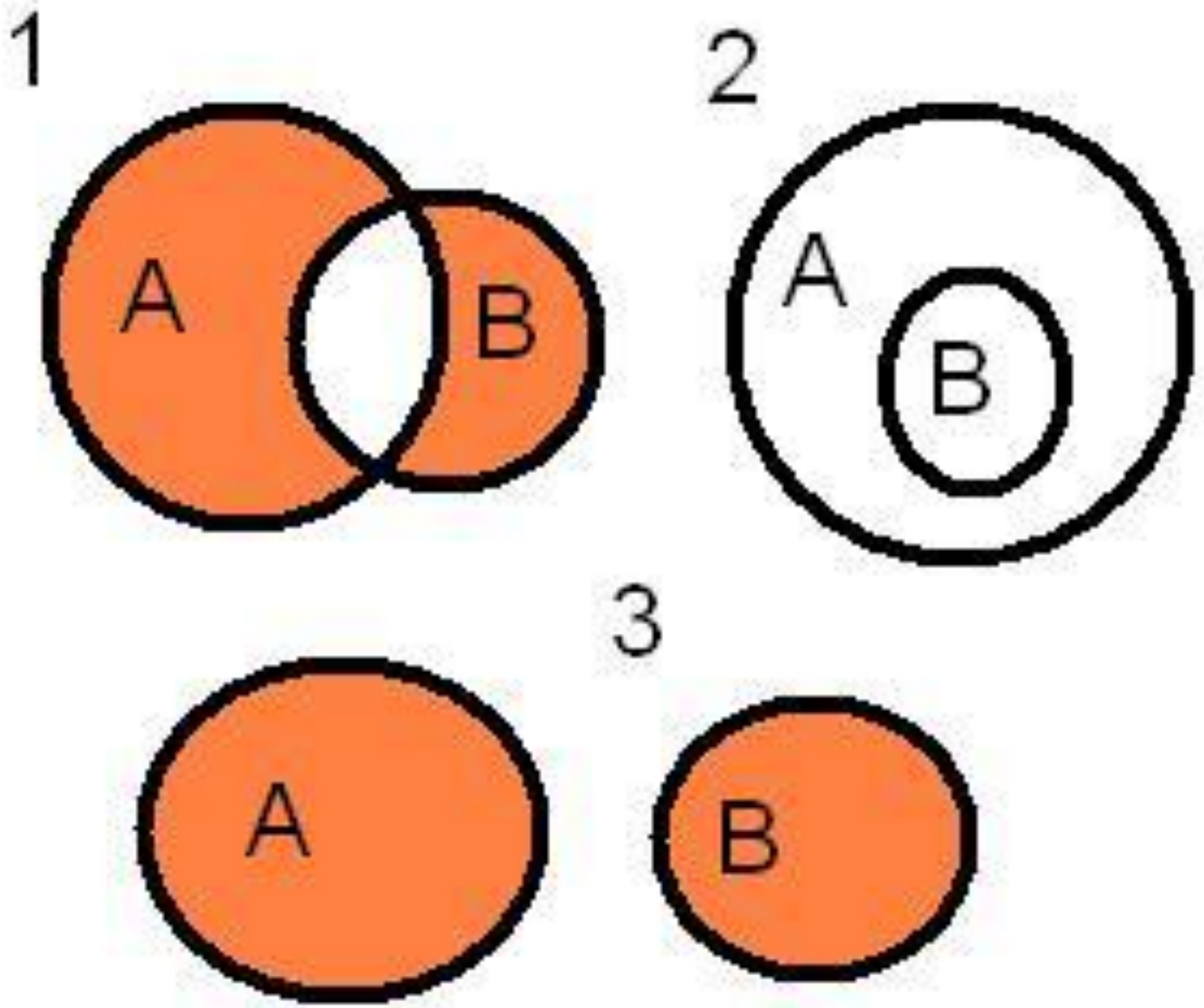
Операции над множествами **симметрическая разность**

Например, если A={1,2,3,4}, B={3,4,5,6},



то $A \Delta B = \{1,2\} \cup \{5,6\} = \{1,2,5,6\}$

Симметричная разность



Операции над множествами

- Абсолютным дополнением множества называется множество всех элементов, не принадлежащих A, т.е. множество U\A, где U – универсальное множество

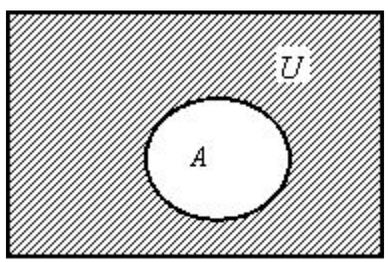


Рис. 1.6

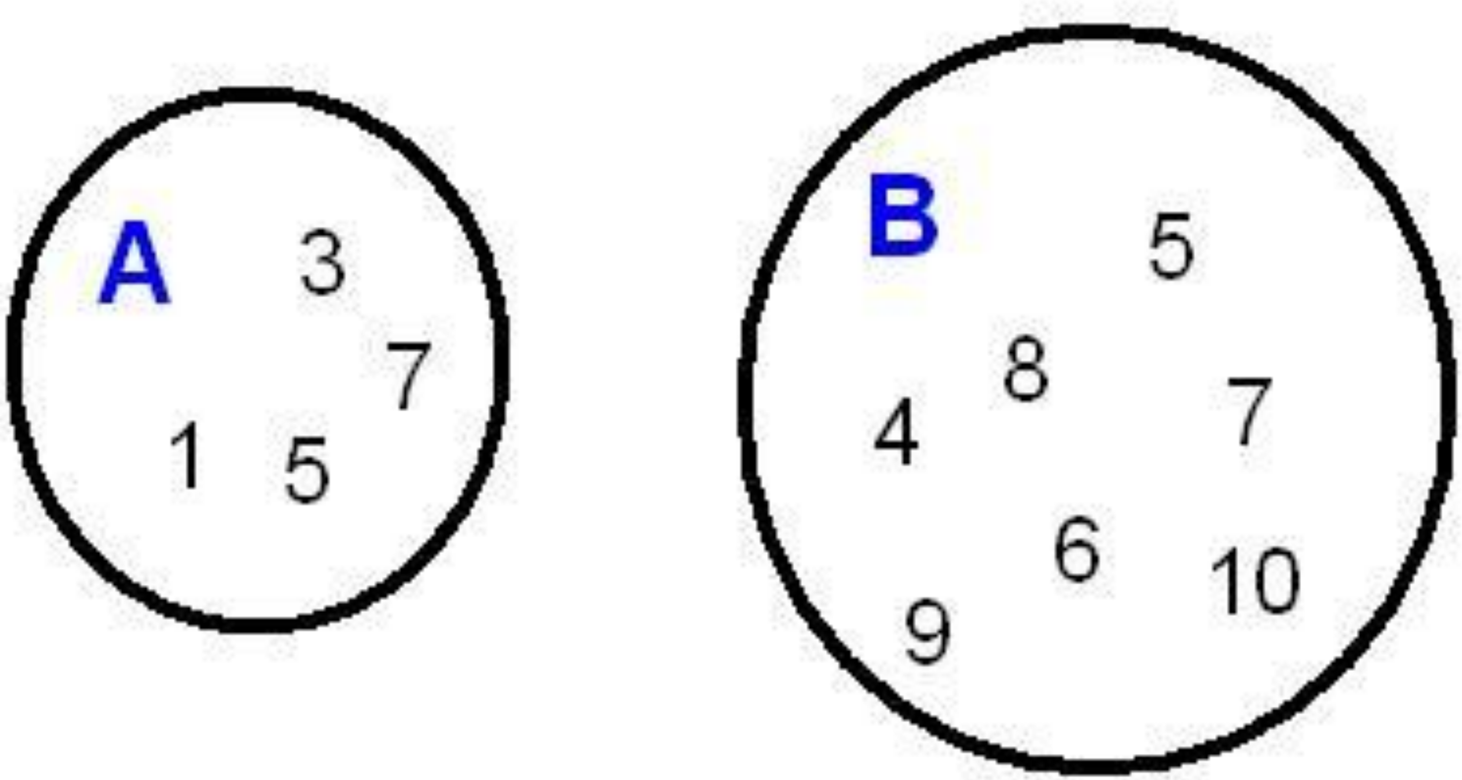
Свойства операций над множествами:

1). если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$ (транзитивность),
2). если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A = B$,
3). $A \cup A = A$,
4). $A \cup \varnothing = A$,
5). $A \cap A = A$,
6). $A \cap \varnothing = \varnothing$,
7). $A - A = \varnothing$,
8). $A \cup B = B \cup A$ (коммутативность сложения),
9). $A \cap B = B \cap A$ (коммутативность умножения),
10). $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (ассоциативность сложения),
11). $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (ассоциативность умножения),
12). $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (дистрибутивность умножения относительно сложения),
13). $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$ (дистрибутивность умножения относительно вычитания),
14). $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (дистрибутивность сложения относительно умножения).

П р и м е р ы

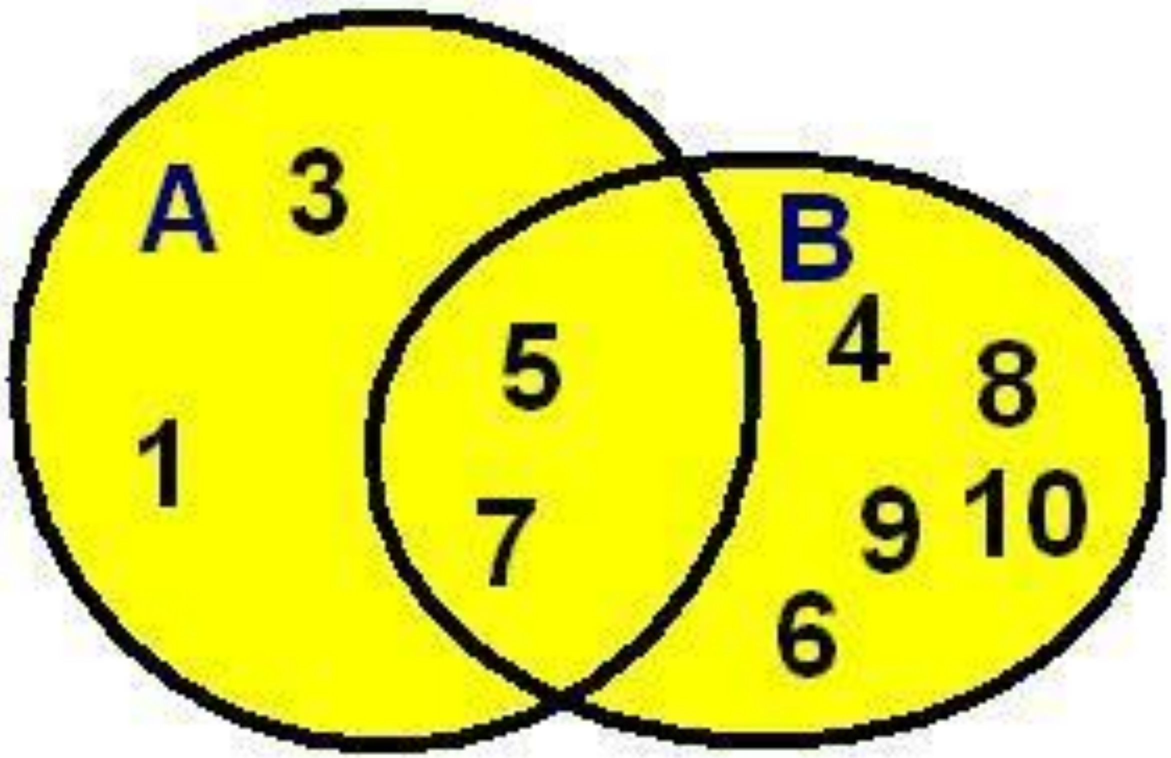
- Множество детей является подмножеством всего населения.
- Пересечением множества целых чисел с множеством положительных чисел является множество натуральных чисел.
- Объединением множества рациональных чисел с множеством иррациональных чисел является множество действительных чисел.
- Нуль является дополнением множества натуральных чисел относительно множества неотрицательных целых чисел.

Даны множества

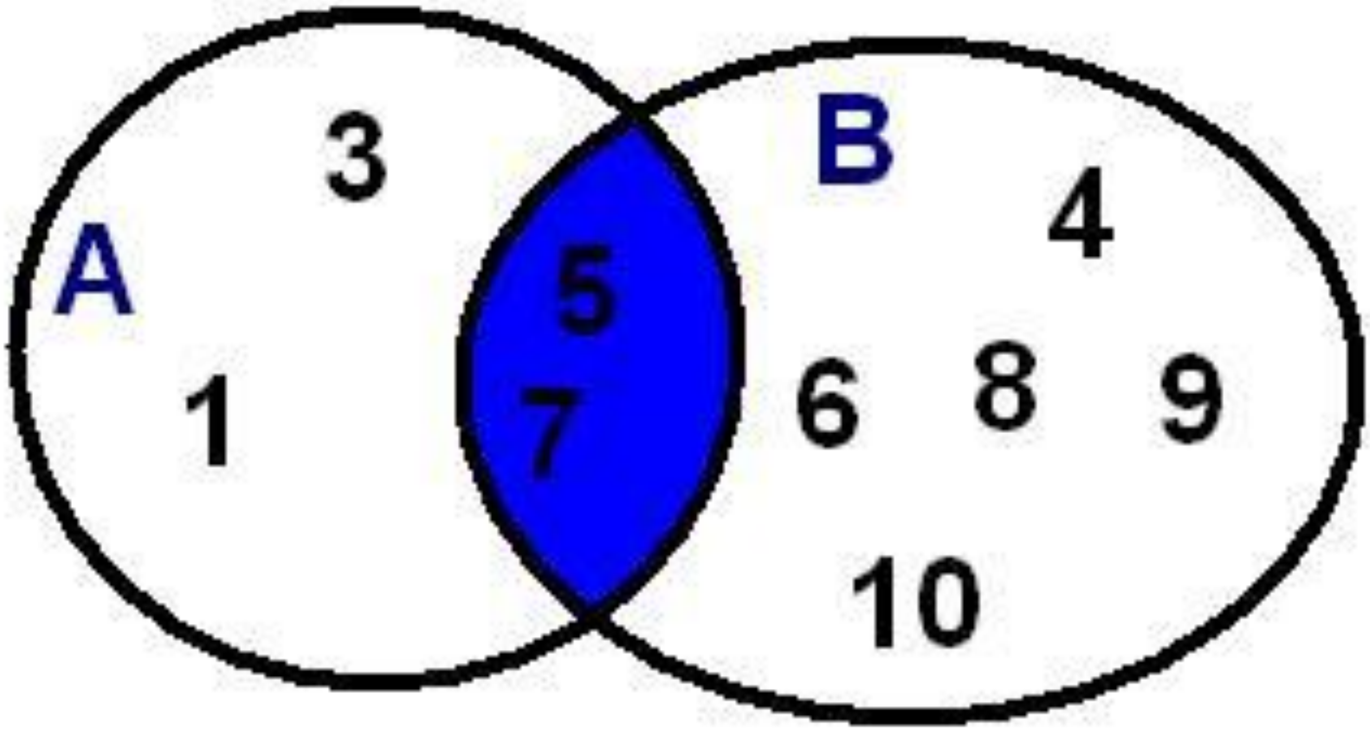


- Найти: объединение, пересечение, разность, симметрическую разность

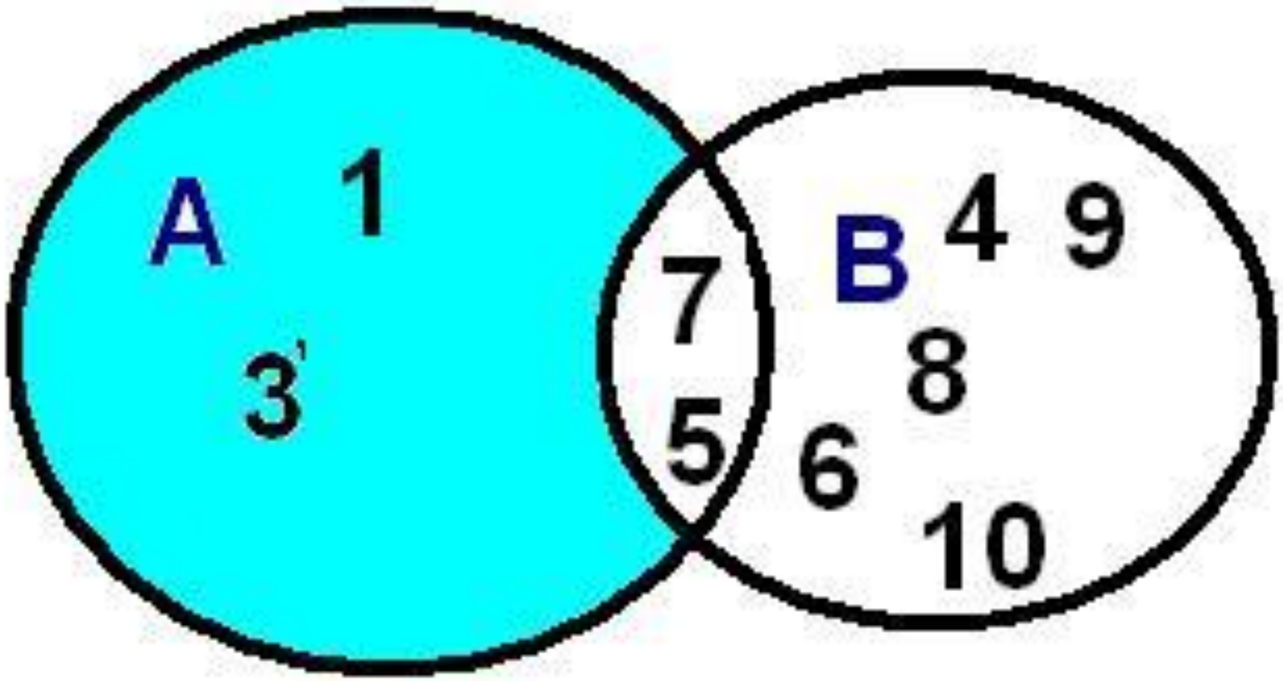
Объединение A и B



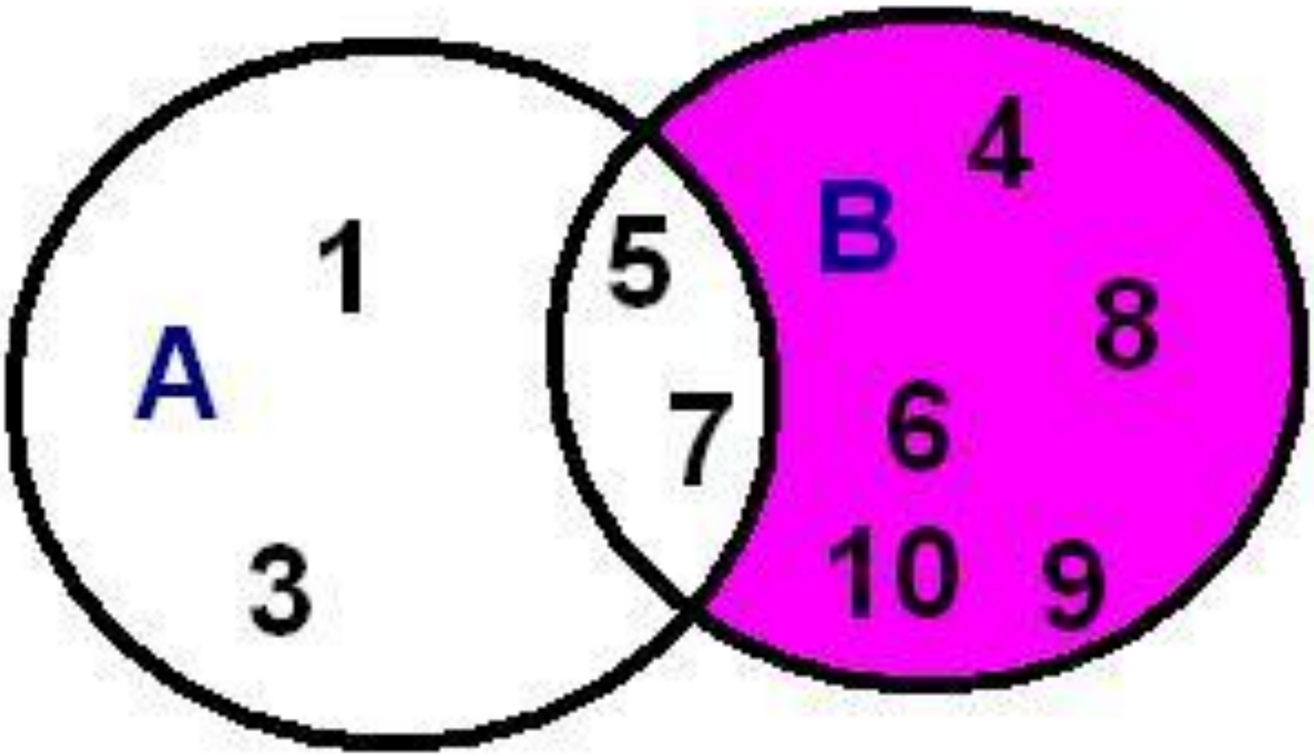
Пересечение множеств А и В



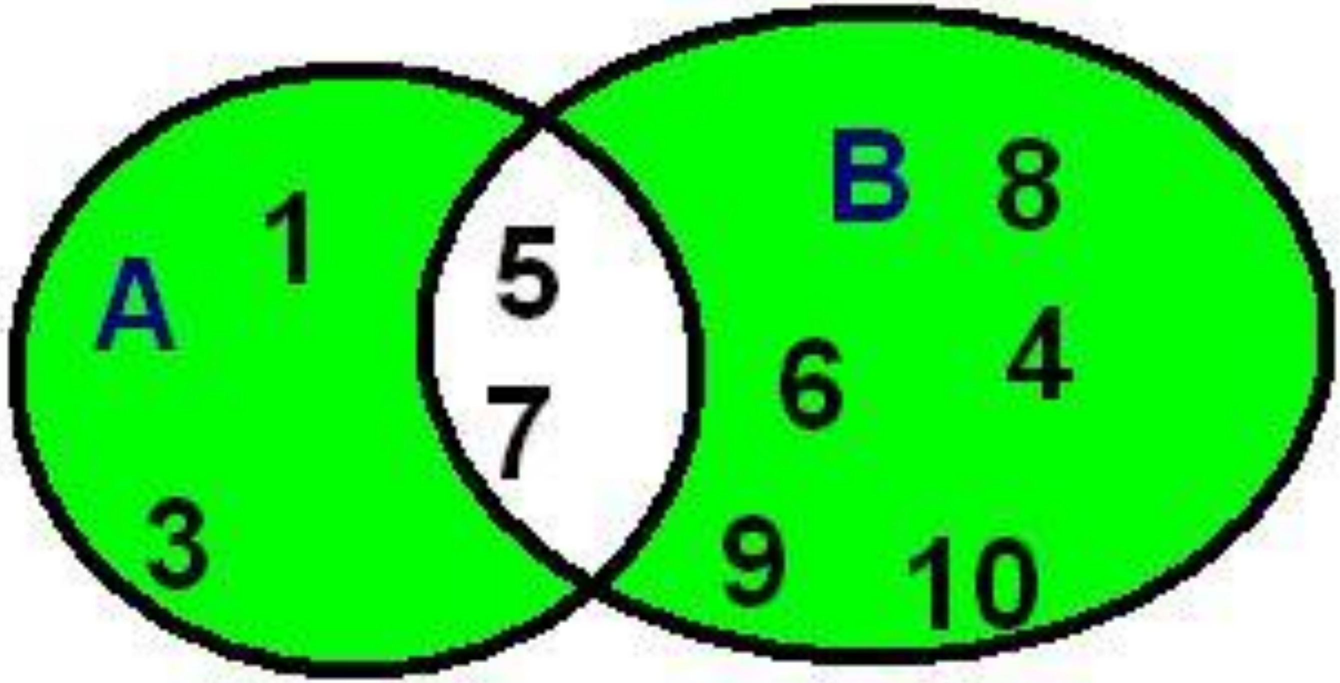
Разность A\B



Разность B\A



Симметрическая разность А и В



- Пример1: На вступительном экзамене по математике были предложены три задачи: по алгебре, планиметрии и стереометрии. Из 1000 абитуриентов задачу по алгебре решили 800, по планиметрии — 700, а по стереометрии — 600 абитуриентов. При этом задачи по алгебре и планиметрии решили 600 абитуриентов, по алгебре и стереометрии — 500, по планиметрии и стереометрии — 400. Все три задачи решили 300 абитуриентов. Существуют ли абитуриенты, не решившие ни одной задачи, и если да, то сколько их?

- Решение. Пусть *U* — множество всех абитуриентов, *A* —*.* множество абитуриентов, решивших задачу по алгебре, *B* — множество абитуриентов, решивших задачу по планиметрии, C — множество абитуриентов, решивших задачу по стереометрии. По условию $n(U) = 1000$, $n(A) = 800$, $n(B) = 700$, $n(C) = 600$, $n(A \cap B) = 600$, $n(A \cap C) = 500$, $n(B \cap C) = 400$, $n(A \cap B \cap C) = 300$. В множество $A \cap B \cap C$ включены все абитуриенты, решившие хотя бы одну задачу. По формуле (2) имеем:
- $n(A \cup B \cup C) = 800 + 700 + 600 - 600 - 500 - 400 + 300 = 900$.
- Отсюда следует, что не все поступающие решили хотя бы одну задачу. Ни одной задачи не решили
- $n(U) - n(A \cup B \cup C) = 1000 - 900 = 100$ (абитуриентов).