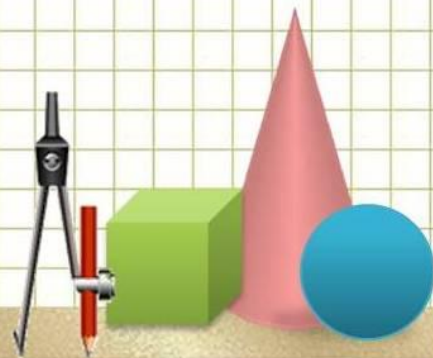


Первообразная. Неопределённый и определённый интеграл



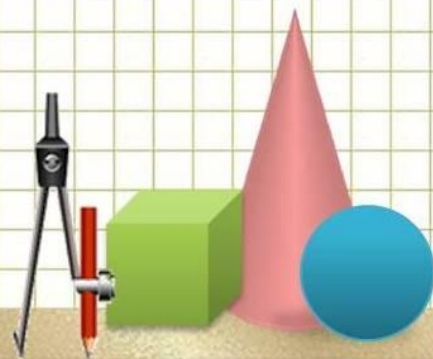
Понятие первообразной функции. Неопределенный интеграл.

Определение: Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на данном промежутке, если для всех x из этого

Пример
промежутка

Первообразной для функции $f(x)=x$ на всей числовой оси является $F(x)=x^2/2+C$, поскольку $(x^2/2)' = x$.

Вычисление первообразной заключается в нахождении неопределенного интеграла, а сам процесс называется интегрированием

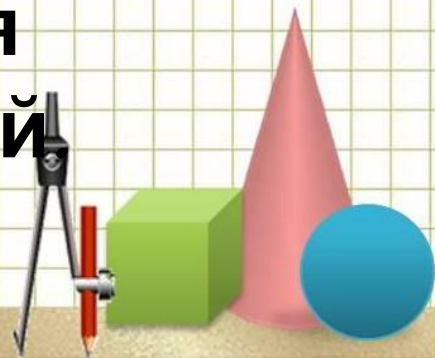


Основное свойство первообразной

Любая первообразная для функции f на промежутке I может быть записана в виде $F(x) + C$, где $F(x)$ — одна из первообразных для функции $f(x)$ на промежутке I , а C — произвольная постоянная.

Теорема: Если функция $f(x)$ непрерывна на X при $x \in X$, то для $f(x)$ существует первообразная $F(x)$ на X .

Замечание 1: Условие непрерывности не является необходимым для существования первообразной.



Три правила нахождения первообразных

Правило 1. Если F есть первообразная для f , а G -первообразная для g , $F+G$ есть первообразная для $f+g$.

Правило 2. Если F есть первообразная для f , а k -постоянная, то функция kF – первообразная для kf .

Правило 3. Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, а k и b - постоянные, причем k не равно 0, то $1/k F(kx+b)$ есть первообразная для $f(kx+b)$.

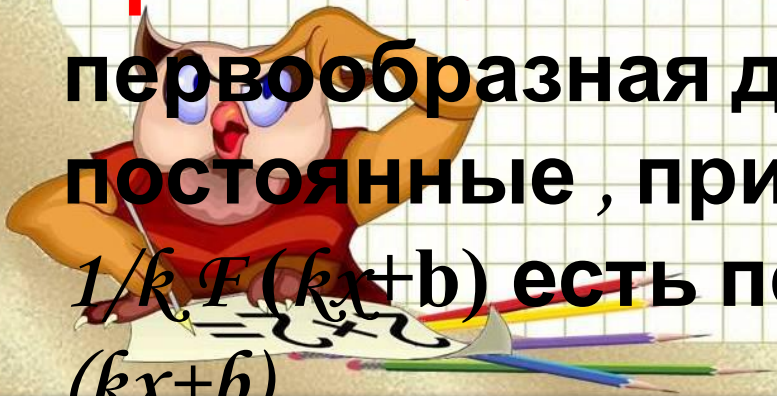
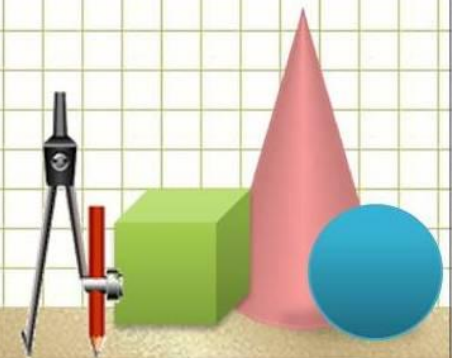
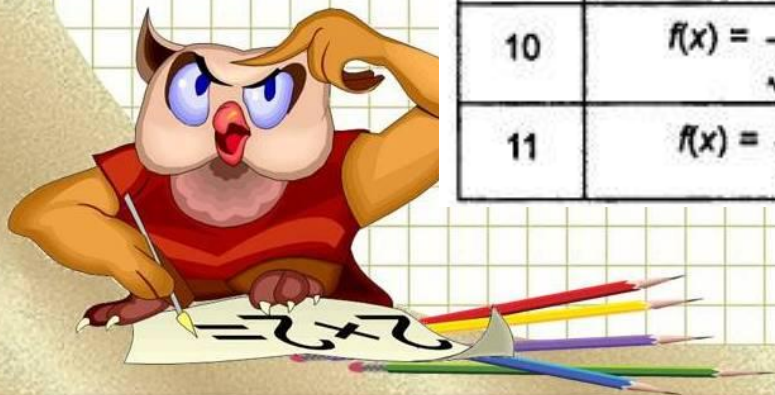


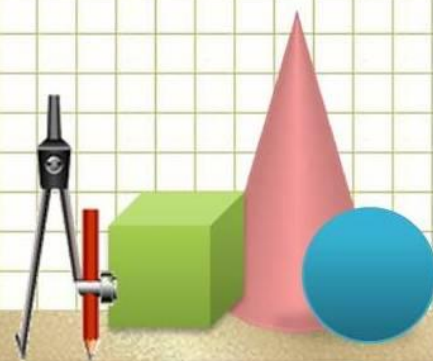
Таблица первообразных

№	Функция	Первообразная
1	$f(x) = k$	$F(x) = kx$
2	$f(x) = x^r$	$F(x) = \frac{x^{r+1}}{r+1}$
3	$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x $
4	$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$
5	$f(x) = a^x$	$F(x) = \frac{a^x}{\ln a}$
6	$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$
7	$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$
8	$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$	$F(x) = -\operatorname{ctg} x$
9	$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \operatorname{tg} x$
10	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$F(x) = \arcsin x$
11	$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$F(x) = \operatorname{arctg} x$



Вычисление первообразной
заключается в нахождении
неопределенного интеграла, а сам
процесс называется интегрированием

Определение: Множество всех
первообразных функции $f(x)$
называется неопределенным
интегралом от функции $f(x)$ на этом
промежутке и обозначается



Основные свойства неопределенного интеграла:

$$1. \left(\int f(x) dx \right)' = f(x).$$

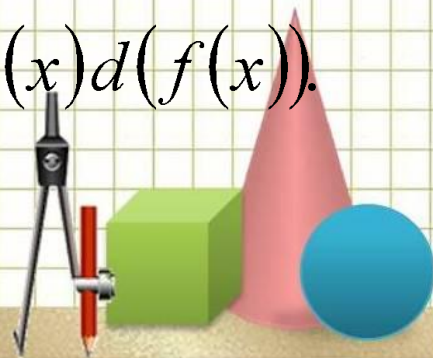
$$2. \int f'(x) dx = f(x) + C.$$

$$3. \int kf(x) dx = k \int f(x) dx.$$

$$4. \int (f_1(x) + f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx.$$

$$5. \int f(kx + b) dx = \frac{1}{k} F(kx + b) + C.$$

$$6. \int f(x) d(g(x)) = f(x)g(x) - \int g(x) d(f(x)).$$



$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$$

Показательная и логарифмическая функции:

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \log_a x dx = \frac{x \cdot \ln x - x}{\ln a} + C$$

Тригонометрические функции:

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln(\cos x) + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln(\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x) + C$$

Обратные тригонометрические функции:

$$\int \arccos x dx = x \cdot \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\int \operatorname{arctg} x dx = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

Дробно-рациональные функции:

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{a} \right) + C$$

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{a+x}{a-x} \right) + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \ln(x) dx = x \cdot \ln x - x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln(\sin x) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

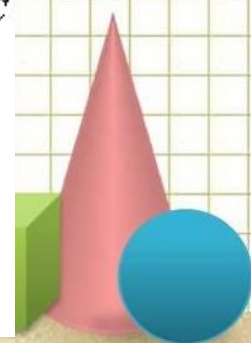
$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln(\sec x + \operatorname{tg} x) + C$$

$$\int \arcsin x dx = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\int \operatorname{arctg} x dx = x \cdot \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) + C$$



Методы интегрирования (по формулам, заменой переменной, по частям).

1. Табличный.
2. Сведение к табличному преобразованием подынтегрального выражения в сумму или разность.
3. Интегрирование с помощью замены переменной (подстановкой).
4. Интегрирование по частям.

