§ 8. Основы теории множеств

Основные понятия

Множество – совокупность определенных различаемых объектов, причем таких, что для каждого можно установить, принадлежит этот объект данному множеству или нет.

Элементы множества обозначаются маленькими буквами, сами множества - большими. Принадлежность элемента множеству M обозначается так: $m \in M$, где знак является стилизацией первой буквы греческого слова $\in$στι (есть, быть), знак непринадлежности - $\notin$.

Основные понятия

Множества могут быть конечными, бесконечными и пустыми.

Множество, содержащее конечное число элементов, называется **конечным**. Если множество не содержит ни одного элемента, то оно называется **пустым** и обозначается $\varnothing$.

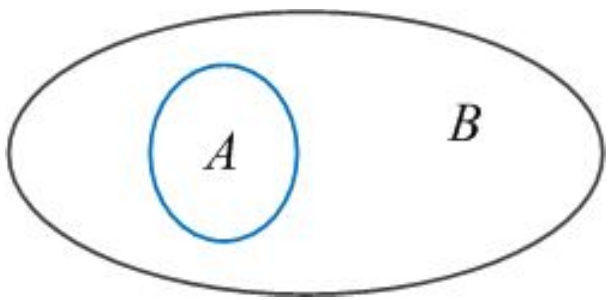
Пример:

- S - *множество* студентов потока - конечное множество;
- Z - *множество* звезд во Вселенной - бесконечное множество;
- L - *множество* студентов потока, хорошо знающих три иностранных языка (японский, китайский и французский) – видимо, пустое множество.

Основные понятия

Множество A называют **подмножеством** множества B (обозначается $A \subseteq B$), если всякий элемент множества A является элементом множества B:

$$A \subseteq B \leftrightarrow a \in A \rightarrow a \in B.$$



Множество B содержит A, или B покрывает A. Не включение подмножества C в множество B обозначается так: $C \not\subseteq B$.

Основные понятия

Множества A и B равны ($A=B$) тогда и только тогда, когда $A \subseteq B$, и $B \subseteq A$, т. е. элементы множеств A и B совпадают.

Множество A называется **собственным подмножеством** множества B, если $A \subseteq B$, а $B \not\subseteq A$. Обозначается так: $A \subset B$.

Пример

$B=\{a,b,c,d,e,f\}$, $A=\{a,c,d\}$, $A \subset B$.

Мощностью конечного множества M называется число его элементов. Обозначается $|M|$, например $|B|=6$, $|A|=3$.

Принято считать, что пустое множество $\varnothing$ является подмножеством любого множества.

Основные понятия

- Множество может обладать **иерархической** структурой. **Семейством** множества M или **булеаном** (M) является множество, элементами которого являются всевозможные подмножества множества M.

Пример

$$M=\{a,b,c\},$$

$$\beta(M)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}.$$

$$|M|=3,\ |\beta(M)|=8.$$

В общем случае мощность булеана

$$|\beta(\mathrm{M})| = 2^{|\mathrm{M}|}.$$

Универсальным множеством *E* называется множество всех рассматриваемых в данной задаче элементов.

Способы задания множеств

1. Задание множеств **списком** предполагает перечисление элементов.

Пример:

$$A=\{a, b, c, d\}$$

$$\{0, 2, 3, 4\} = \{3, 4, 2, 0\} = \{4, 0, 2, 3\} = \ldots$$

2. Задание множеств **порождающей процедурой или арифметическими операциями** означает описание характеристических свойств элементов множества:

$$X=\{x \mid H(x)\},$$

т.е. множество X содержит такие элементы x, которые обладают свойством $H(x)$.

Способы задания множеств

Пример:

$$\boldsymbol{B=\{b \mid b=\text{п}/2 \pm k\text{п},\ k \in N_0\},}$$

N_0 – множество всех натуральных чисел;

$$\boldsymbol{M_2{}^n=1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \ldots \text{ или } M_2{}^n=\{m \mid m=2^n,\ n \in N_0\}}$$

$$\boldsymbol{C=A+B=\{x \mid x=a+b,\ a \in A,\ b \in B\}}$$

3.Задание множества **описанием свойств элементов**:

Пример:

M - это множество чисел, являющихся степенями двойки.

К описанию свойств естественно предъявить требования точности и недвусмысленности.

Способы задания множеств

Так, «множество всех хороших песен 2013 года» каждый составит по-разному. Надежным способом однозначного задания множества является использование разрешающей процедуры, которая для любого объекта устанавливает, обладает ли он данным свойством и соответственно является ли элементом рассматриваемого множества.

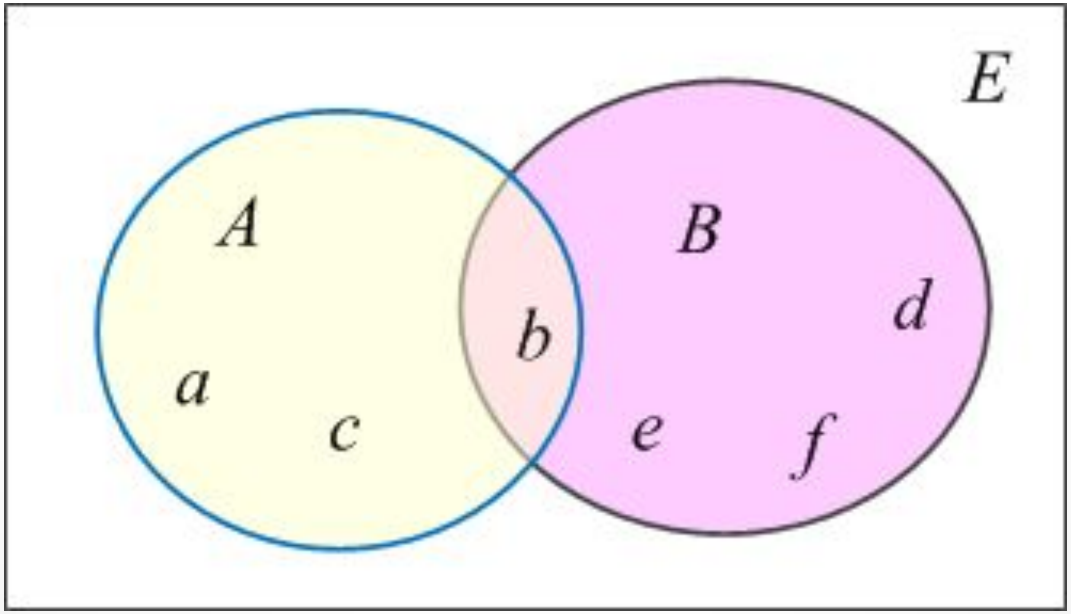
Пример:

S - множество успевающих студентов. Разрешающей процедурой включения в множество *S* является отсутствие неудовлетворительных оценок в последней сессии.

Способы задания множеств

4. **Графическое** задание множеств (диаграммы Эйлера-Венна)

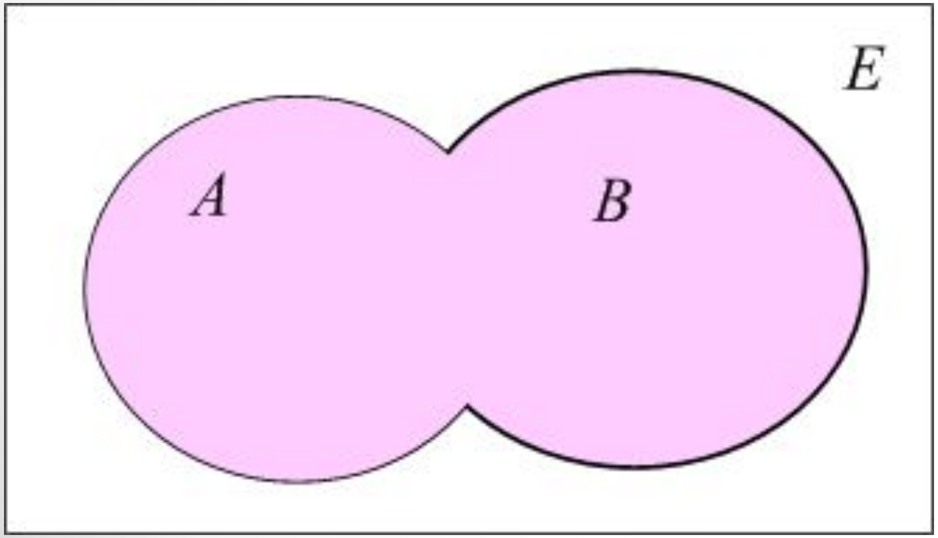
Замкнутая линия-круг Эйлера ограничивает множество, а рамка - универсальное пространство *E*. Заданы два множества: $A=\{a, b, c\}$ и $B=\{b, d, e, f\}$. Если элементов множеств немного, то они могут на диаграмме указываться явно.



Операции над множествами

Объединением множеств A и B ($A \cup B$) называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

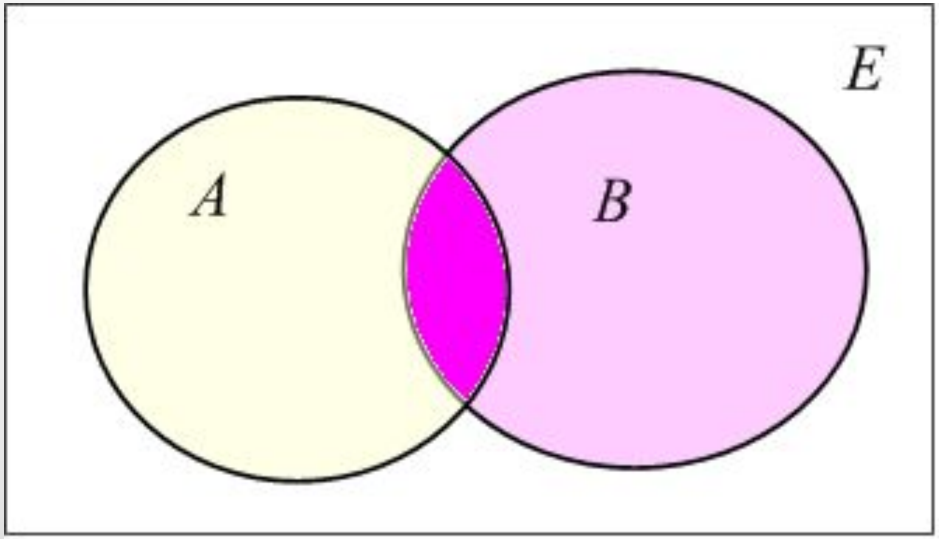


Дано:
$A=\{1, 2, 4, 6\}$ и
$B=\{0, 3, 4, 6\}$
Найти $C=A \cup B$
Решение:
$C=\{0, 1, 2, 3, 4, 6\}$

Операции над множествами

Пересечением множеств *A* и *B* ($A \cap B$) называется множество, состоящее из элементов, входящих как в множество *A*, так и в множество *B*.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$$



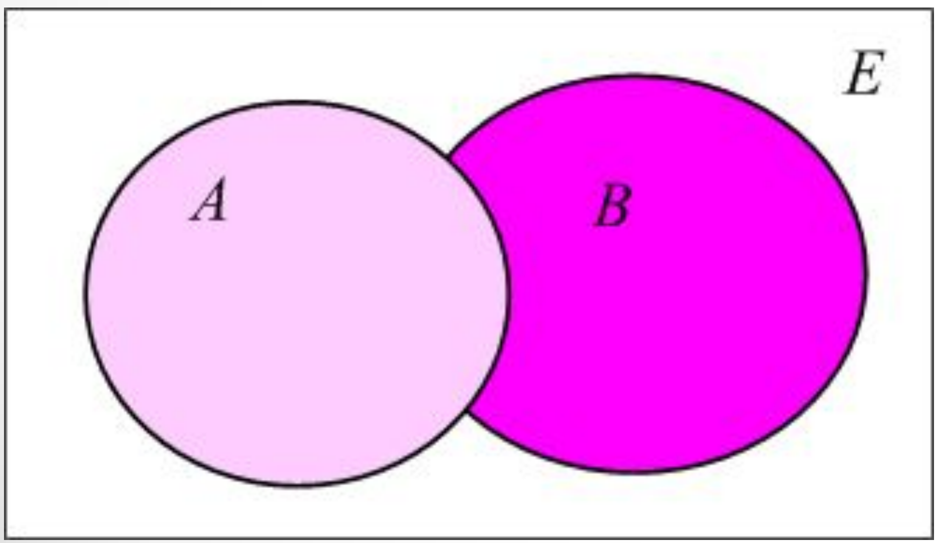
Дано:
$A=\{1, 2, 4, 6\}$ и
$B=\{0, 3, 4, 6\}$
Найти $C=A \cap B$
Решение:
$C=\{4, 6\}$

Операции над множествами

Разностью множеств *A* и *B* (*A**B*) называется множество всех элементов множества *A*, которые не содержатся в *B*.

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$$

$$B \setminus A = \{x \mid x \in B \text{ и } x \notin A\}$$

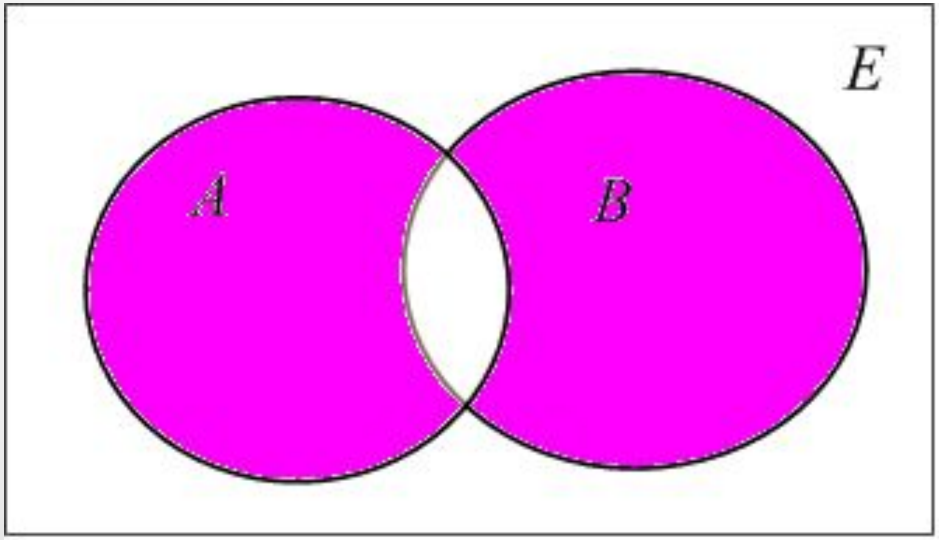


Дано:
$A=\{1, 2, 4, 6\}$ и
$B=\{0, 3, 4, 6\}$
Найти $C=A \setminus B$,
$D=B \setminus A$
Решение:
$C=\{1, 2\}$, $D=\{0, 3\}$
На рисунке B\A

Операции над множествами

Симметричная разность множеств A и B ($A\Delta B$)

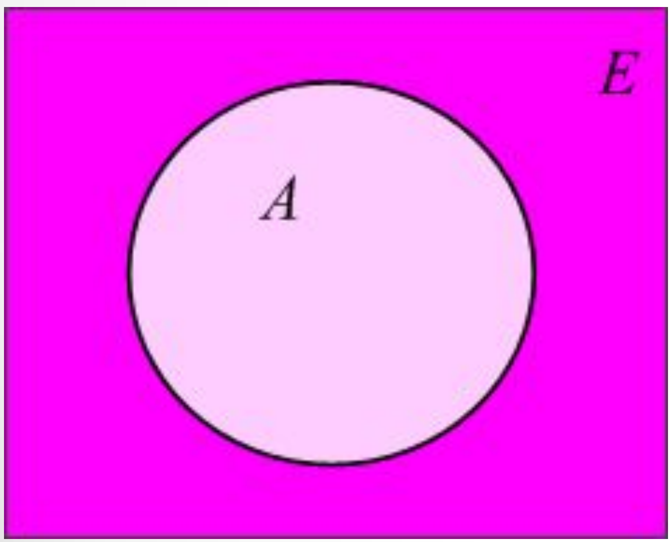
$$\boldsymbol{A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)}$$



Дано:
$A=\{1, 2, 4, 6\}$ и
$B=\{0, 3, 4, 6\}$
Найти $C=A\Delta B$
Решение:
$C=\{0, 1, 2, 3, 4, 6\}\setminus\{4, 6\}=$
$\{0, 1, 2, 3\}$

Операции над множествами

структурой. **Семейством** множества M или **булеаном** (M) является множество, элементами которого являются всевозможные подмножества множества M.
Пример
$$M=\{a,b,c\},$$
$$\beta(M)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}.$$
$$|M|=3,\ |\beta(M)|=8.$$
В общем случае мощность булеана
$$|\beta(M)| = 2^{|M|}.$$
Универсальным множеством E называется множество всех рассматриваемых в данной задаче элементов.



Множество может обладать **иерархической** структурой. **Семейством** множества M или **булеаном** (M) является множество, элементами которого являются всевозможные подмножества множества M.

Пример

$$M=\{a,b,c\},$$
$$\beta(M)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}.$$
$$|M|=3,\ |\beta(M)|=8.$$

В общем случае мощность булеана
$$|\beta(M)| = 2^{|M|}.$$

Универсальным множеством E называется множество всех рассматриваемых в данной задаче элементов.

Приоритет выполнения операций: дополнение, затем пересечение и только потом объединение и разность.

§ 9. Основы теории графов

Основные понятия

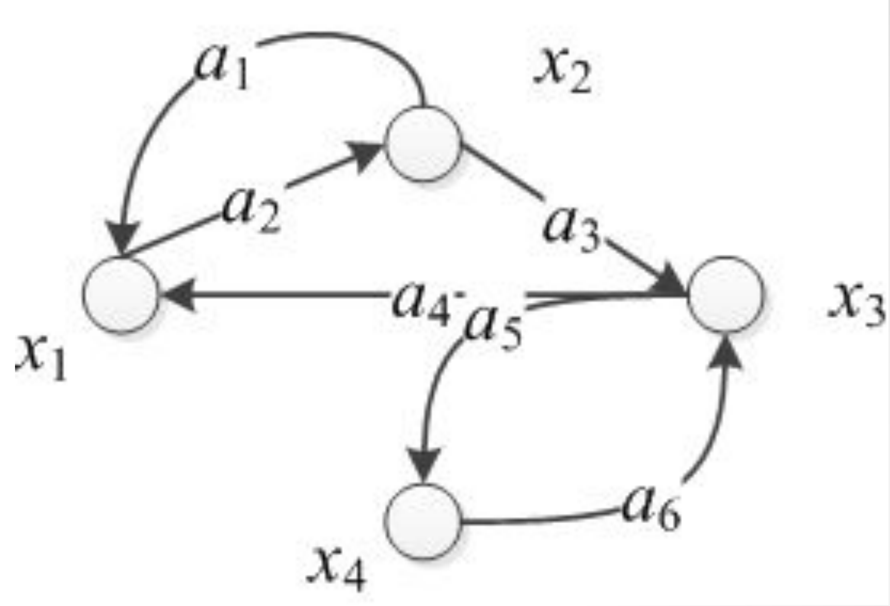
Теория графов - мощное средство исследования и решения многих задач, возникающих при изучении больших и сложных систем. **Графы** встречаются во многих областях под разными названиями: «структуры» в гражданском строительстве, «сети» – в электронике, «социограммы» – в социологии и экономике, «молекулярные структуры» – в химии, «дорожные карты», электрические или газовые распределительные сети и т. д.

Графом G принято называть пару (X, A), где $X=\{x_i\}$- конечное непустое множество вершин, $A=\{a_i\}$ – набор ребер (набор в отличие от множества может содержать несколько элементов по несколько раз).

Основные понятия

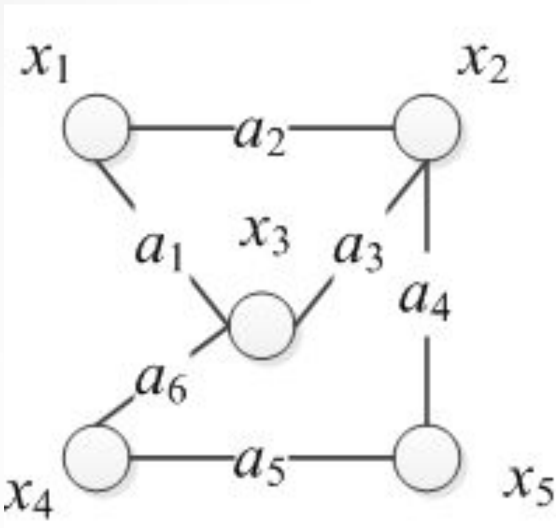
Графы могут быть:

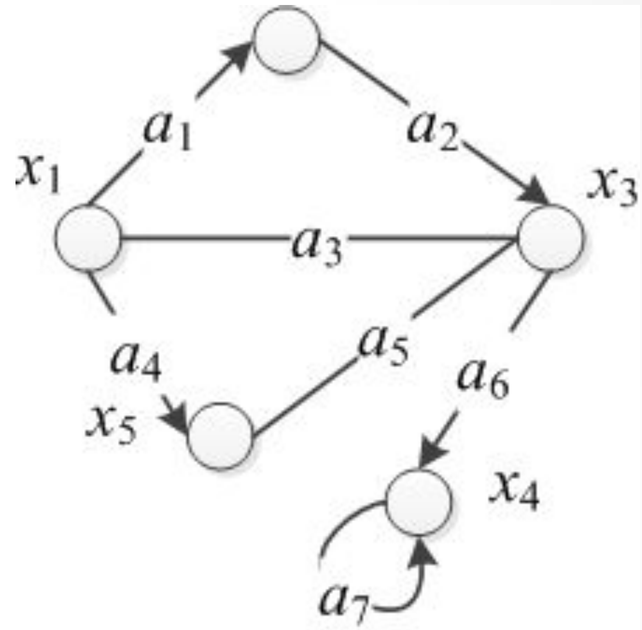
- ориентированными,
- неориентированными,
- смешанными.



Если ребра у множества *A* ориентированы (показывается стрелкой), то они называются **дугами**, и граф с такими ребрами называется **ориентированным графом** или **орграфом**.

Основные понятия



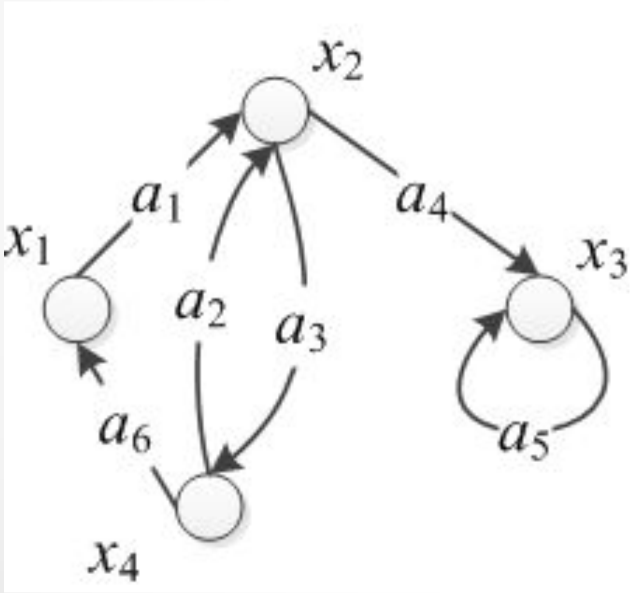


Если ребра не имеют ориентации, то граф называется **неориентированным**. Граф, в котором присутствуют и ребра, и дуги называется **смешанным**.

Дуга, у которой начальная и конечная вершины совпадают, называется **петлей**.

Способы задания графов

1. **Теоретико-множественное представление** графов. Граф описывается перечислением множества вершин и дуг.



$$G=(X, A),$$

где

$$X=\{x_i\},$$

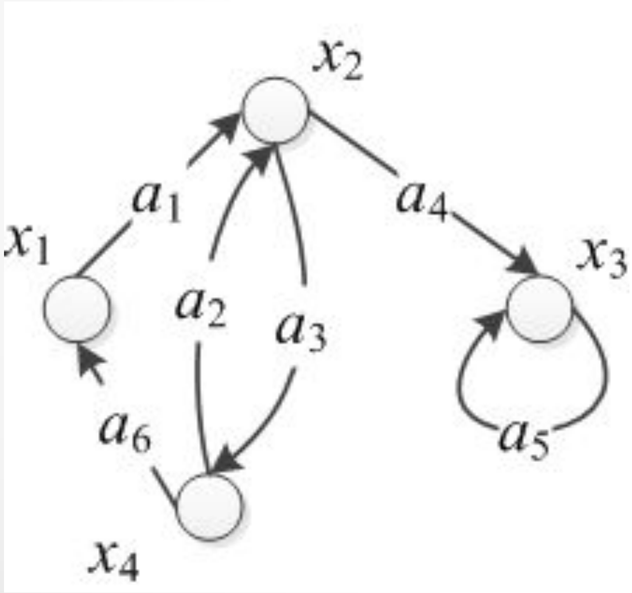
$i=1, 2, 3, 4$ – множество вершин;

$$A=\{a_i\},$$

$i=1, 2, \ldots, 6$ – множество дуг, причем $A=\{(x_1, x_2), (x_4, x_2), (x_2, x_4), (x_2, x_3), (x_3, x_3), (x_4, x_1)\}$.

Способы задания графов

2. Задание графов **соответствием**. Граф описывается заданием множества вершин X и соответствия $Г$, которое показывает, как между собой связаны вершины.



$G=(X, Г)$,

где

$X=\{x_i\}$,

$i=1, 2, 3, 4$ – множество вершин;

$Г(x_1)=\{x_2\}$,

$Г(x_2)=\{x_3, x_4\}$,

$Г(x_3)=\{x_3\}$,

$Г(x_4)=\{x_1,x_2\}$– отображения.

Отображение вершины x_i – множество вершин, в которые существуют дуги из вершины x_i.

Способы задания графов

Множество может обладать **иерархической** структурой. **Семейством** множества M или **булеаном** (M) является множество, элементами которого являются всевозможные подмножества множества M.

Пример

$$M=\{a,b,c\},$$

$$\beta(M)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}.$$

$$|M|=3,\ |\beta(M)|=8.$$

В общем случае мощность булеана

$$|\beta(M)| = 2^{|M|}.$$

Универсальным множеством E называется множество всех рассматриваемых в данной задаче элементов.

Способы задания графов

3.2. **Матрица инциденций** представляет собой прямоугольную матрицу размером *n* x *m*,

где *n* – количество вершин графа,

m – количество дуг графа.

Обозначается матрица инциденций

$B = \{b_{ij}\}$, $i = 1, 2, ..., n$, $j = 1, 2, ..., m$.

Каждый элемент матрицы определяется следующим образом:

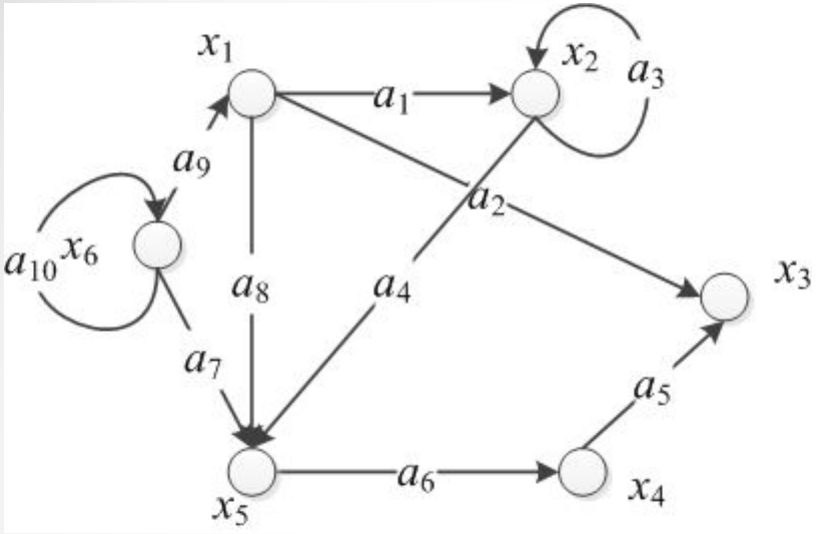
$b_{ij} = 1$, если x_i является начальной вершиной дуги a_j,

$b_{ij} = -1$, если x_i является конечной вершиной дуги a_j,

$b_{ij} = 0$, если x_i не является концевой вершиной дуги a_j или если a_j является петлей.

Таким образом, нулевой столбец *j* в матрице инциденций свидетельствует о том, что дуга a_j яляется петлей.

Пример



$A=$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	1	1	0	1	0
x_2	0	1	0	0	1	0
x_3	0	0	0	0	0	0
x_4	0	0	1	0	0	0
x_5	0	0	0	1	0	0
x_6	1	0	0	0	1	1

$A=$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
x_1	1	1	0	0	0	0	0	1	-1	0
x_2	-1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
x_3	0	-1	0	0	-1	0	0	0	0	0
x_4	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0
x_5	0	0	0	-1	0	1	-1	-1	0	0
x_6	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0

Структура графа

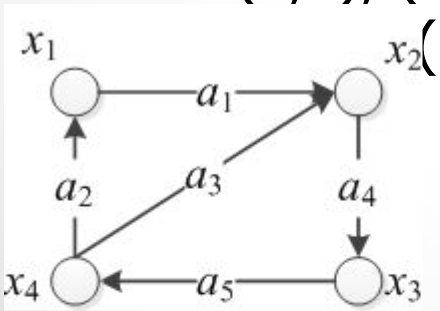
Дан граф G=(V, E). **Подграф -** граф G'=(V', E'), полученный из исходного удалением части вершин вместе с инцидентными им ребрами. **Надграф -** исходный граф по отношению к подграфу. Всего из одного графа можно получить 2^n подграфов.

Маршрут между вершинами v и w в графе G=(V,E) - последовательность ребер вида (v, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3),…, (x_{n-1}, x_n), (x_n, w).

Маршрут, у которого начальная вершина совпадает с конечной, называется **циклом**.

(1,2), (2, 3) – маршрут из 1 в 3

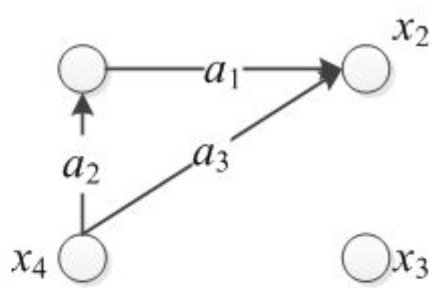
(3, 4), (4, 2) - цикл



Структура графа

Вершина v называется **достижимой** из вершины w, если существует маршрут из w в v. Вершины v и w **взаимнодостижимы**, если существует маршрут из v в w и маршрут из w в v. Для **неориентированных** графов достижимость вершин влечет **взаимодостижимость**.

Вершина графа, для которой не существует достижимых вершин, и которая не достижима из других вершин называется **изолированной**. Очевидно, что вершина изолирована тогда и только тогда, когда у нее нет инцедентных ребер.



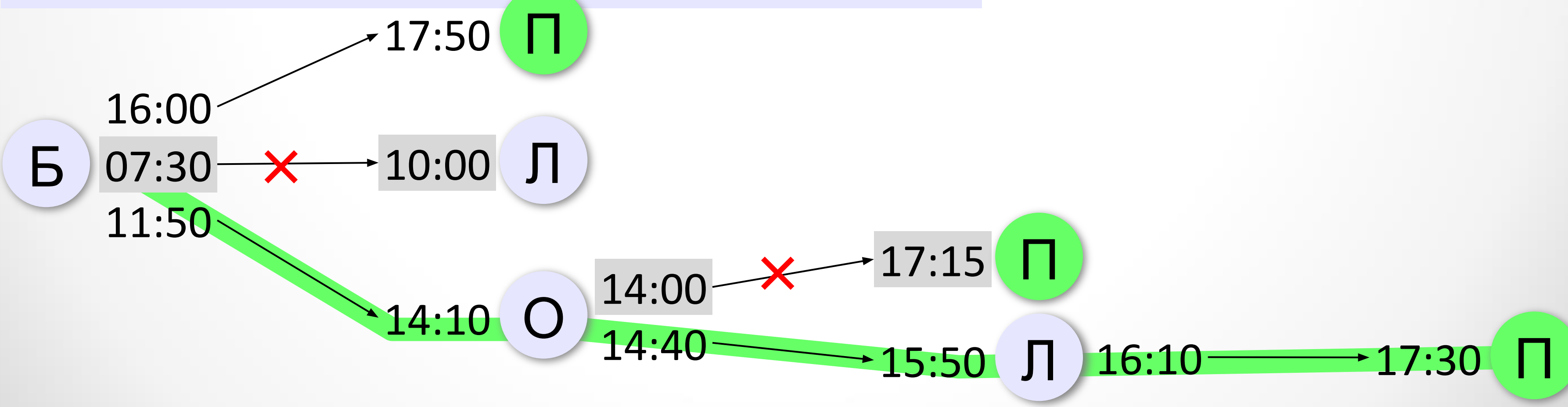
Задача

Из	В	Отправл.	Прибытие
Березовое	Лесное	07:30	10:00
Березовое	Осиновое	11:50	14:10
Лесное	Березовое	12:50	15:20
Полевое	Лесное	13:20	14:40
Осиновое	Полевое	14:00	17:15
Лесное	Осиновое	14:20	15:30
Осиновое	Лесное	14:40	15:50
Березовое	Полевое	16:00	17:50
Лесное	Полевое	16:10	17:30
Полевое	Осиновое	17:40	19:55

Березовое: 8:00

↓

Полевое



Методы обхода графа

Под **обходом** графа понимается перебор его вершин в определенном порядке, связанный с проходом по некоторым ребрам.

Основа большинства методов – такой систематический перебор вершин графа, что каждая вершина просматривается в точности один раз.

Поиск в глубину

Поиск начинается с некоторой фиксированной вершины v_0, затем выбирается произвольная вершина u, смежная с v_0, и поиск повторяется от u. Если же не существует ни одной новой вершины, смежной с v, то необходимо вернуться в вершину, из которой попали в v и продолжить поиск.

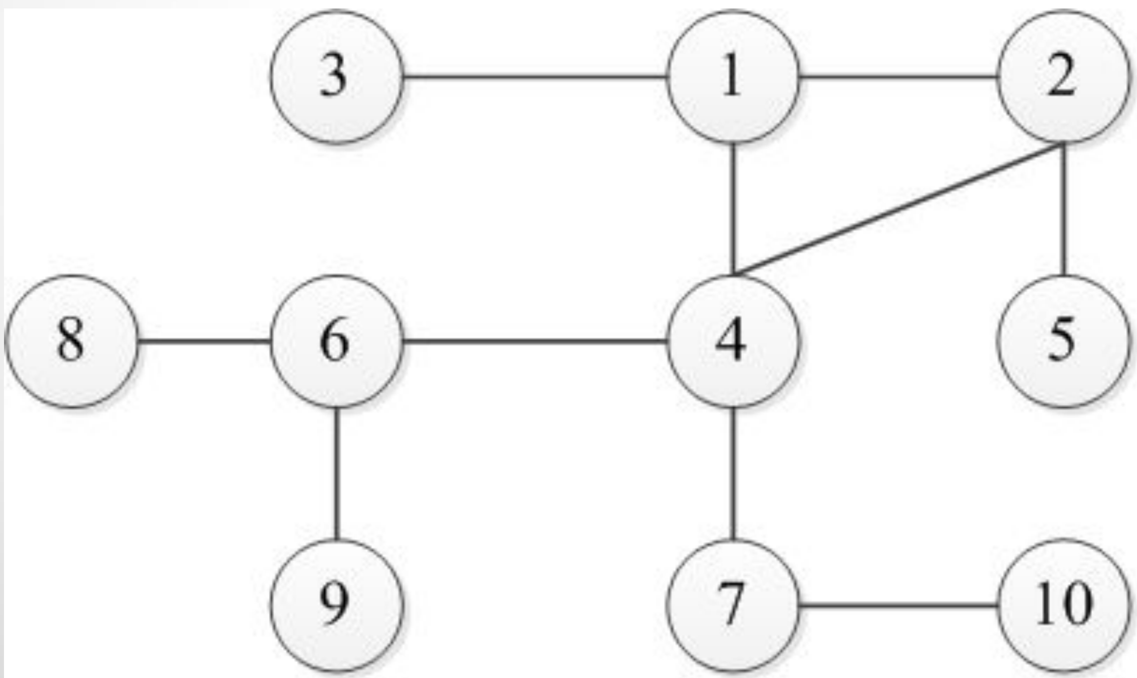
Поиск в глубину

Пример

Дан граф *G=(V, E)*.

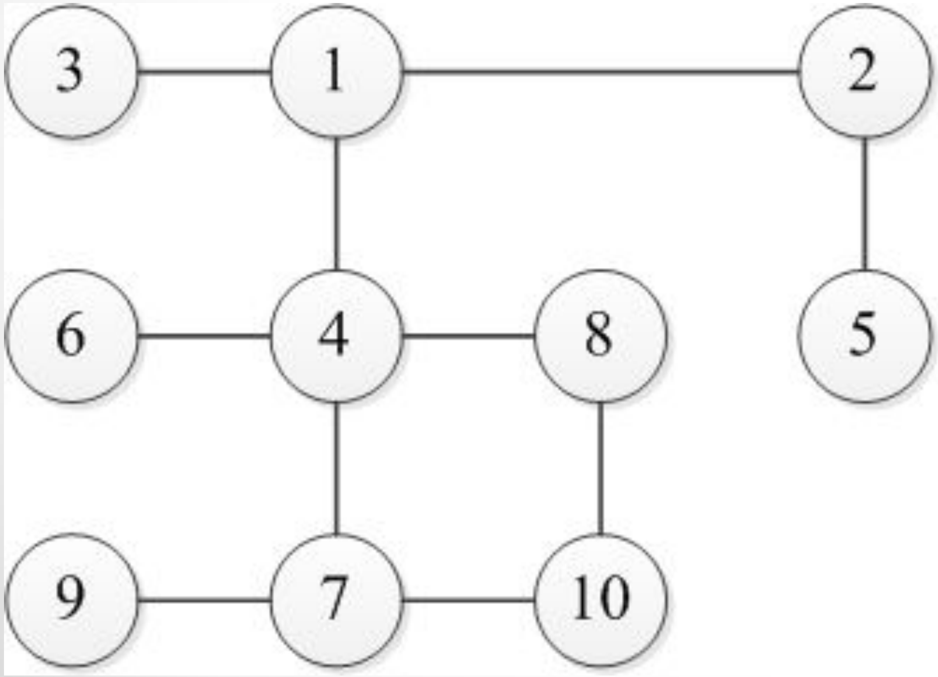
Последовательность вершин поиска в глубину:

1-2-4-6-8-9-7-10-5-3



Поиск в ширину

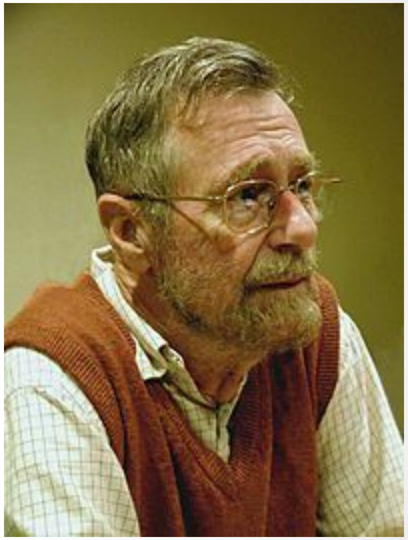
Поиск начинается с некоторой фиксированной вершины *v*, просматриваются все вершины на расстоянии одного ребра от начальной вершины *v*. Затем на расстоянии двух ребер и т.д.



1-2-3-4-5-6-7-8-9-10

Поиск кратчайшего пути

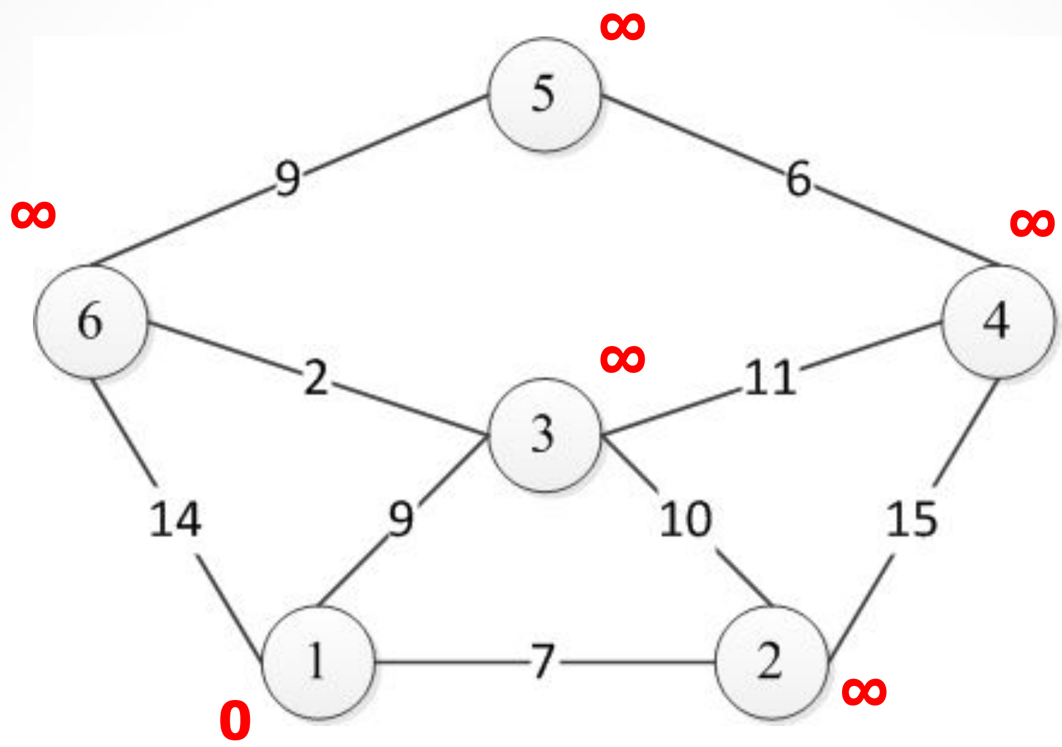
Граф *G=(V, E)* называется **взвешенным**, если каждому ребру *v* поставлено в соответствие некоторое число, называемое его **весом**.



В 1959г. нидерландский ученый Эдсгер Вибе Дейкстра изобрел **алгоритм** на графах, определяющий **кратчайшее расстояние** от одной из вершин графа до всех остальных. Алгоритм работает только для графов без ребер отрицательного веса.

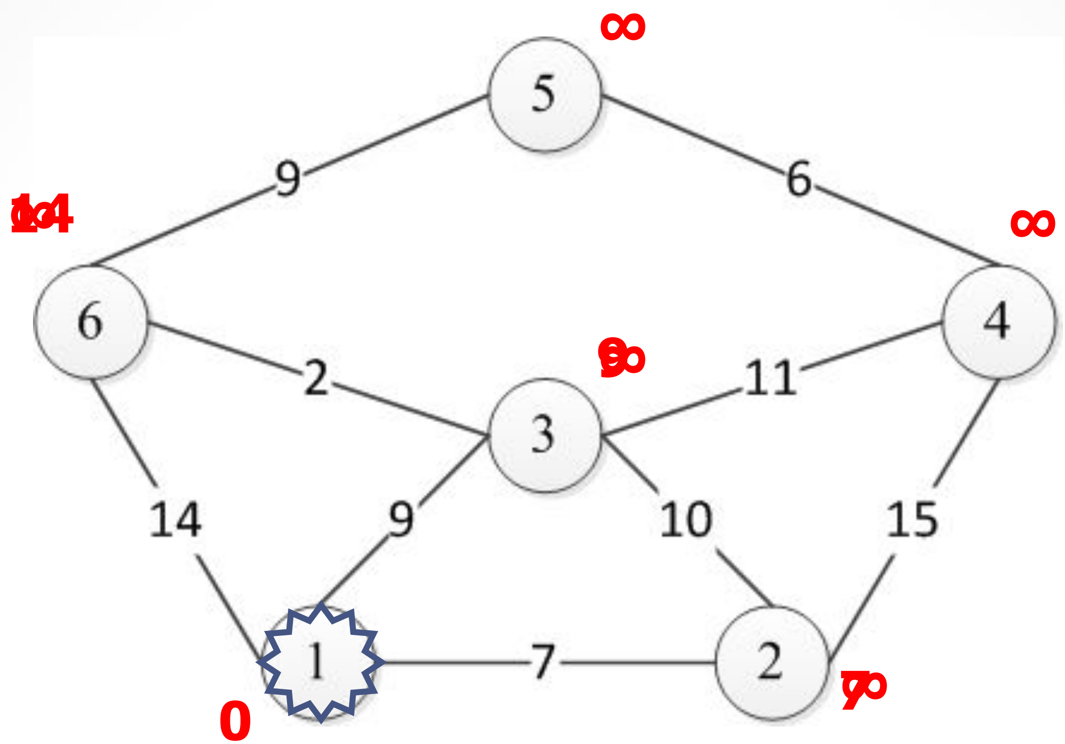
Рассмотрим выполнение алгоритма на примере. Дан граф *G*, около каждого ребра обозначен «вес» – длина пути. Пусть требуется определить расстояния от первой вершины до всех остальных.

Поиск кратчайшего пути



Рядом с каждой вершиной установим метку – длина кратчайшего пути в эту вершину из вершины 1 или знак ∞, если длина пути не определена.

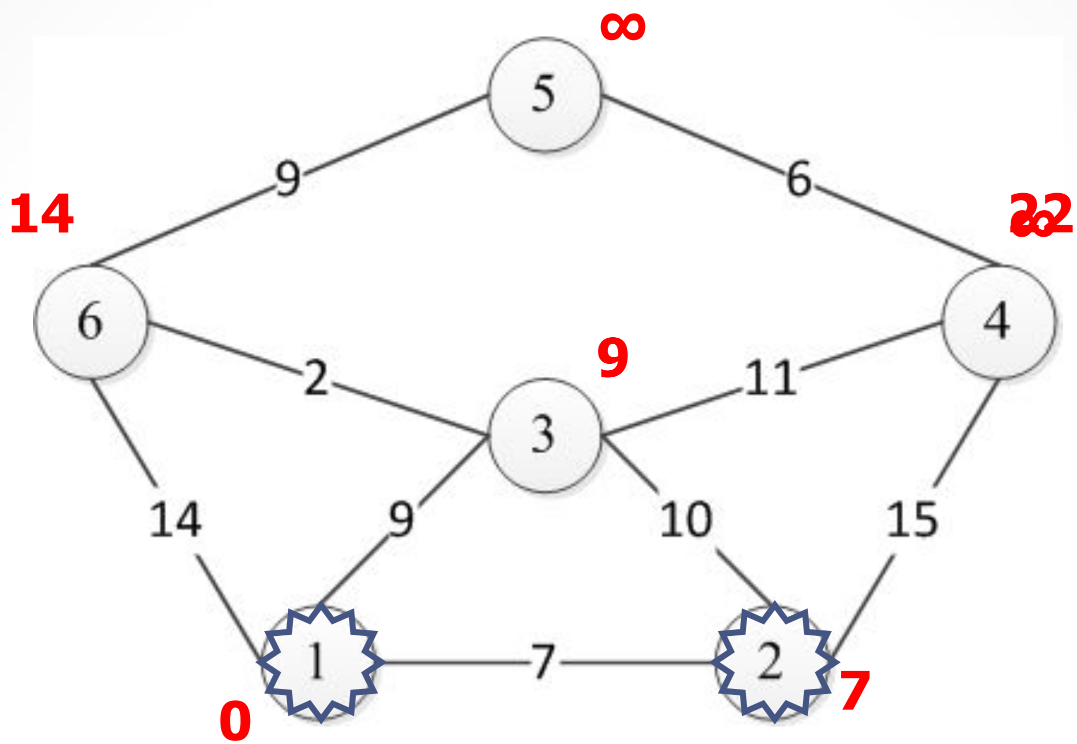
Поиск кратчайшего пути



Определим кратчайшее расстояние от вершины 1 до соседних вершин 2, 3 и 6.

Все соседи вершины 1 проверены. Текущее минимальное расстояние до вершины 1 считается окончательным и пересмотру не подлежит. Вычеркнем ее из графа, чтобы отметить, что эта вершина посещена.

Поиск кратчайшего пути

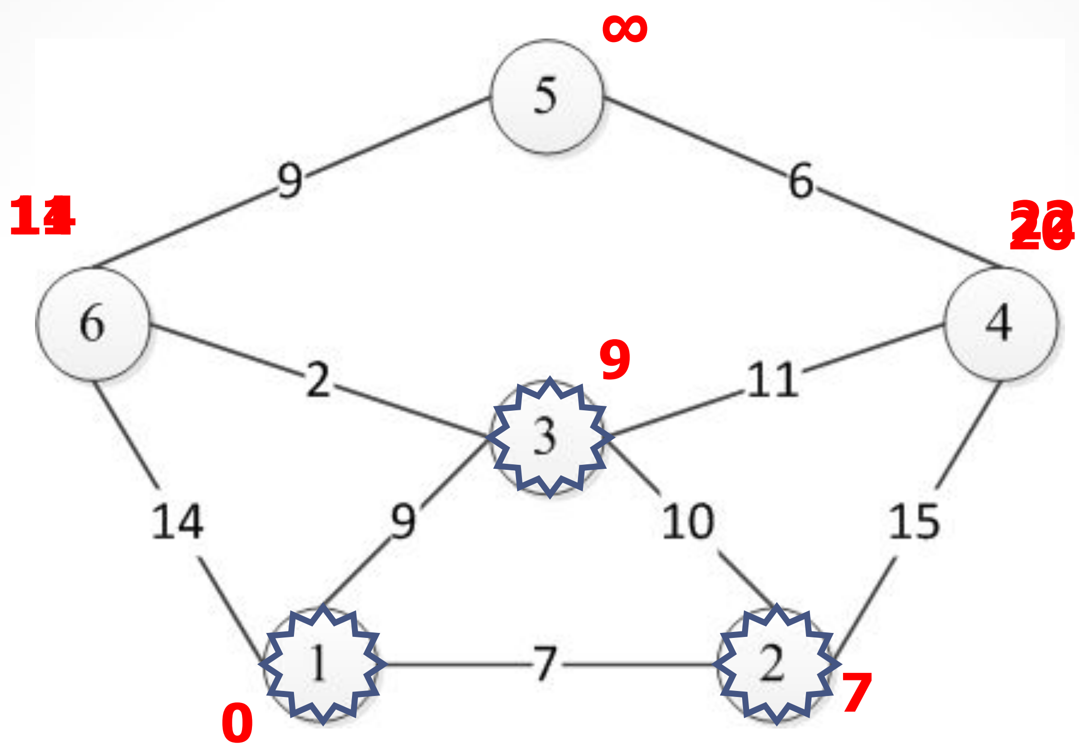


Определяем «ближайшую» из непосещенных вершин. Это вершина 2 с меткой 7. Соседи – вершины 1, 3 и 4. Т.к. вершина 1 посещена, с ней ничего не делаем. Т.к. путь к вершине 3 это 7+10=17>9, то тоже ничего не делаем.

Вершина 4: 7+15=22<∞, меняем метку.

- Вершину 2 замораживаем.

Поиск кратчайшего пути

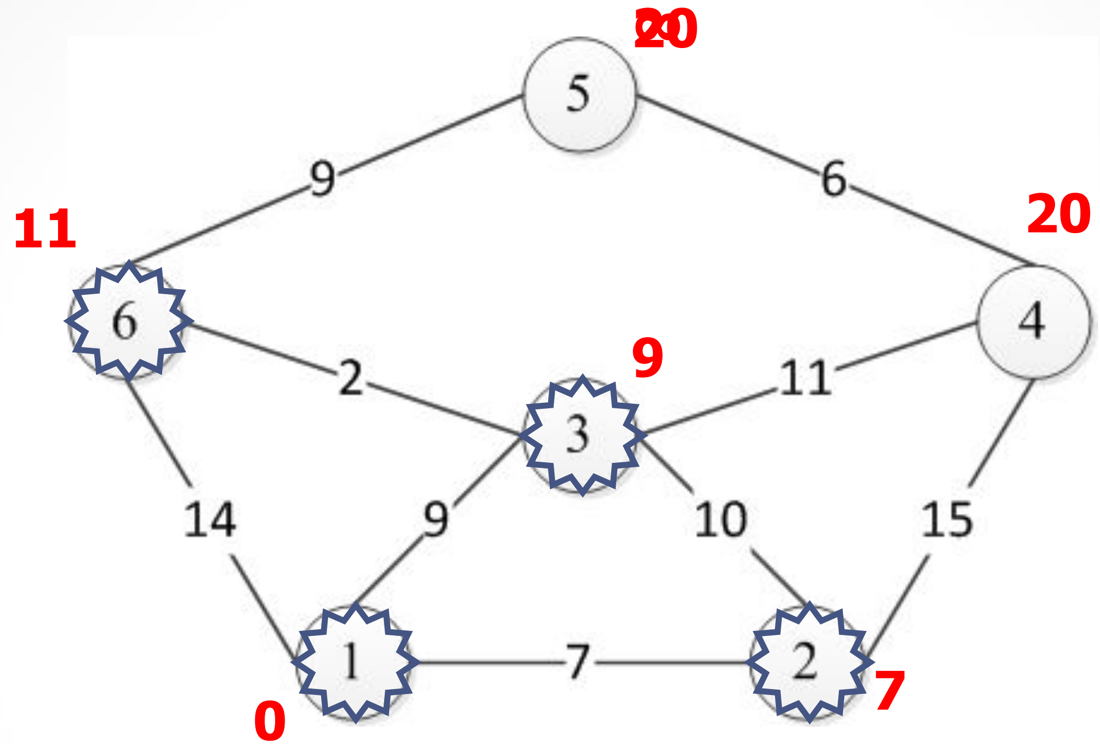


Определяем «ближайшую» из непосещенных вершин - вершина 3 с меткой 9.

Меняем метки: вершина 4 и вершина 6.

Вершину 3 замораживаем.

Поиск кратчайшего пути

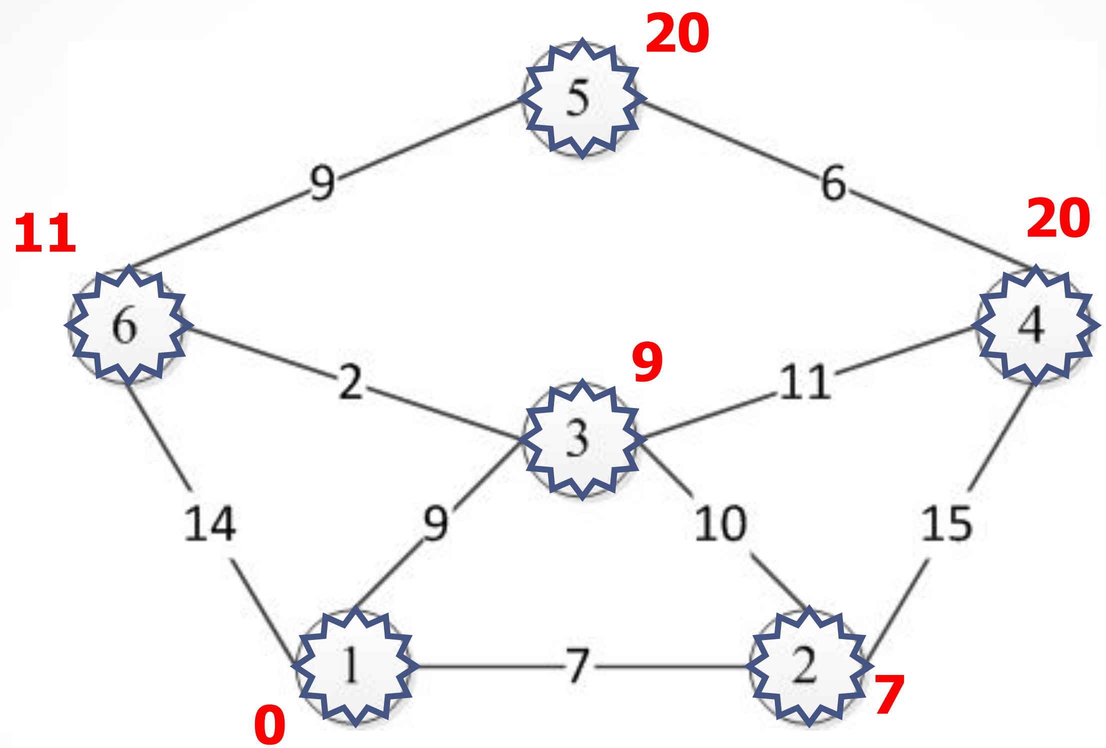


Определяем «ближайшую» из непосещенных вершин - вершина 6 с меткой 11.

Меняем метки: вершина 5.

Вершину 6 замораживаем.

Поиск кратчайшего пути



Определяем «ближайшую» из непосещенных вершин - вершина 4 с меткой 20.

Изменений нет. Вершину 4 замораживаем.

Вершину 5 замораживаем.

Алгоритм заканчивается, когда все вершины помечены как просмотренные.