

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ
НЕРАВЕНСТВА
ТЕПЛОВ Н.В

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

- Неравенство, содержащее переменную только под знаком логарифма, называется логарифмическим: $\log_a f(x) > \log_a g(x)$.

РЕШЕНИЕ

- ПЕРЕД РЕШЕНИЕМ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ, СТОИТ ОТМЕТИТЬ, ЧТО ОНИ ПРИ РЕШЕНИИ ИМЕЮТ СХОДСТВО С ПОКАЗАТЕЛЬНЫМИ НЕРАВЕНСТВАМИ, А ИМЕННО:
 - Во-первых, при переходе от логарифмов к выражениям, стоящим под знаком логарифма, нам также необходимо сравнить основание логарифма с единицей;
 - Во-вторых, решая логарифмическое неравенство, используя замену переменных, нам необходимо решать неравенства относительно замены до того момента, пока мы не получим простейшее неравенство.
- Но это мы с вами рассмотрели сходные моменты решения логарифмических неравенств. А сейчас обратим внимание на довольно таки существенное отличие. Нам с вами известно, что логарифмическая функция обладает ограниченной областью определения, поэтому переходя от логарифмов к выражениям, стоящим под знаком логарифма, нужно брать в расчет область допустимых значений (ОДЗ).
- То есть, следует учитывать, что решая логарифмическое уравнение мы с вами, можем сначала находить корни уравнения, а потом делать проверку этого решения. А вот решить логарифмическое неравенство так не получится, поскольку переходя от логарифмов к выражениям, стоящим под знаком логарифма, необходимо будет записывать ОДЗ неравенства.
- Вдобавок стоит запомнить, что теория неравенств состоит из действительных чисел, которыми являются положительные и отрицательные числа, а также и число 0.
- Например, когда число «а» является положительным, то необходимо использовать такую запись: $a > 0$. В этом случае, как сумма, так и произведение таких этих чисел также будут положительными.
- Основным принципом решения неравенства является его замена на более простое неравенство, но главное, чтобы оно было равносильно данному. Дальше, также мы получили неравенство и снова его заменили на то, которое имеет более простой вид и т.д.
- Решая неравенства с переменной нужно находить все его решения. Если два неравенства имеют одну переменную x , то такие неравенства равносильны, при условии, что их решения совпадают.
- Выполняя задания на решение логарифмических неравенств, необходимо запомнить, что когда $a > 1$, то логарифмическая функция возрастает, а когда $0 < a < 1$, то такая функция имеет свойство убывать. Эти свойства вам будут необходимы при решении логарифмических неравенств, поэтому вы их должны хорошо знать и помнить.

СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ

Свойства логарифмов.

1. Основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a x} = x$

2. $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

3. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

4. $\log_a x^n = n \log_a x$

5. $\log_a a = 1$

6. $\log_a 1 = 0$

7. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

8. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ - формула перехода к другому основанию

9. $\log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_a x$

Логарифмические неравенства. Примеры

Пример 1

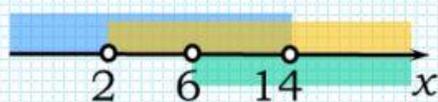
$$\log_3(2x-4) > \log_3(14-x)$$

т.к. $a = 3 > 1$, то

$$\begin{cases} 2x-4 > 14-x, \\ 2x-4 > 0, \\ 14-x > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x > 18, \\ x > 2, \\ x < 14; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 6, \\ x > 2, \\ x < 14; \end{cases}$$



Ответ: (6; 14).

Пример 2

$$\log_{\frac{1}{2}}(16+4x-x^2) \leq -4$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(16+4x-x^2) \leq \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(16+4x-x^2) \leq \log_{\frac{1}{2}} 16$$

т.к. $a = \frac{1}{2} < 1$, то

$$\begin{cases} 16+4x-x^2 \geq 16, \\ 16+4x-x^2 > 0; \end{cases} \text{ - лишнее условие}$$

$$4x-x^2 \geq 0$$

$$x^2-4x \leq 0$$

$$x(x-4) \leq 0$$



Ответ: [0; 4].

Логарифмические неравенства. Примеры

Пример 3

$$\lg x + \lg(45 - x) < 2 + \lg 2$$

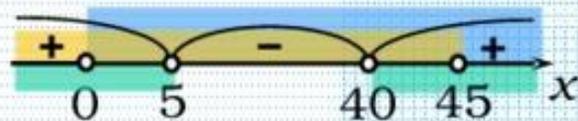
$$\lg(x(45 - x)) < \lg 100 + \lg 2$$

$$\lg(45x - x^2) < \lg 200$$

т.к. $a = 10 > 1$, то

$$\begin{cases} 45x - x^2 < 200, \\ 45 - x > 0, \\ x > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 45x + 200 > 0, \\ x < 45, \\ x > 0; \end{cases} \quad \text{н.ф.: } x^2 - 45x + 200 = 0$$



Ответ: $(0; 5) \cup (40; 45)$.

Пример 4

$$\log_2^2 x^2 - 5\log_2 x + 1 \leq 0 \quad \text{ОДЗ: } x > 0$$

$$(2\log_2 x)^2 - 5\log_2 x + 1 \leq 0$$

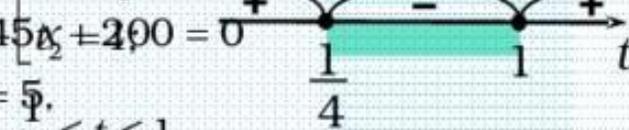
$$4\log_2^2 x - 5\log_2 x + 1 \leq 0$$

пусть $\log_2 x = t$, тогда

$$4t^2 - 5t + 1 \leq 0$$

$$\text{н.ф.: } 4t^2 - 5t + 1 = 0$$

$$t_1 = \frac{1}{4},$$



$$\begin{cases} x_1 = \sqrt[4]{2}, \\ x_2 = 2, \end{cases} \leq t \leq 1$$

Вернемся к исходной переменной

$$\frac{1}{4} \leq \log_2 x \leq 1, \text{ т.к. } a = 2, \text{ то}$$

$$\sqrt[4]{2} \leq x \leq 2$$

Ответ: $[\sqrt[4]{2}; 2]$.