练习

1、设 $y=y(x)$由方程 $\cos(y+1)+x^2+y=0$ 确定，求 y'.

2、设 $x=t-\ln(1+t)$，$y=t^2$，求 $\frac{dy}{dx}$.

第五节　函数的微分

一、微分的定义

二、微分的计算

学习重点:了解微分的定义，掌握函数微分的计算方法

★ 微分学所要解决的两类问题:

- 函数的变化率问题 → 导数的概念
- 函数的增量问题 → 微分的概念

求导数与微分的方法, 称为 <u>微分法.</u>

研究微分法、导数理论及其应用的科学,称为<u>微分学.</u>

引例 半径为 x 厘米的金属圆片加热后，半径增加了 Δx 厘米，问面积增大了多少？

分析: 所求为

Δx 的高阶无穷小

$$\pi(x+\Delta x)^2-\pi x^2=2\pi x\Delta x+\pi\Delta x^2$$

$$\approx 2\pi x\Delta x$$

一、微分的定义(理解)

定义: 若函数 $y=f(x)$ 可导，则

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

$$= f'(x)\cdot\Delta x + o(\Delta x)$$

此时称函数 $y=f(x)$ 在点 x 处**可微**,

$f'(x)\Delta x$ 为函数的**微分**,

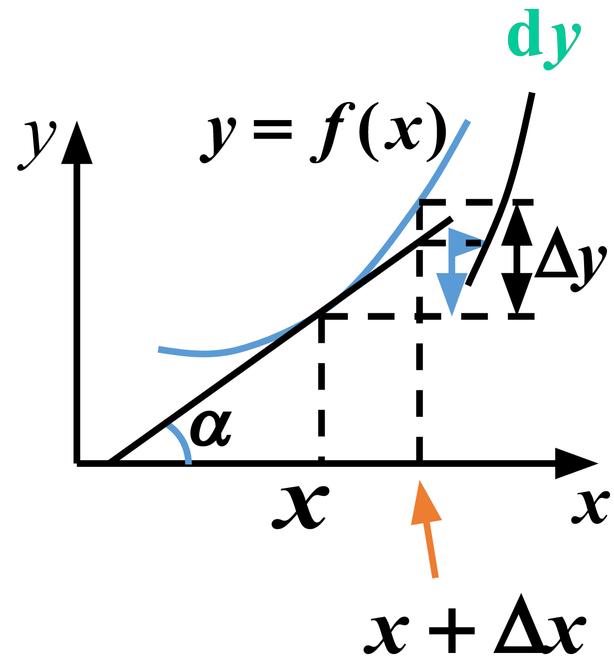
记作 $dy = f'(x)dx.$ **(重要结论)**

注：（1）可微⇔可导　（2）$\Delta y \approx \mathrm{d}y$

了解微分的几何意义

$$\mathrm{d}y = f'(x)\Delta x \quad = \tan\alpha \cdot \Delta x$$

$$\Delta y \approx \mathrm{d}y$$



★ 导数与微分的区别:

几何上:导数是曲线切线的斜率(数)

而微分是曲线切线的纵坐标增量（Δx 的函数）

二、微分的计算 (掌握)

计算方法 1： $\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$

基本初等函数的微分公式(记忆)

$\mathrm{d}(C) = 0$

$\mathrm{d}(x^{\mu}) = \mu x^{\mu-1}\mathrm{d}x$

$\mathrm{d}(\sin x) = \cos x\mathrm{d}x$

$\mathrm{d}(\cos x) = -\sin x\mathrm{d}x$

$\mathrm{d}(\tan x) = \sec^2 x\mathrm{d}x$

$\mathrm{d}(e^x) = e^x\mathrm{d}x$

$$\mathrm{d}(\ln x) = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

计算方法2:利用微分运算法则

1. $\mathrm{d}(u \pm v) = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v$

2. $\mathrm{d}(Cu) = C\mathrm{d}u$ （C 为常数)

3. $\mathrm{d}(uv) = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v$

4. $\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{v^2} \quad (v \neq 0)$

5. 微分的形式不变性： $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$

公式中 x 可以替换为任意的函数.

例1 求微分： $\mathrm{d}(\sin x^2)$.

解 $\because \ (\sin x^2)' = 2x\cos x^2,$

$$\therefore \quad \mathrm{d}(\sin x^2) = 2x\cos x^2\mathrm{d}x.$$

说明: 还可以用微分的形式不变性求解.

$$\mathrm{d}(\sin x^2) = \cos x^2 dx^2 = 2x\cos x^2\mathrm{d}x.$$

练习

1. $\mathrm{d}(\arctan e^{-x})$.

2. $\dfrac{\mathrm{d}\tan x}{\mathrm{d}\sin x}$.

3. $\mathrm{d}(\cos 2x)$.

例 2　$y = e^{x}\cos x$, 求 $\mathrm{d}y$.

解法1　$\mathrm{d}y = \cos x \cdot \mathrm{d}(e^{x}) + e^{x} \cdot \mathrm{d}(\cos x)$

微分运算

$$= \cos x \cdot e^{x}\mathrm{d}x + e^{x} \cdot (-\sin x)\mathrm{d}x$$

$$= e^{x}(\cos x - \sin x)\mathrm{d}x.$$

解法2　∵ $\left(e^{x}\cos x\right)' = e^{x}\cos x - e^{x}\sin x$

求导

$$\therefore\ \mathrm{d}y = e^{x}(\cos x - \sin x)\mathrm{d}x.$$

练习

1 $y=\ln(1+e^{x})$, $\mathrm{d}y$.

2 $y=\arcsin(x^{2})$, $\mathrm{d}y$.

3 $y=\cos(1+3x)e^{2x}$, $\mathrm{d}y$.

补充. $y=y(x)$ 由方程 $x^3+y^3-\sin 3x+6y=0$ 确定,

求 $\mathrm{d}y$.

提示: 方程两边求微分, 得

$$3x^2\,\mathrm{d}x+3y^2\,\mathrm{d}y-3\cos 3x\,\mathrm{d}x+6\,\mathrm{d}y=0$$

由上式可解方程得出 $\mathrm{d}y$.

内容小结

1. 微分定义

- 微分的定义及几何意义
- 可微 $\rightleftharpoons$ 可导

2. 微分的计算

1、直接求导.(利用 $\mathrm{d}f(x) = f'(x)\mathrm{d}x$)

2、利用微分的运算法则.

3. 微分的应用 近似计算 $\Delta y \approx dy$