ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

«Транспортная задача»:

3.1. Постановка задачи, основные определения
3.2. Закрытая и открытая транспортная задача
3.3. Метод северо-западного угла
3.4. Метод минимального тарифа
3.5. Метод потенциалов

Постановка задачи, основные определения

Цель транспортной задачи

- разработка наиболее рациональных путей и способов транспортировки товаров, устранение чрезмерно дальних, встречных и повторных перевозок.

Исторические этапы исследований транспортной задачи

I этап. Задача национального плана перевозок, позволяющего минимизировать суммарный километраж в железнодорожных перевозках при наличии не более двух поставщиков

Толстой А. Н. Методы устранения нерациональных перевозок при планировании. - Социалистический транспорт, 1939, № 9.

II этап. Одну из разновидностей транспортной задачи в 1941 г. Поставил американец Хичкок. Детально разобрал **Тьяллинг Чарльз Купманс**, который работал членом Объединенного комитета перевозок во время Второй мировой войны.

III этап. Первый общий, законченный метод решения транспортной задачи («метод потенциалов») разработан **Леонидом Канторовичем**.

Канторович Л. В., Гавурин М. К., Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков, Сб. ст. Проблемы повышения эффективности работы транспорта, АН СССР, 1949

На практике существуют ***3 основные*** постановки транспортной задачи

1. Необходимо найти оптимальную структуру транспортных средств, обеспечивающую минимизацию издержек на транспортировку.

эксплуатационные и экономические показатели зависят от состава транспорта

На практике существуют ***3 основные*** постановки транспортной задачи

2. Необходимо установить такое распределение грузов между имеющимися в хозяйстве видами транспорта, при котором затраты на перевозки всего объёма грузов были бы минимальными

эффективность использования различного транспорта на одной и той же работе не всегда одинакова

На практике существуют ***3 основные*** постановки транспортной задачи

3. Задача прикрепления потребителей к поставщикам

экономичный план перевозок однородного груза из пункта производства в пункты потребления


минимум денежно-материальных затрат на перевозки
1.
Критерии оптимизации транспортной задачи
минимум приведенных затрат
4.
2.
минимум затрат времени на перевозки
3.
минимум объёма транспортных работ

Содержательная постановка задачи

Однородный продукт, сосредоточенный в m пунктах отправления в количествах $a_1, a_2, \dots a_m$ единиц соответственно, необходимо доставить в каждый из n пунктов назначения в количествах $b_1, b_2, \dots b_n$ единиц соответственно.

Стоимость (расстояние) перевозки единицы продукта из ***i-го*** пункта отправления в ***j-й*** пункт назначения равна c_{ij} *(стоимость доставки)* и известна для каждого маршрута.

Пусть x_{ij} – количество продукта, перевозимого из ***i-го*** пункта отправления в ***j-й*** пункт назначения.

Задача заключается в определении таких величин x_{ij} для всех маршрутов, при которых суммарная стоимость или расстояние перевозок были бы минимальными.

Математическая постановка транспортной задачи

Обозначения

m – количество пунктов отправления (поставщиков);
i – номер поставщика;
n – количество пунктов назначения (потребителей);
j – номер потребителя;
a_i – объем однородного груза i-го поставщика (запасы);
b_i – объем однородного груза, требуемого j-ому потребителю (спрос);
c_{ij} – стоимость доставки единицы груза i-го поставщика j-ому потребителю;
x_{ij} – количество груза, доставляемое от i-го поставщика к j-му потребителю;
C – общие затраты на перевозки.

потребители

поставщики

Потреб. Поставщ.	**1**	**…**	**j**	**…**	**n**	**Запас**
1	c_{11} x_{11}	…	c_{1j} x_{1j}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
…	…	…	…	…	…	…
i	c_{i1} x_{i1}	…	c_{ij} x_{ij}	…	c_{in} x_{in}	a_i
…	…	…	…	…	…	…
m	c_{m1} x_{m1}	…	c_{mj} x_{mj}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Спрос	b_1	…	b_j	…	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a = \sum_{j=1}^{n} b$

стоимость доставки единицы груза от *i-го* поставщика к *j-ому* потребителю

Стоимость перевозок можно выразить так

$$C = c_{11}x_{11} + \dots + c_{ij}x_{ij} + \dots + c_{mn}x_{mn} \to min$$

или более компактно

$$C = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to min$$

это **целевая функция**, которая позволяет определить численное значение критерия оптимальности на всех этапах расчетов и в оптимальном плане

Необходимо найти минимальное значение целевой функции при следующих возможных условиях

1 условие. Вывоз всего груза от каждого поставщика:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$$ где $i = 1 \ldots n$

2 условие. Удовлетворение спроса каждого потребителя:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$$ где $j = 1 \ldots m$

3 условие. Равенство запаса и спроса:

Равенство запаса и спроса есть необходимое и достаточное условие совместимости и, следовательно, <u>разрешимости транспортной задачи</u>.

Типы транспортных задач

Закрытая модель транспортной задачи

Спрос равен запасу

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Открытая модель транспортной задачи

Спрос не равен запасу

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

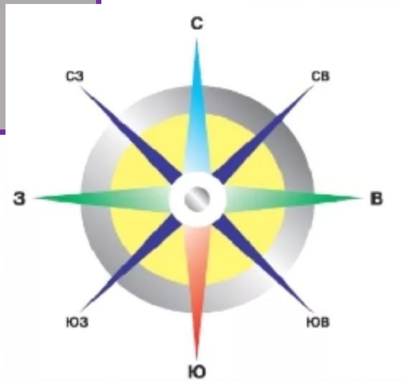
Открытая модель транспортной задачи

1. **Запас превышает спрос** $$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

2. **Спрос превышает запас** $$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Метод «северо-западного угла»

Метод «северо-западного угла» состоит в последовательном переборе строк и столбцов транспортной таблицы, начиная с левого столбца и верхней строки



Метод был предложен в 1951 г. Данцигом и назван Чарнесом и Купером «правилом северо-западного угла»

Метод минимального тарифа

<u>***Метод минимального тарифа***</u> учитывает величины затрат на грузоперевозки, позволяет найти опорный план транспортной задачи, при котором общая стоимость перевозок груза меньше, чем стоимость перевозок при плане северо-западного угла

Метод потенциалов - процесс последовательного улучшения исходного плана грузоперевозок до оптимального

Автор метода: Л. В. Канторович 1949 год

Метод потенциалов

Теорема:

Если для некоторого плана транспортной задачи можно набрать систему из $m+n$ чисел u_i, называемых потенциалами поставщика и v_j, называемыми потенциалами потребителя, удовлетворяющим условиям

$v_j - u_i = c_{ij}$, если $x_{ij} > 0$

$v_j - u_i \leq c_{ij}$, если $x_{ij} = 0$,

то план оптимальный.

Метод потенциалов

Экономический смысл выражения

$\mathbf{v}_j - u_i = c_{ij}$, если $x_{ij} > 0$

Для поставщиков и потребителей, между которыми запланированы перевозки, разность потенциалов совпадает с затратами на транспортировку единицы груза.

Метод потенциалов

Экономический смысл выражения

$v_j - u_i \leq c_{ij}$, если $x_{ij} = 0$

Для всех остальных пар поставщиков и покупателей, между которыми перевозки не запланированы, разности потенциалов не превосходят затраты по транспортировке.

Метод потенциалов

Если план перевозок *оптимален*, то можно присвоить грузам в пунктах отправления и пунктах назначения потенциалы при которых перевозка из любого пункта отправления в любой пункт назначения не могла дать «прибыль», и чтобы в то же время перевозки, внесенные в план, являлись безубыточными

Экономический смысл потенциалов