

# Вращательное движение

доцент  
каф. «Физика»  
Пор্তнов  
Владимир  
Иосифович



# Векторное произведение векторов

Свойства векторного произведения

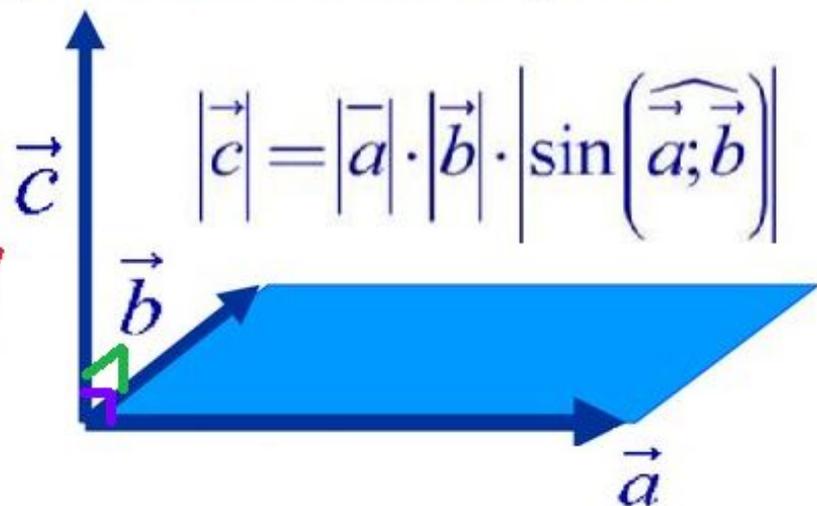
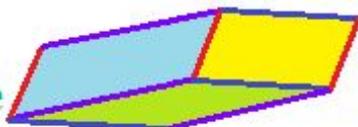
$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{g}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{g}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \quad \vec{a} \times \vec{a} = 0$$

Смешанное произведение

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{g}) = \vec{g} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{g} \times \vec{a})$$

объём параллелепипеда, образованного правой тройкой векторов (левая даст минус)

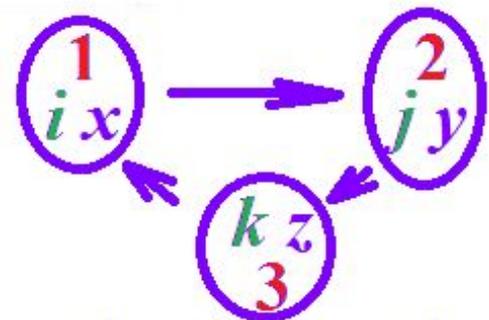


Двойное векторное произведение БАЦ минус ЦАБ

$$[\vec{a} \times [\vec{b} \times \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

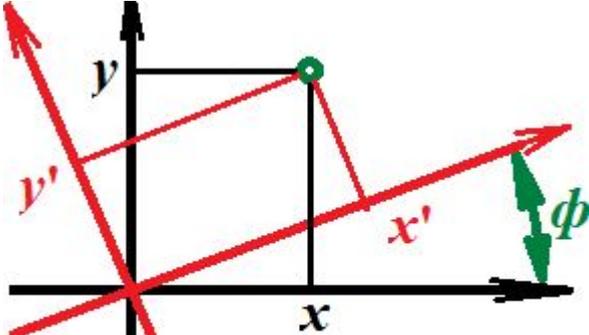
$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$



$$= (a_2 b_3 - b_2 a_3; a_3 b_1 - b_3 a_1; a_1 b_2 - b_1 a_2)$$

# Поворот и вращение

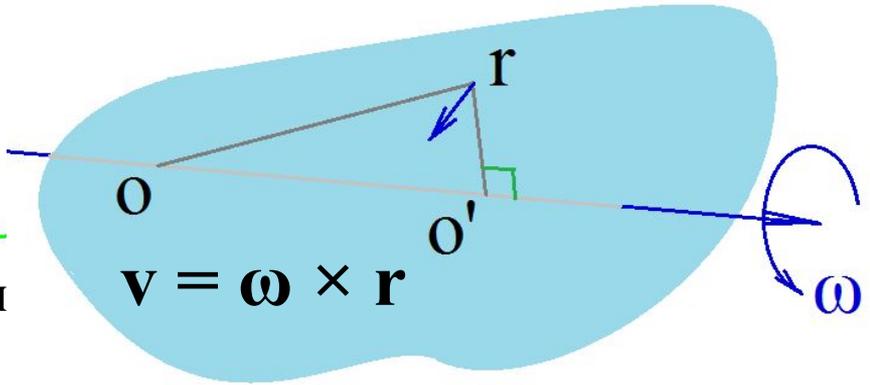
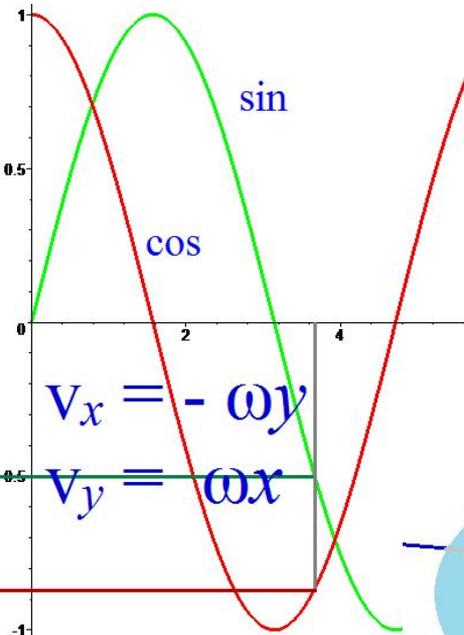
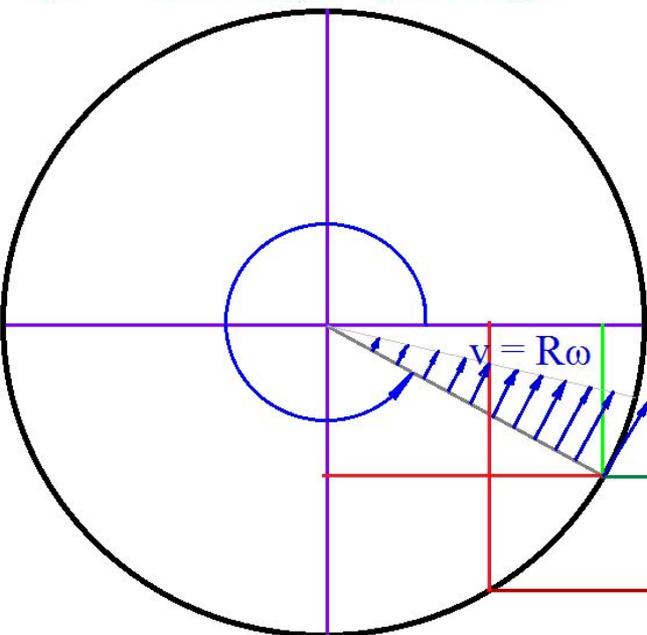
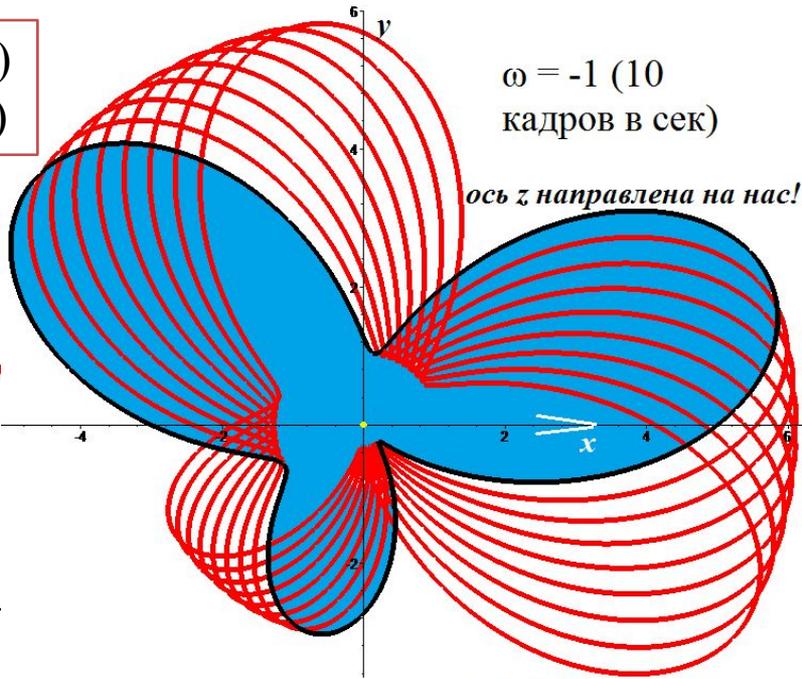


$$x' = x \cos \phi + y \sin \phi$$

$$y' = x \sin \phi - y \cos \phi$$

$$[\cos(\omega t)]' = -\omega \sin(\omega t)$$

$$[\sin(\omega t)]' = \omega \cos(\omega t)$$



## Виды мгновенного движения твёрдых тел

1. Поступательное
2. Вращательное
3. Винтовое

Теорема о мгновенной оси вращения

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{k}\boldsymbol{\omega}$$

Для плоского движения твёрдого тела есть ещё и мгновенная ось для ускорения:  $\mathbf{a} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} - k_a \mathbf{r}$

# Вращающаяся система отсчёта

Для любого вектора его истинное изменение во вращающейся системе отсчёта равно:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{u}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

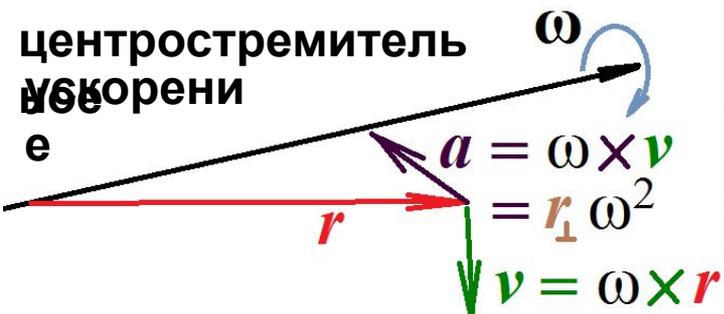
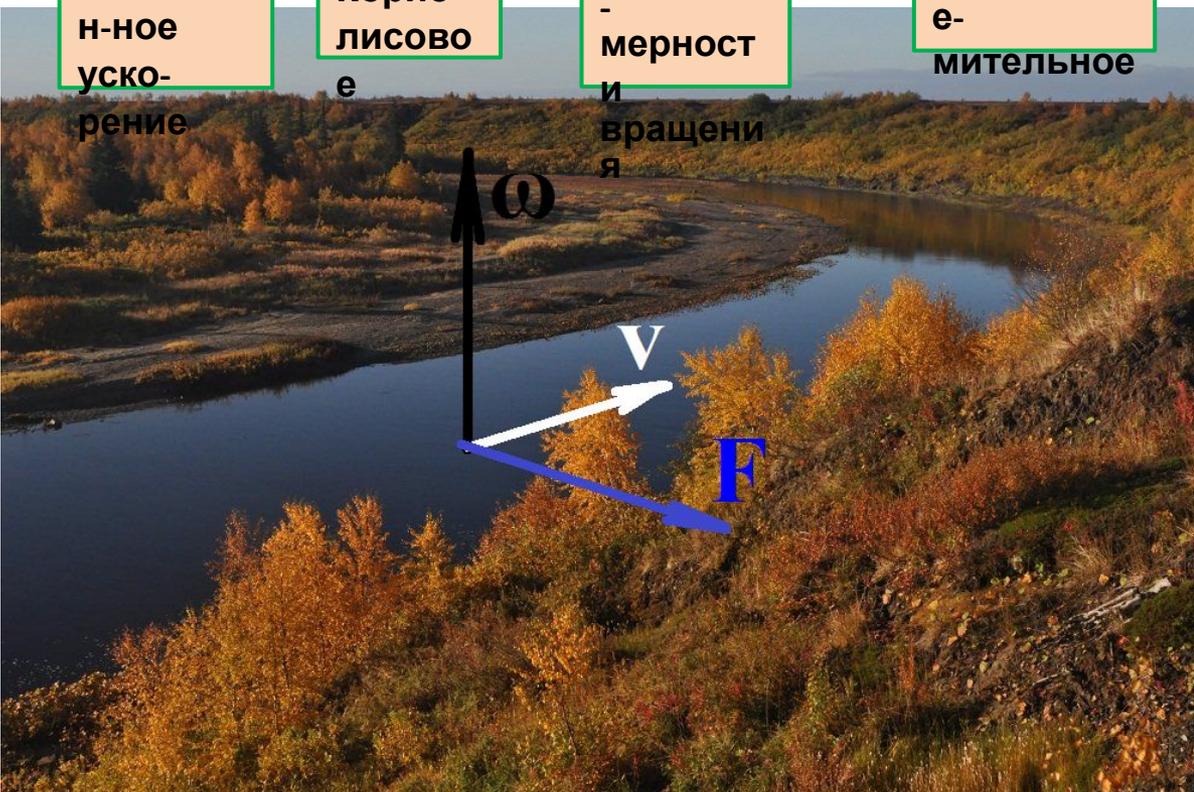
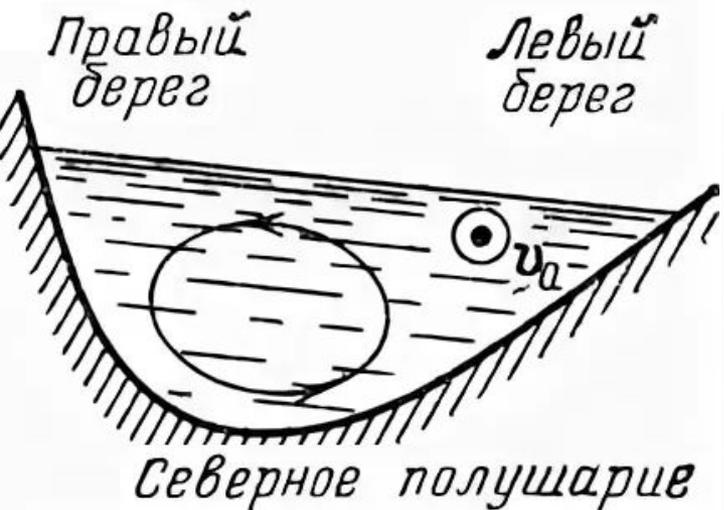
$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial t^2} + 2\vec{\omega} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]$$

Собственное ускорение

Кориолисово е

Неравномерность вращения

Центростремительное



Влияние кориолисовой силы инерции на берега

# Динамика вращательного

## движения

- Уравнение Ньютона  $\vec{F} = m\vec{a}$
- $d/dt [\vec{r} \times \vec{v}] = [\vec{r} \times \vec{a}]$  (т.к.  $[\vec{v} \times \vec{v}] = \mathbf{0}$ )
- Момент импульса системы  $\vec{L} = \sum m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$
- $d\vec{L}/dt = \sum m_i \vec{r}_i \times \vec{a}_i = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum \vec{M}_i$
- Твёрдое тело:  $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i \Rightarrow$
- $\vec{L} = \sum m_i (\vec{\omega} r_i^2 - \vec{r}_i(\vec{\omega} \vec{r}_i))$
- легко записать для  $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$ :
- $= \omega \sum m_i (-x_i z_i, -y_i z_i, x_i^2 + y_i^2)$
- Если тело плоское ( $z_i = 0$ ), то  $L = \omega \sum m_i r_i^2 = I\omega$
- Теорема о главных осях:  $\vec{L} = (I_{xx}\omega_x, I_{yy}\omega_y, I_{zz}\omega_z)$