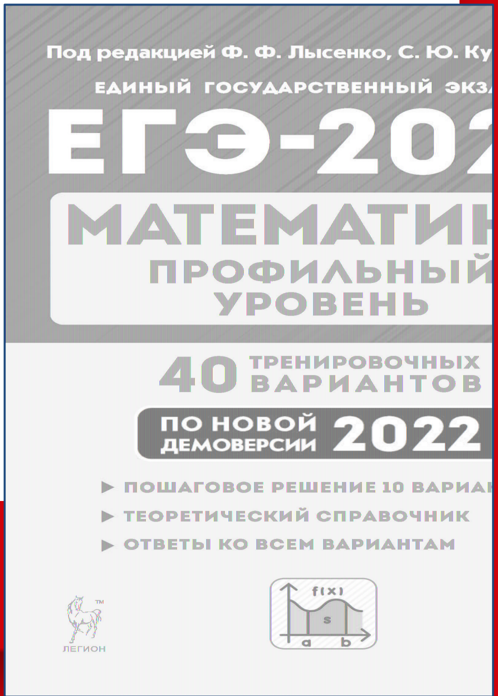
ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕГИОН

Планиметрические задачи в ОГЭ и ЕГЭ по математике 2022 года

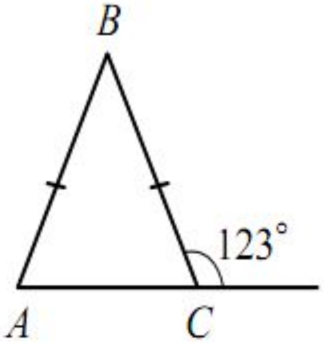
Кулабухов С. Ю.



Задачи с кратким ответом по геометрии базового уровня сложности

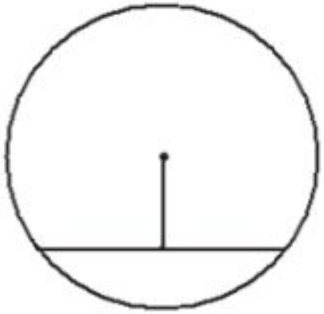
™ ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕГИОН
www.legionr.ru

15 В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC внешний угол при вершине C равен $123°$. Найдите величину угла BAC. Ответ дайте в градусах.



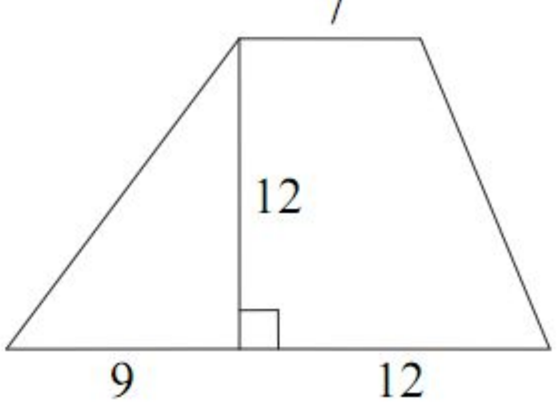
Ответ: ______________________________.

16 Найдите длину хорды окружности радиусом 13, если расстояние от центра окружности до хорды равно 5.



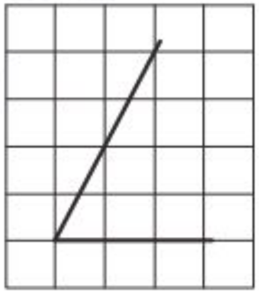
Ответ: ___________________________.

17 Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.



Ответ: ___________________________.

18 Найдите тангенс острого угла, изображённого на рисунке.



Ответ: ____________________________.

19 Какие из следующих утверждений верны?

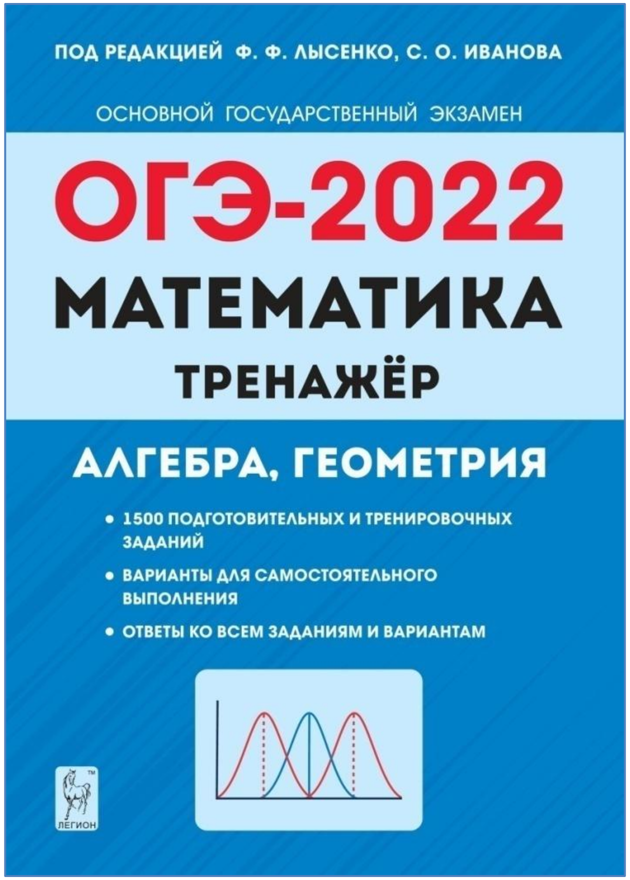
1) Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, параллельную этой прямой.
2) Треугольник со сторонами 1, 2, 4 существует.
3) В любом параллелограмме есть два равных угла.

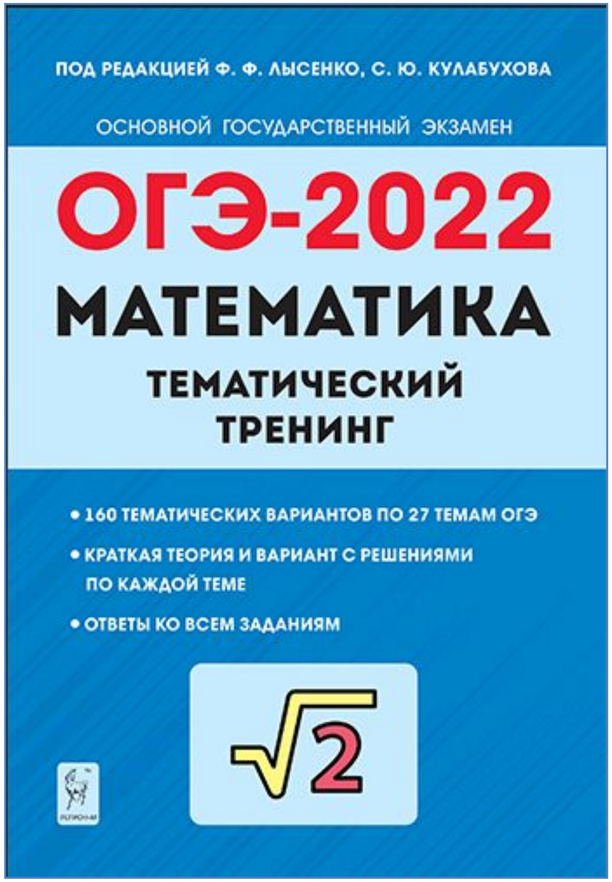
В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: ___________________________.

Тренинг и контроль на заключительном этапе повторения

Базовый уровень





Задачи с развернутым ответом по геометрии повышенного и высокого уровня сложности

Задания с развернутым ответом

23. ДЕЙСТВИЯ С ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ФИГУРАМИ, КООРДИТНАТАМИ, ВЕКТОРАМИ

24. ПРОВЕДЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬНЫХ РАССУЖДЕНИЙ

25. ДЕЙСТВИЯ С ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ФИГУРАМИ, КООРДИНАТАМИ, ВЕКТОРАМИ

Задания части 2 экзаменационной работы направлены на проверку таких качеств геометрической подготовки выпускников, как:

- умение решить планиметрическую задачу, применяя различные теоретические знания курса геометрии;
- умение математически грамотно и ясно записать решение, приводя при этом необходимые пояснения и обоснования;
- владение широким спектром приемов и способов рассуждений.

Таблица 7. Планируемые проценты выполнения заданий части 2

Номер задания	20	21	22	23	24	25
Уровень сложности	П	П	П	П	В	В
Ожидаемые проценты выполнения	30–50	15–30	3–15	30–50	15–30	3–15

Тренинг и контроль на заключительном этапе повторения

Повышенный и высокий уровень

Требования к записи решения

- **Должен быть понятен ход рассуждений выпуск и решение должно быть математически грамот**
- **Нужно нацеливать учащихся на лаконичность** и не требовать подробных комментариев и формулировок теорем, при этом в решении должны быть ссылки на теоремы, чтобы показать, что ученик владеет теоретическим материалом.
- **Если в решении допущена ошибка непринципиального характера** (вычислительная, погрешность в терминологии или символике и др.), не влияющая на правильность общего хода решения (даже при неверном ответе) и позволяющая, несмотря на ее наличие, сделать вывод о владении материалом, то учащемуся **засчитывается балл, на 1 меньший максимального**.
- (из рекомендаций ФИПИ Учебно-методические материалы для председателей и членов ПК по про заданий с развернутым ответом ГИА IX классов ОУ

Решение задач с развернутым ответом

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕГИОН
www.legionr.ru

Задача повышенного уровня сложности (23).

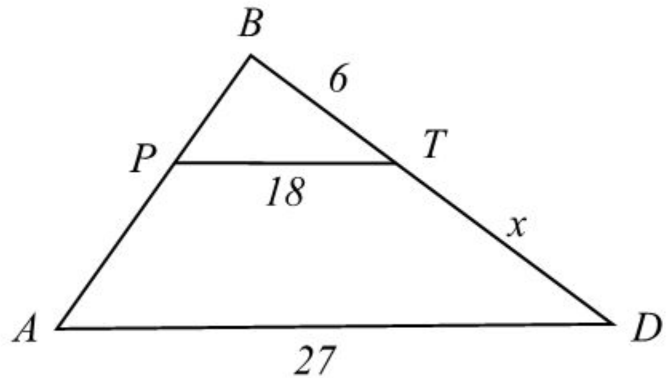
- 2-3 ходовая задача на вычисление
- Ненамного превышает обязательный уровень
- Проверяет знание основных терминов и теорем, умение их применять
- Проверяет умение записать решение и аргументировать свое мнение

Баллы	Критерии оценивания выполнения заданий
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но не даны объяснения или допущена одна вычислительная ошибка
0	Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям
2	Максимальный балл

Задача

Прямая, параллельная стороне AD треугольника ADB, пересекает стороны AB и BD в точках P и T соответственно. Найдите DT, если $PT = 18$, $AD = 27, TB = 6$.

Решение.



Докажем, что треугольники ABD и PBT подобны. $\angle B$ общий, $\angle BAD = \angle BPT$ как соответственные углы при параллельных прямых AD и PT и секущей BA. Значит, $\triangle PBT \sim \triangle ABD$ и $BT : BD = PT : AD$. Обозначим $DT = x$, тогда $BD = 6 + x$.

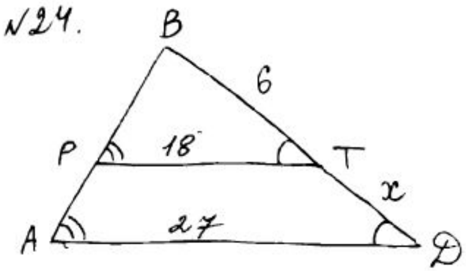
Получаем уравнение $18 : 27 = 6 : (6 + x)$, откуда $x = 3$, $DT = 3$.

Ответ: 3.

Примеры выполнения задачи учащимися

Пример 1.

№24.



$\angle P=\angle A,\ \angle T=\angle D \Rightarrow$

$\Delta PBT \sim \Delta ABD \Rightarrow$

$\frac{18}{27}=\frac{6\cancel{+x}}{6+x};\quad \frac{2}{3}=\frac{6}{6+x}$

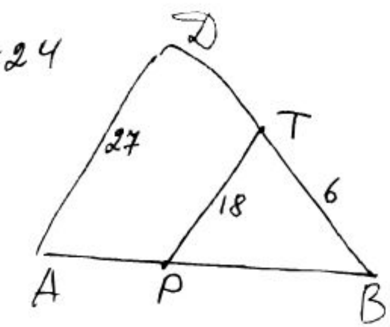
$2(6+x)=18,\ x=3$

Ответ: 3

Комментарий. За выполненное решение выставляется 1 балл, так как отсутствуют объяснения и ссылки на используемые теоремы. Ответ получен правильный.

Пример 2.

№24



$\angle BTP=\angle BDA$ (соответственные углы, $TP \parallel AD$)

$\angle B$ общий $\Rightarrow \Delta PBT \sim \Delta ABD$ по двум углам $\Rightarrow$

$\frac{AD}{PT}=\frac{BD}{TB},\quad \frac{27}{18}=\frac{BD}{6},\quad BD=\frac{27\cdot 6}{18}$

$BD=8,\ DT=8-6=2.$

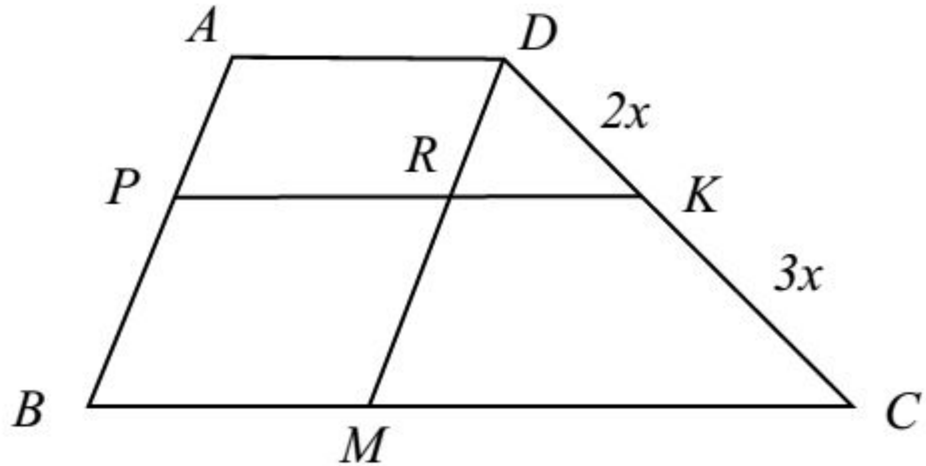
Ответ: 2

Комментарий. За выполненное решение выставляется 1 балл, так как даны необходимые объяснения и ссылки на используемые теоремы, но допущена вычислительная ошибка, не носящая принципиального характера. Ответ получен, но он неправильный.

Задача

7. Прямая, параллельная основаниям трапеции $ABCD$, пересекает её боковые стороны AB и CD в точках P и K соответственно. Найдите длину отрезка PK, если $AD = 15$, $BC = 48$, $DK : KC = 2 : 3$.

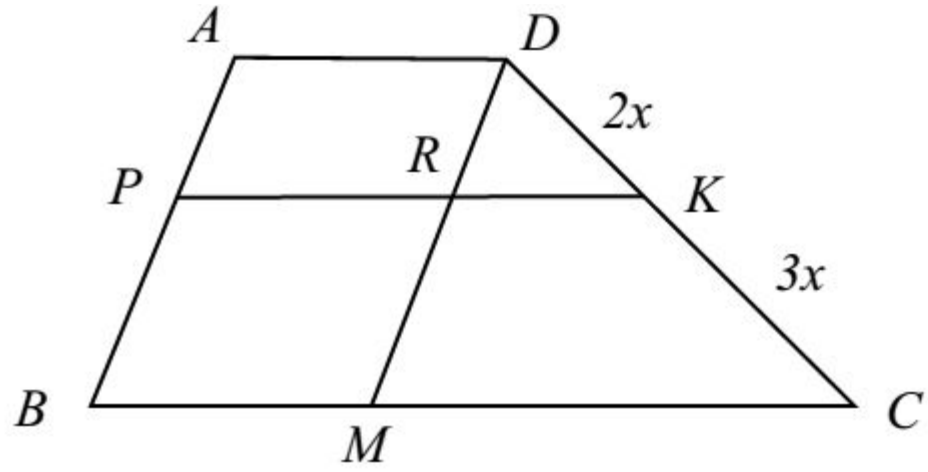
Решение



Проведём прямую DM параллельно AB, она пересекает отрезки PK и BC в точках R и M соответственно.

Четырёхугольник $ABMD$ — параллелограмм, потому что его стороны попарно параллельны. Тогда $AD = BM = 15$ (противоположные стороны параллелограмма равны). Аналогично $PR = AD$. Найдём длину отрезка MC.

$$MC = BC - BM = 48 - 15 = 33.$$



Рассмотрим треугольники RDK и MDC. Угол D у них общий, $\angle DRK = \angle DMC$ как соответственные углы при параллельных прямых RK и MC и секущей DM, значит, треугольники подобны по двум углам. В подобных треугольниках против равных углов лежат пропорциональные стороны.

Запишем пропорцию $RK : MC = DK : DC$.

Обозначим $DK = 2x, KC = 3x$, тогда $DC = DK + KC = 5x$.

$RK : 33 = 2x : 5x,\ RK = 13,2,$

$PK = PR + RK = AD + PK = 15 + 13{,}2 = 28{,}2.$

Задача на доказательство (24).

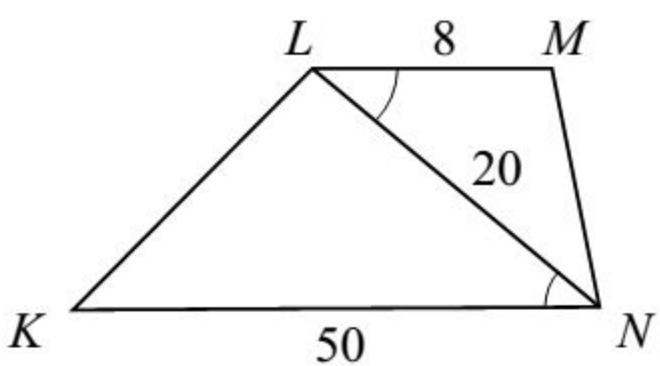
- Ненамного превышает обязательный уровень
- Обычный процент решаемости менее 15%
- Проверяет знание основных терминов и теорем, умение их применять
- Проверяет умение записать решение и аргументировать свое мнение

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Доказательство верное, все шаги обоснованы
1	Доказательство в целом верное, но содержит неточности
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

Задача

Основания LM и KN трапеции $KLMN$ равны соответственно 8 и 50, $LN = 20$. Докажите, что треугольники LMN и KLN подобны.

Решение.

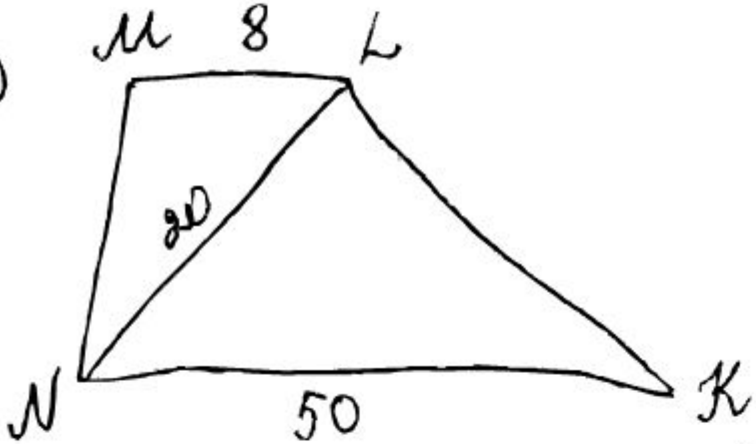


Воспользуемся вторым признаком подобия треугольников: $\angle KNL = \angle NLM$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых LM и KN и секущей NL, а $NL : NK = LM : NL$, так как $NL : NK = 20 : 50 = 0{,}4$, $LM : NL = 8 : 20 = 0{,}4$. Значит, треугольники NKL и LNM подобны.

Примеры выполнения задачи учащимися

Пример 1.

24



Дано: KLMN – трапеция

ML = 8, NL = 20, NK = 50

Доказать: $\Delta LMN \sim \Delta KLN$

Док-во.

$\angle MLN = \angle LNK$,

$\frac{NL}{ML} = \frac{NK}{NL} = \frac{\cancel{20}^{5}}{\cancel{8}_{2}} = \frac{5\cancel{0}}{2\cancel{0}} = \frac{5}{2}$.

Δ-ки подобны

ч.т.д.

Комментарий. Нет пояснений и ссылок на теоремы. За решение можно поставить 1 балл.

Пример 2.

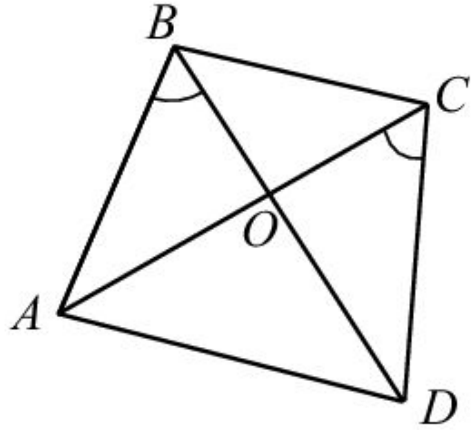
24. $ML \parallel NK$ (основания трап).
NL секущая.
$\angle NLM = \angle KNL$ (накр. лежащие)
$\frac{KN}{NL} = \frac{50}{20} = \frac{5}{2} = 2{,}5$, $\frac{NL}{LM} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2} = 2{,}5$
2 ст. 1-тр. пропорц.-ны 2 уг. 2-го Δ,
$\angle$ между сторонами равны $\Rightarrow$
Δ-ки $MLN \sim \Delta KNL$.

Комментарий. Решение правильное, пояснения достаточные. Слова «2 ст. одного тр. пропорциональны 2 уг. второго тр.» напоминают шифрограмму, но понятно, что учащийся имеет в виду, а ссылка на углы вместо сторон — явная описка, потому что перед этим выписывались отношения сторон. За решение можно поставить 2 балла.

Задача

24. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ угол ABD равен углу ACD. Докажите, что угол ACB равен углу ADB.

Решение



$\triangle AOB \sim \triangle COD$ по двум углам ($\angle AOB = \angle COD$ как вертикальные, $\angle ABO = \angle ACD$ по условию), отсюда следует, что $\dfrac{AO}{OD} = \dfrac{BO}{OC}$

$\triangle AOD \sim \triangle BOC$ по второму признаку подобия треугольников.

Против сходственных сторон в подобных треугольниках лежат равные углы (против стороны AO лежит угол ADB, против стороны BO — угол ACB).

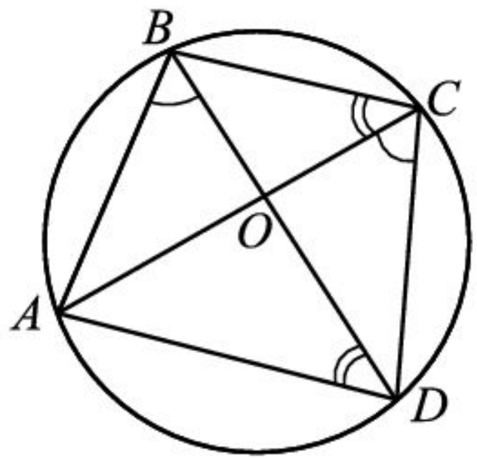
Значит, $\angle ADB = \angle ACB$.

Задача

24. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ угол ABD равен углу ACD. Докажите, что угол ACB равен углу ADB.

Другое решение

1) Так как точки B и C лежат по одну сторону от прямой AD и отрезок AD виден из них под одинаковым углом, то все четыре точки A, B, C и D лежат на одной окружности.



2) $\angle ACB = \angle ADB$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу $\smile{AB}$.

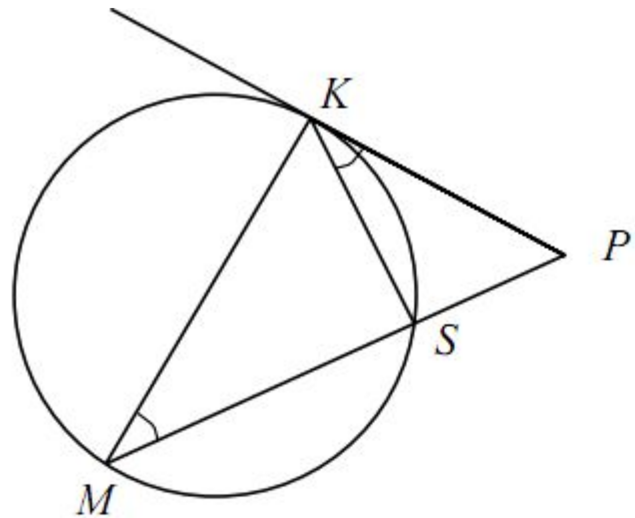
Задача высокого уровня сложности (25)

Требования к записи решения такие же, как и к другим задачам: полное и математически грамотное решение, понятный ход рассуждений учащегося. Запись решения должна удовлетворять указанным выше требованиям, а в остальном может быть произвольной. Нерациональное решение не является основанием для уменьшения числа выставленных баллов. За полное решение выставляется 2 балла.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, чертёж соответствует условию задачи, но пропущены существенные объяснения или допущена вычислительная ошибка
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

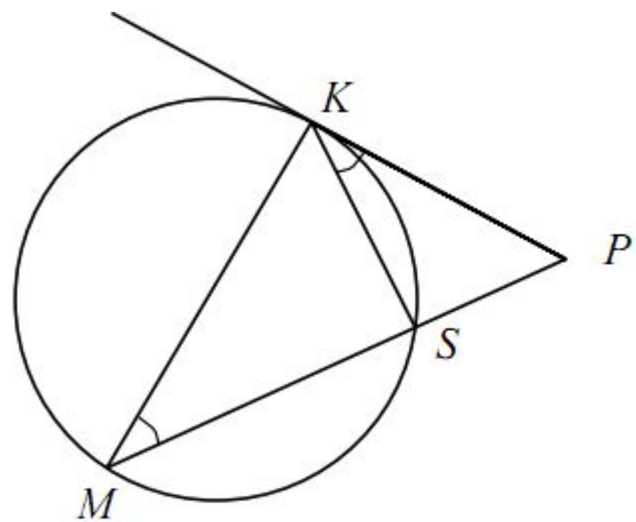
Задача 1.

На стороне MP треугольника MPK взята точка S так, что окружность, проходящая через точки M, K и S, касается прямой KP. Найдите MS, если $KM = 18$, $KS = 9$ и $SP = 7$.



Решение.

Треугольники KSP и MKP подобны: угол P общий, а $\angle PKS = \frac{\overset{\smile}{KS}}{2} = \angle PMK$, как угол между хордой KS и касательной KP и вписанный угол, опирающийся на дугу KS.



$$\frac{KP}{SP} = \frac{MK}{KS} = \frac{MP}{KP},$$

$$\frac{KP}{7} = \frac{18}{9} = \frac{MP}{KP}.$$

Отсюда

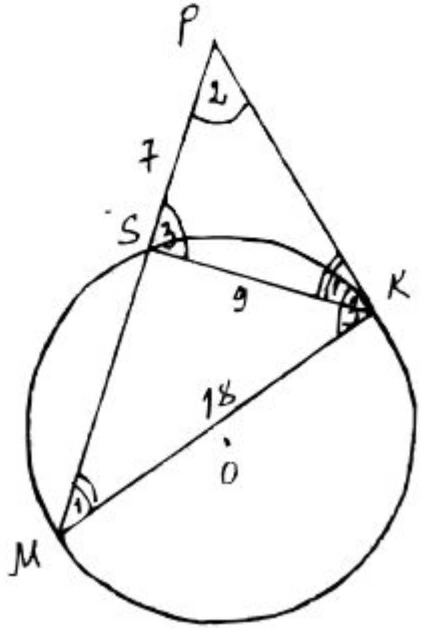
$$KP = \frac{18}{9} \cdot 7 = 14, \frac{MK}{KS} = \frac{MP}{KP},$$

$$MP = \frac{18}{9} \cdot KP = 28, MS = 28 - 7 = 21.$$

Ответ: 21.

Примеры выполнения задачи учащимися

Пример 1.



1) $\angle PKS = \frac{1}{2} \cup SK$,

$\angle SMK = \frac{1}{2} \cup SK$.

$\angle SMK = \angle PKS = \angle 1$.

2) $\angle MPK$ – общий для $\triangle MPK$ и $\triangle SPK$.

$\triangle MPK \sim \triangle SPK$.

$\frac{SP}{PK} = \frac{SK}{MK} = \frac{PK}{MP}$, $\frac{7}{PK} = \frac{9}{18} = \frac{PK}{MP}$,

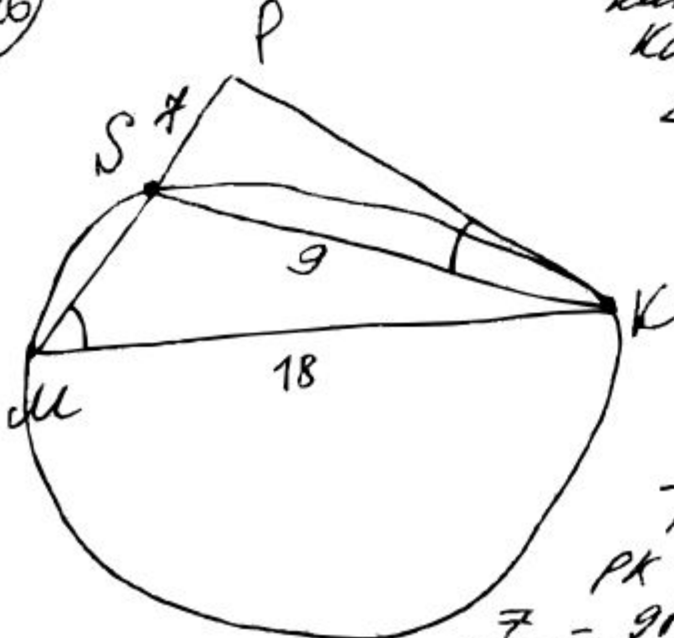
$PK = \frac{7 \cdot 18}{9} = 14$, $MP = \frac{18 \cdot 14}{9} = 28$.

$MS = MP - 7 = 21$. Ответ. 21.

Комментарий. Решение верное, но не указан признак подобия и нет пояснений, как найдены углы. Нужно выставлять 1 балл.

Пример 2.

26



$\angle P$ — общий, $\angle SKP = \dfrac{\smile SK}{2}$ как угол между касат. и хордой, $\angle SMK = \dfrac{\smile SK}{2}$ как впис. угол

по 2 углам $\triangle PSK \sim \triangle PMK$

$$\frac{PS}{PM} = \frac{PK}{MK} = \frac{SK}{PK}$$

$$\frac{7}{PM} = \frac{PK}{18} = \frac{9}{PK}$$

$$PK^2 = 9 \cdot 18, \quad PK = 9\sqrt{2}$$

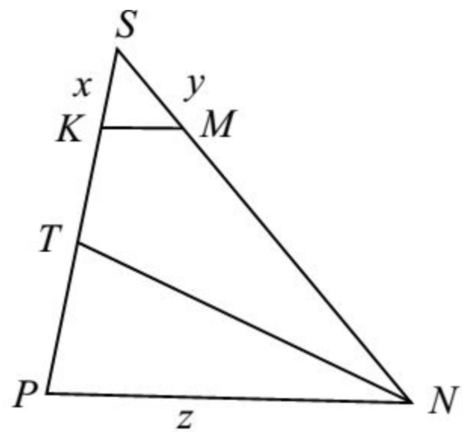
$$\frac{7}{PM} = \frac{9\sqrt{2}}{18}, \quad PM = \frac{7 \cdot 18}{9\sqrt{2}} = \frac{14}{\sqrt{2}}$$

$$MS = PM - SP = \frac{14}{\sqrt{2}} - 7$$

Ответ: $\dfrac{14}{\sqrt{2}} - 7$

Комментарий. За выполненную запись решения выставляется 0 баллов, так как в решении сделана грубая ошибка: в записи следствия из подобия треугольников в отношениях записаны непропорциональные стороны.

45. Боковые стороны PK и MN трапеции $PKMN$ равны соответственно 12 и 15, а основание KM равно 3. Биссектриса угла PNM проходит через середину стороны PK. Найдите площадь трапеции.



Решение.

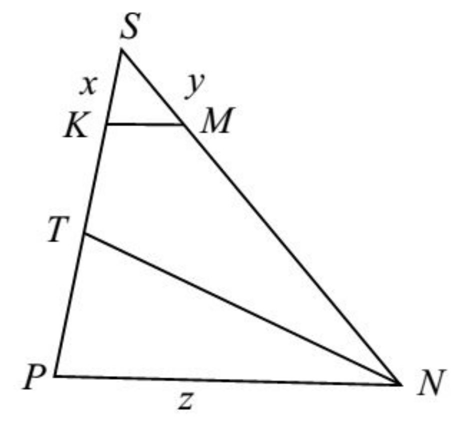
Пусть биссектриса угла PNM пересекает PK в точке T, а прямые PK и MN пересекаются в точке S. Обозначим $x = SK, y = SM, z = PN$.

Тогда по свойству биссектрисы:

$$\frac{PT}{TS} = \frac{PN}{NS},$$

$$\frac{6}{6+x} = \frac{z}{15+y}.$$

Треугольники KMS и PNS подобны, так так $\angle S$ общий, а $\angle MKS = \angle NPS$ как соответственные при параллельных прямых KM и PN. Поэтому:



$$\frac{x}{y} = \frac{12+x}{15+y},$$

$$\frac{3}{x} = \frac{z}{12+x}$$

Из равенства $\dfrac{x}{y} = \dfrac{12+x}{15+y}$ получаем $y = \dfrac{5x}{4}$. Выражая z из остальных уравнений, получаем:

$$z = 3 \cdot \frac{12+x}{x} = 6 \cdot \frac{15+y}{6+x}.$$

Подставив $y = \dfrac{5x}{4}$, получим $z = 3 \cdot \dfrac{12+x}{x} = \dfrac{15}{2} \cdot \dfrac{12+x}{6+x}$. Решая это уравнение, находим $x = 4$, откуда $y = \dfrac{5x}{4} = 5$, $z = 3 \cdot \dfrac{12+x}{x} = 12$.

Видим, что треугольник SPN имеет стороны $PN = 12$, $SP = 16$, $SN = 20$, значит, он прямоугольный по теореме, обратной теореме Пифагора. Поэтому SP перпендикулярна PN, и PK является высотой трапеции. Значит: $S_{PKMN} = KP \cdot \dfrac{KM+PN}{2} = 12 \cdot \dfrac{3+12}{2} = 90.$

Ответ: 90.

Задача с кратким ответом по планиметрии

Спецификация КИМ ЕГЭ 2022 по математике, профиль (фрагмент)

3	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	4.1, 5.2	5.1, 5.5	Б	1	5	3

3 Треугольник ABC вписан в окружность с центром O. Угол BAC равен $32°$. Найдите угол BOC. Ответ дайте в градусах.

Ответ: ___________________________.

ИЛИ

3 Площадь треугольника ABC равна 24; DE – средняя линия, параллельная стороне AB. Найдите площадь треугольника CDE.

Ответ: ____________________________.

ИЛИ

3 В ромбе $ABCD$ угол DBA равен $13°$. Найдите угол BCD. Ответ дайте в градусах.

Ответ: ___________________________.

ИЛИ

3

Стороны параллелограмма равны 24 и 27. Высота, опущенная на меньшую из этих сторон, равна 18. Найдите высоту, опущенную на бóльшую сторону параллелограмма.

Ответ: ___________________________.

Литература


Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова
ЕГЭ-2021
МАТЕМАТИКА
1700 ЗАДАНИЙ С КРАТКИМ ОТВЕТОМ
БАЗОВЫЙ И ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВНИ
ТЕМАТИЧЕСКИЕ ВАРИАНТЫ
ОТВЕТЫ КО ВСЕМ ЗАДАНИЯМ
S
ЛЕГИОН


Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. О. Иванова
ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН
ЕГЭ-2022
МАТЕМАТИКА
ТЕМАТИЧЕСКИЙ ТРЕНИНГ
10–11 КЛАССЫ
1600 ЗАДАНИЙ БАЗОВОГО И ПРОФИЛЬНОГО УРОВНЕЙ
НОВЫЕ ТИПЫ ЗАДАНИЙ
РЕШЕНИЕ КАЖДОГО ЧЕТВЁРТОГО ЗАДАНИЯ
КРАТКАЯ ТЕОРИЯ ПО ВСЕМ ТЕМАМ
ОТВЕТЫ КО ВСЕМ ЗАДАНИЯМ


Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова
ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН
ЕГЭ-2022
МАТЕМАТИКА
ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ
40 ТРЕНИРОВОЧНЫХ ВАРИАНТОВ
ПО НОВОЙ ДЕМОВЕРСИИ 2022
ПОШАГОВОЕ РЕШЕНИЕ 10 ВАРИАНТОВ
СБОРНИК ЗАДАЧ
ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ СПРАВОЧНИК
ОТВЕТЫ КО ВСЕМ ВАРИАНТАМ И ЗАДАНИЯМ
f(x)
s
a
b
ЛЕГИОН

Задача с развернутым ответом по планиметрии

Спецификация КИМ ЕГЭ 2022 по математике, профиль (фрагмент)

16	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	4.1, 5.2, 5.3	5.1	П	3	–	25

Кодификатор
требований к уровню подготовки выпускников образовательных организаций для проведения единого государственного экзамена

4		**Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами**
	4.1	Решать планиметрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей)
5		**Уметь строить и исследовать простейшие математические модели**
	5.2	Моделировать реальные ситуации на языке геометрии, исследовать построенные модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры; решать практические задачи, связанные с нахождением геометрических величин
	5.3	Проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений, распознавать логически некорректные рассуждения

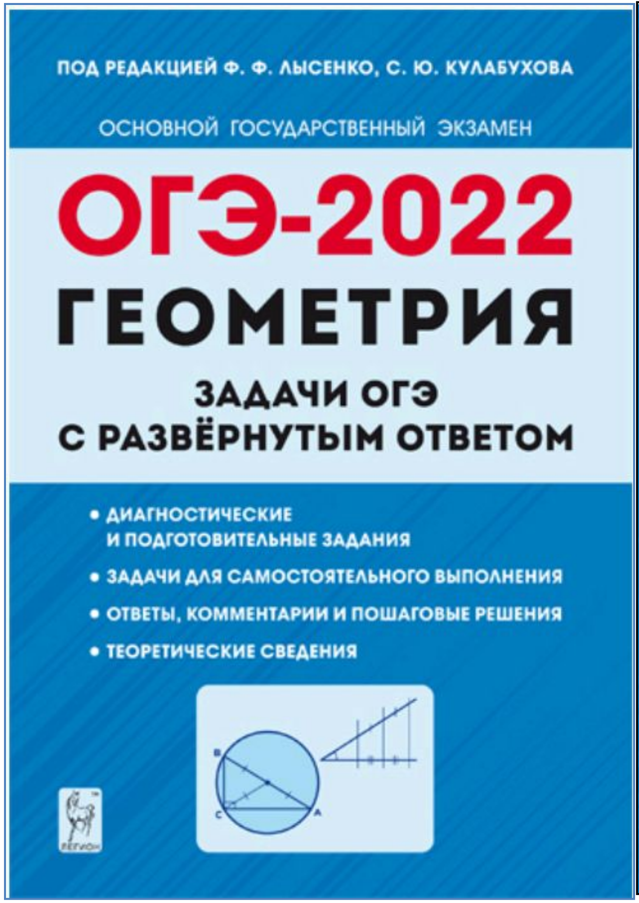
Кодификатор
элементов содержания по МАТЕМАТИКЕ
для составления контрольных измерительных материалов
для проведения единого государственного экзамена

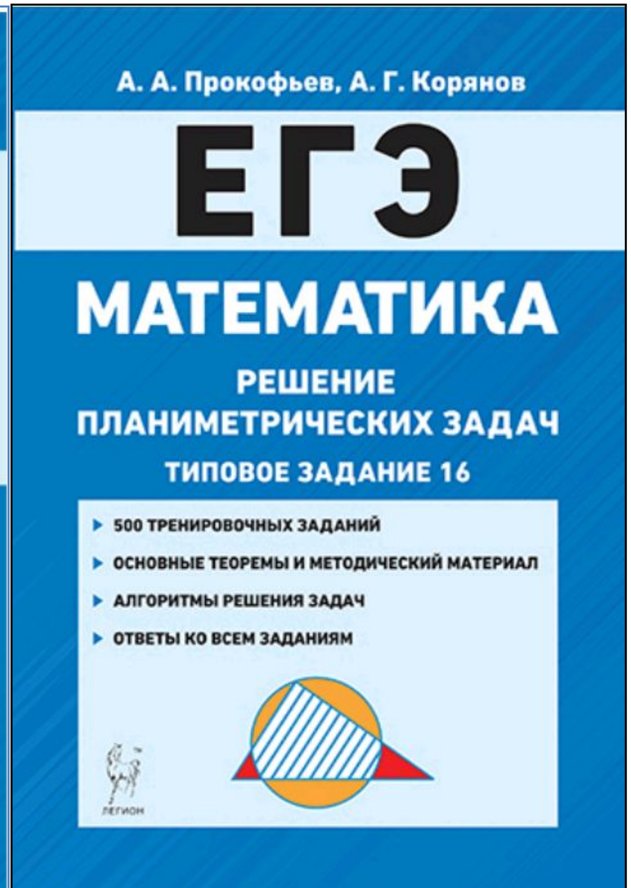
5		**Геометрия**
5.1		*Планиметрия*
	5.1.1	Треугольник
	5.1.2	Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат
	5.1.3	Трапеция
	5.1.4	Окружность и круг
	5.1.5	Окружность, вписанная в треугольник, и окружность, описанная около треугольника
	5.1.6	Многоугольник. Сумма углов выпуклого многоугольника
	5.1.7	Правильные многоугольники. Вписанная окружность и описанная окружность правильного многоугольника

Критерии оценивания задачи 16

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

Литература


ПОД РЕДАКЦИЕЙ Ф. Ф. ЛЫСЕНКО, С. Ю. КУЛАБУХОВА
ОСНОВНОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН
ОГЭ-2022
ГЕОМЕТРИЯ
ЗАДАЧИ ОГЭ
С РАЗВЁРНУТЫМ ОТВЕТОМ
• ДИАГНОСТИЧЕСКИЕ И ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ
• ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ВЫПОЛНЕНИЯ
• ОТВЕТЫ, КОММЕНТАРИИ И ПОШАГОВЫЕ РЕШЕНИЯ
• ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ


А. А. Прокофьев, А. Г. Корянов
ЕГЭ
МАТЕМАТИКА
РЕШЕНИЕ
ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ
ТИПОВОЕ ЗАДАНИЕ 16
500 ТРЕНИРОВОЧНЫХ ЗАДАНИЙ
ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ И МЕТОДИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ
АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
ОТВЕТЫ КО ВСЕМ ЗАДАНИЯМ
ЛЕГИОН

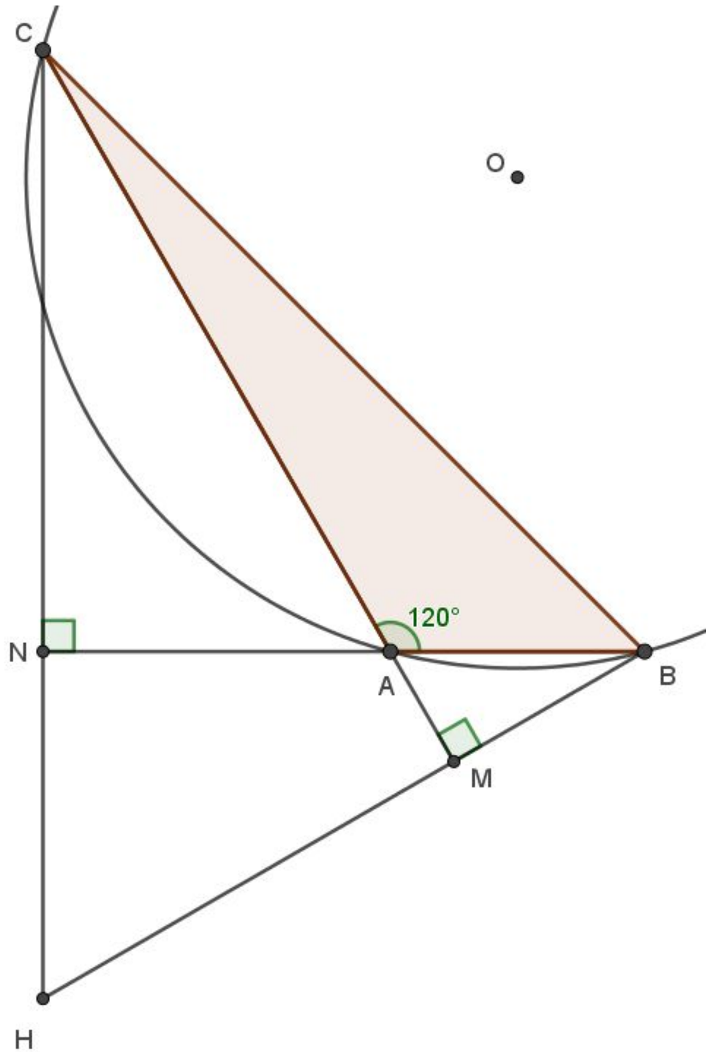

Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова
ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН
ЕГЭ-2022
МАТЕМАТИКА
ПРОФИЛЬНЫЙ
УРОВЕНЬ
40 ТРЕНИРОВОЧНЫХ ВАРИАНТОВ
ПО НОВОЙ ДЕМОВЕРСИИ 2022
ПОШАГОВОЕ РЕШЕНИЕ 10 ВАРИАНТОВ
СБОРНИК ЗАДАЧ
ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ СПРАВОЧНИК
ОТВЕТЫ КО ВСЕМ ВАРИАНТАМ И ЗАДАНИЯМ
f(x)
s
a
b
ЛЕГИОН

Примеры задач

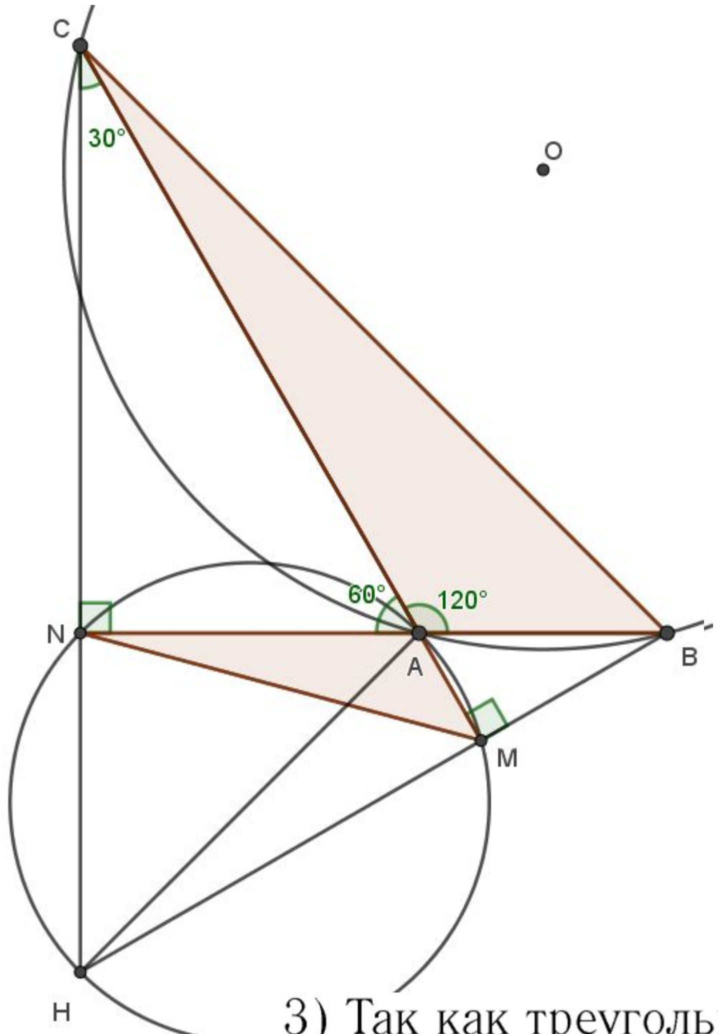
16 В треугольнике ABC угол A равен $120°$. Прямые, содержащие высоты BM и CN треугольника ABC, пересекаются в точке H. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC.

а) Докажите, что $AH = AO$.

б) Найдите площадь треугольника AHO, если $BC = \sqrt{15}$, $\angle ABC = 45°$.



Решение



а) 1) Так как угол BAN развёрнутый, то $\angle CAN = 180° - 120° = 60°$. Тогда в прямоугольном треугольнике CAN катет AN лежит против угла в $30°$.

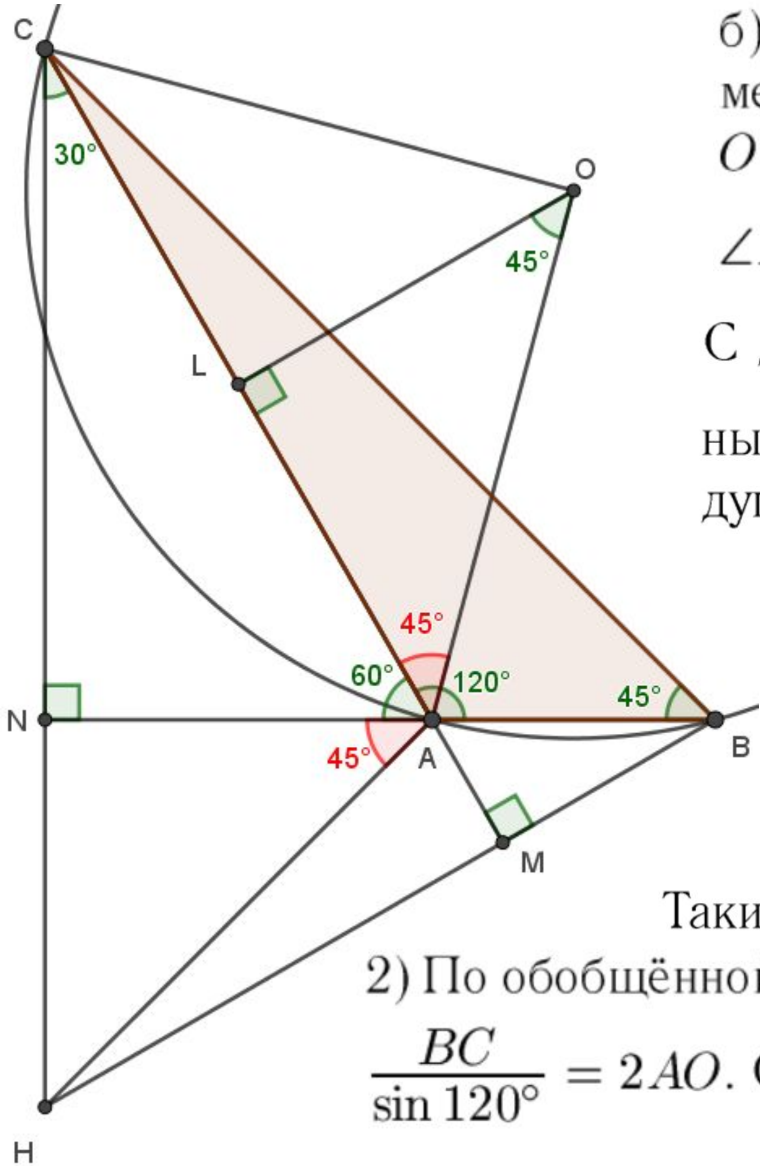
Значит, $AN = \frac{1}{2}AC$.

Аналогично, $AM = \frac{1}{2}AB$.

Следовательно, $\triangle ABC \sim \triangle AMN$ по двум сторонам и углу между ними ($\angle MAN$ и $\angle BAC$ вертикальные).

2) Так как отрезок AH из точек M и N виден под прямым углом, то точки A, N, H и M лежат на одной окружности диаметром AH.

3) Так как треугольники ABC и AMN подобны с коэффициентом 2, то радиус описанной окружности треугольника AMN в 2 раза меньше радиуса описанной окружности треугольника ABC. Следовательно, диаметр AH описанной окружности треугольника AMN равен радиусу AO описанной окружности треугольника ABC.



б) 1) Пусть L — середина AC. Так как OL — медиана равнобедренного треугольника AOC, то OL — высота и биссектриса $\triangle AOC$. Значит, $\angle AOL = \frac{1}{2}\angle AOC$.

С другой стороны, $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$ (вписанный и центральный углы, опирающиеся на одну дугу). Значит, $\angle AOL = \angle ABC = 45°$.

Так как треугольник AOL прямоугольный, то $\angle OAL = 45°$. $\triangle ANH = \triangle AOL$ по катету и гипотенузе ($AO = AH$, $AN = AL$, см. п. а). Отсюда $\angle HAN = \angle OAL = 45°$.

Таким образом, $\angle OAH = 45° + 60° + 45° = 150°$.

2) По обобщённой теореме синусов для треугольника ABC:

$$\frac{BC}{\sin 120°} = 2AO.\ \text{Отсюда}\ AO = \frac{BC}{2\sin 120°} = \frac{\sqrt{15}}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{5}.$$

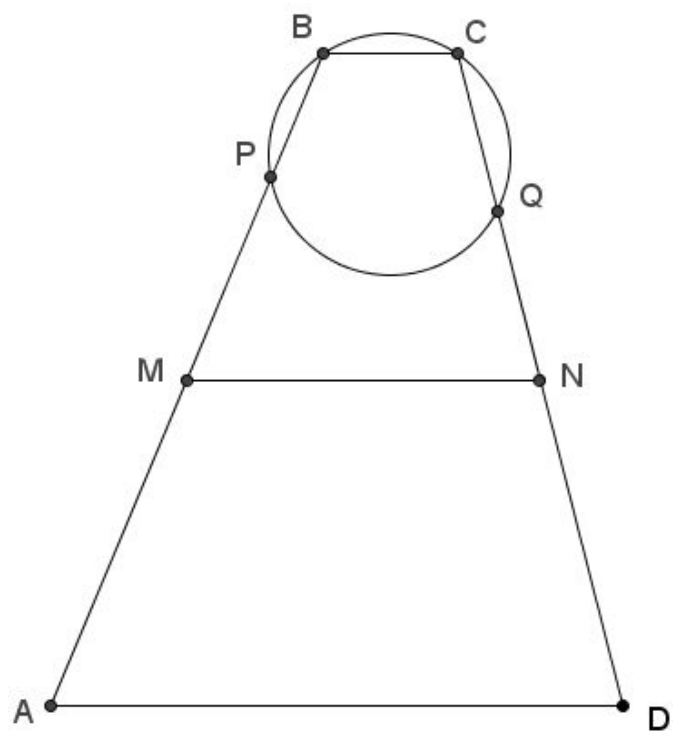
3) $S_{AHO} = \frac{1}{2}AH\cdot AO\sin\angle OAH = \frac{1}{2}AO^2\sin 150° = \frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{5}\right)^2\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{4}.$

Ответ: $\frac{5}{4}$.

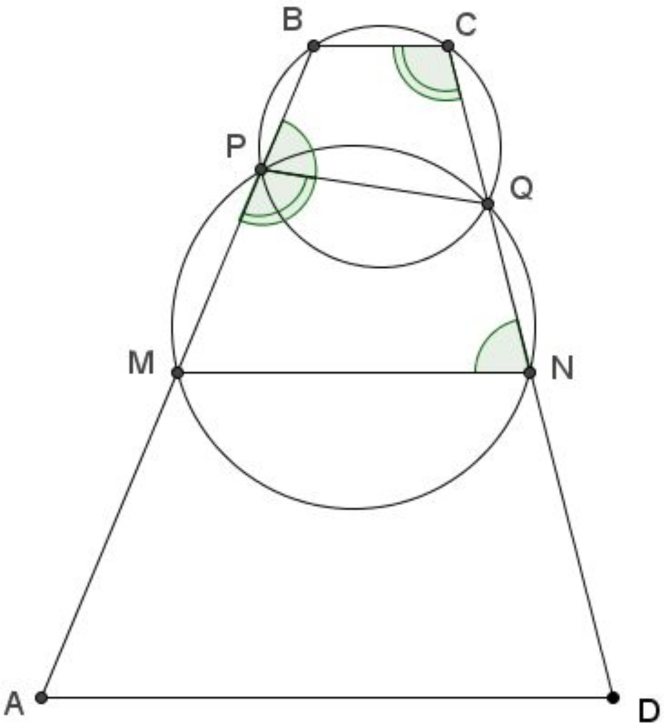
16 Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD. Точки M и N являются серединами сторон AB и CD соответственно. Окружность, проходящая через точки B и C, пересекает отрезки BM и CN в точках P и Q (отличных от концов отрезков) соответственно.

а) Докажите, что точки M, N, P и Q лежат на одной окружности.

б) Найдите QN, если отрезки DP и PC перпендикулярны, $AB = 21$, $BC = 4$, $CD = 20$, $AD = 17$.



Решение 1



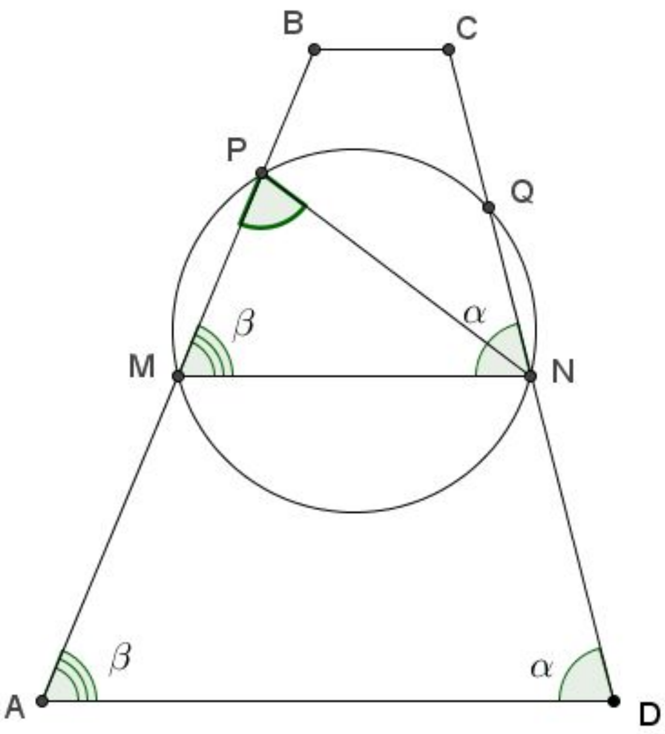
а) 1) Так как четырёхугольник $PBCQ$ вписан в окружность, то $\angle BPQ + \angle BCQ = 180°$.

Так как $\angle BPM$ развёрнутый, то $\angle BPQ + \angle QPM = 180°$. Следовательно, $\angle BCQ = \angle QPM$.

2) Так как MN — средняя линия трапеции $ABCD$, то $MN \parallel BC$ и $MBCN$ — тоже трапеция. Отсюда, $\angle MNQ + \angle BCQ = 180°$.

3) Так как $\angle BCQ = \angle QPM$, то $\angle MNQ + \angle QPM = 180°$. Так как в четырёхугольнике $MPQN$ сумма противоположных углов равна $180°$, то вокруг $MPQN$ можно описать окружность.

Решение 1 (продолжение)



б) 1) Пусть h — высота трапеции $ABCD$.

Тогда $\sin\alpha = \dfrac{h}{CD} = \dfrac{h}{20}$, $\sin\beta = \dfrac{h}{AB} = \dfrac{h}{21}$.

Отсюда, $\sin\alpha = \dfrac{21}{20}\sin\beta$.

2) Так как PN — медиана прямоугольного $\triangle CPD$, проведённая из вершины прямого угла, то $PN = \dfrac{1}{2}CD = 10$.

$MN = \dfrac{BC + AD}{2} = \dfrac{4+17}{2} = 10{,}5$ (MN — средняя линия $ABCD$).

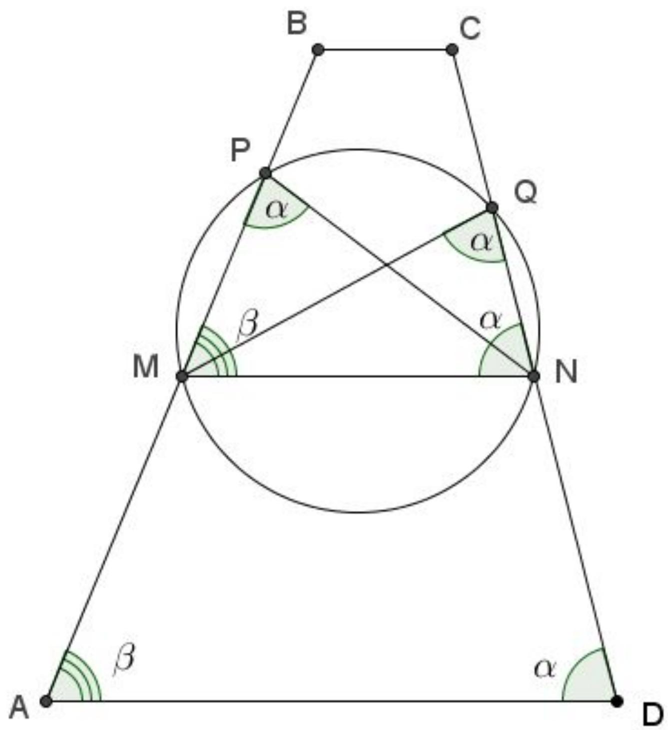
3) Так как $MN \parallel AD$, то $\angle MNC = \angle ADC = \alpha$ и $\angle BMN = \angle BAD = \beta$ как соответственные углы.

По теореме синусов для $\triangle MNP$:

$$\frac{MN}{\sin\angle MPN} = \frac{PN}{\sin\beta}.$$

Отсюда, $\sin\angle MPN = \dfrac{MN}{PN}\sin\beta = \dfrac{21}{20}\sin\beta.$

Решение 1 (продолжение)

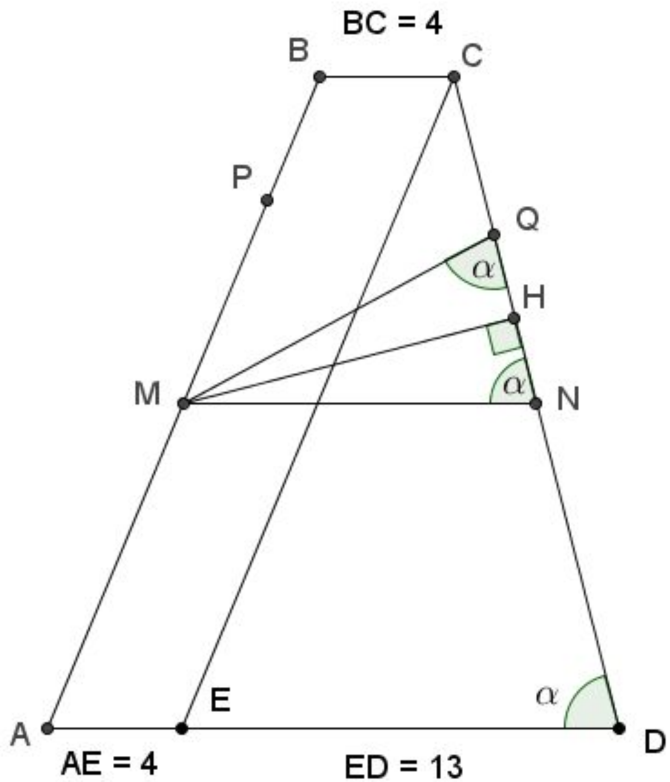


4) Из пунктов 1 и 3 следует, что $\sin \angle MPN = \sin \alpha$. Значит, $\angle MPN = \alpha$ или $\alpha + \angle MPN = 180°$.

5) Предположим, что $\alpha + \angle MPN = 180°$. Тогда точки A, P, N и D лежат на одной окружности. В пункте а) доказано, что точки M, P, Q и N лежат на одной окружности. Значит и точки A, P, Q и D тоже лежат на одной окружности, так как $MN \parallel AD$.
Отсюда следует, что точки Q и N совпадают, что противоречит условию.
Итак, $\angle MPN = \alpha$.

6) $\angle MPN = \angle MQN = \alpha$ как вписанные, опирающиеся на одну дугу. Следовательно, $\triangle MQN$ равнобедренный.

Решение 1 (окончание)



7) Пусть $CE \parallel AB$. Тогда по теореме косинусов для $\triangle CED$:

$CE^2 = CD^2 + ED^2 - 2 \cdot CD \cdot ED \cdot \cos\alpha$;

$21^2 = 20^2 + 13^2 - 2 \cdot 20 \cdot 13 \cdot \cos\alpha$;

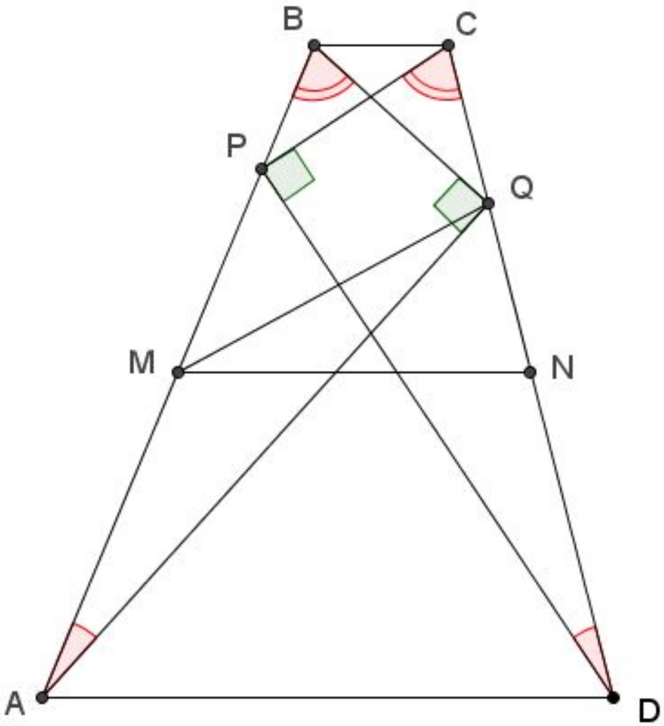
$\cos\alpha = \dfrac{16}{65}$.

8) Пусть MH — высота и медиана равнобедренного $\triangle MQN$. Тогда

$QN = 2NH = 2 \cdot MN \cdot \cos\alpha = 2 \cdot 10{,}5 \cdot \dfrac{16}{65} = \dfrac{336}{65}$.

Ответ: $\dfrac{336}{65}$.

Решение 2



а) См. решение 1.

б) 1) В пункте а) доказано, что точки M, P, Q и N лежат на одной окружности. Значит и точки A, P, Q и D тоже лежат на одной окружности, так как $MN \parallel AD$.

2) $\angle PBQ = \angle PCQ$ и $\angle PAQ = \angle PDQ$ как вписанные, опирающиеся на одну дугу.

Так как в $\triangle ABQ$ сумма острых углов равна $90°$, то этот треугольник прямоугольный.

3) Так как MQ — медиана прямоугольного $\triangle ABQ$, проведённая из вершины прямого угла, то $MQ = \dfrac{1}{2}AB = 10{,}5$.

$$MN = \frac{BC + AD}{2} = \frac{4 + 17}{2} = 10{,}5$$ (MN — средняя линия $ABCD$).

Таким образом, $\triangle MQN$ равнобедренный.

Далее аналогично пунктам 7 и 8 части б) решения 1.

Ответ: $\dfrac{336}{65}$.

Спасибо за внимание!