Матрицы и определители

Свойства линейных операций над матрицами

A,B,C – матрицы,
α,β – действительные числа

1. $A+B=B+A$
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$
3. $\alpha\cdot(A+B)=\alpha\cdot A+\alpha\cdot B$
4. $(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha\cdot A+\beta\cdot A$
5. $(\alpha\cdot\beta)\cdot A=\alpha\cdot(\beta\cdot A)=\beta\cdot(\alpha\cdot A)$
6. $A+0=A$
7. $(-A)=(-1)\cdot A$ и $A+(-A)=O$

7* $A-B=A+(-B)$

Произведение матриц

Умножением матрицы $A=(a_{ij})_{m\times n}$ на матрицу $B=(b_{ij})_{p\times q}$ определено, когда число столбцов в первой матрице равно числу строк во второй матрице, то есть n=p

Определение

Произведением матрицы $A=(a_{ij})_{m\times k}$ на матрицу $B=(b_{ij})_{k\times n}$ называется такая матрица $C=(c_{ij})_{m\times n}$, каждый элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-ого столбца матрицы B

Произведение матриц

$$A = (a_{ij})_{m \times k} \qquad B = (b_{ij})_{k \times n}$$

A · B=C, где $C = (c_{ij})_{m \times n}$ и

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{ik} \cdot b_{kj} = \sum_{s=1}^{k} a_{is} \cdot b_{sj}$$

$$i = \overline{1, m} = 1, 2, \ldots, m; \; j = \overline{1, n} = 1, 2, \ldots, n$$

Произведение матриц

Пример

$$A_{3\times3}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix};\quad B_{3\times2}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}$$

$$A_{3\times3}\cdot B_{3\times2}=C_{3\times2}=\begin{pmatrix}31 & 40\\ 7 & 10\\ 16 & 22\end{pmatrix}$$

Произведение матриц

Переместительный закон умножения матриц не выполняется

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Пример

1. $A_{3\times 2} \cdot B_{2\times 4} = C_{3\times 4}$

   $B_{2\times 4} \cdot A_{3\times 2}$ - не определено

2. $A_{3\times 2} \cdot B_{2\times 3} = C_{3\times 3}$

   $B_{2\times 3} \cdot A_{3\times 2} = D_{2\times 2}$

В частном случае AB=BA.
В этом случае матрицы A и B называются <u>перестановочными</u>

Свойства операции умножения матриц

A,B,C – матрицы,
α – действительное число

1. $A \cdot B \neq B \cdot A$
2. $\alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B = A(\alpha \cdot B)$
3. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
4. $(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
5. $A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$
6. $A \cdot E = E \cdot A = A$

Определитель

Любой квадратной матрице порядка n ставится в соответствие найденное по определенному закону некоторое число, называемое определителем n-ого порядка этой матрицы

$$A_{n\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \det A=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Определитель

$$A_{1\times 1} = (a_{11}) \qquad |A| = |a_{11}| = a_{11}$$

$$|7| = 7; \qquad |-3| = -3; \qquad \left|\frac{5}{8}\right| = \frac{5}{8}$$

$$A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$$

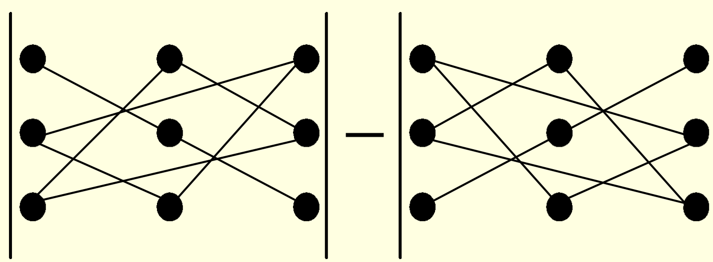
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 1 - 3\cdot(-2) = 2 + 6 = 8$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 2\cdot(-3) - (-1)\cdot 6 = -6 + 6 = 0$$

Определитель

$$A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13}) - \\ -(a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} + a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} + a_{23}\cdot a_{32}\cdot a_{11})$$

$|A| =$ 

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \\ 6 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (2\cdot 4\cdot 9 + 3\cdot 1\cdot 6 + 5\cdot 8\cdot 7) - (7\cdot 4\cdot 6 + 3\cdot 5\cdot 9 + 1\cdot 8\cdot 2) =$$

$$= 72 + 18 + 280 - 168 - 135 - 16 = 51$$

Минор элемента матрицы

Определение

Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы А n-ого порядка называется определитель матрицы (n-1)-ого порядка,
полученный из матрицы А вычеркиванием i строки и j столбца

M_{ij} - минор элемента a_{ij} матрицы $A_{n\times n}$

$$A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Алгебраическое дополнение элемента матрицы

Определение

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы n-ого порядка называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$

A_{ij} - алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы $A_{n\times n}$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

$$A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{12} = -M_{12}$$

$$A_{22} = M_{22}$$

Определители

Теорема о разложении определителя

Определитель любой квадратной матрицы n-ого порядка равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраическое дополнение

Разложение определителя по строке

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}A_{is}$$

$$i = \overline{1, n}$$

Разложение определителя по столбцу

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{sj}A_{sj}$$

$$j = \overline{1, n}$$

Определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \\ 6 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 5\cdot A_{21} + 4\cdot A_{22} + 1\cdot A_{23} = 5(-1)^{2+1}M_{21} + 4(-1)^{2+2}M_{22} +$$

$$+1(-1)^{2+3}M_{23} = -5\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -5(3\cdot 9 - 7\cdot 8) +$$

$$+4(2\cdot 9 - 7\cdot 6) - (2\cdot 8 - 3\cdot 6) = 51$$

Свойства определителей

1

Если некоторая строка (столбец) в определителе состоит из нулей, то этот определитель равен нулю

2

Свойства определителей

3

Если все элементы какой-либо строки (столбца) матрицы умножить на число λ, то ее определитель умножится на это число λ

Замечание из свойства 3

Если в определителе элементы некоторой строки или столбца содержат общий множитель λ, то этот общий множитель можно вынести за знак определителя

Свойства определителей

4

При перестановке двух строк (столбцов) матрицы ее определитель меняет знак на противоположный

5

Свойства определителей

6

Определитель матрицы не изменится если к элементам какой-либо строки (столбца) матрицы прибавить элементы другой строки
(столбца), предварительно умноженные на одно и то же число

Свойства определителей

7 Если квадратная матрица содержит две одинаковые строки, то ее определитель равен нулю

8 Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей, то есть

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Методы вычисления определителей

Метод понижения порядка

Если в определителе все элементы некоторой строки (столбца) кроме одного равны нулю, то определитель равен произведению этого ненулевого элемента на его алгебраическое дополнение

Метод приведения определителя к треугольному виду

Если в определителе все элементы, стоящие по одну сторону от главной диагонали равны нулю, то такой определитель равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали

Обратная матрица

Квадратная матрица А называется невырожденной, если определитель этой матрицы отличен от нуля

Определение

Матрица A^{-1} называется обратной для матрицы А,если

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$$

1. Матрицы А и A^{-1} перестановочны, при этом A^{-1}- - квадратная матрица того же порядка, что и А

2. Из свойств определителя и правила умножения матриц $\det(A \cdot A^{-1}) = \det E$

$$\det A \cdot \det A^{-1} = 1 \Rightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$