Тема 1. Введение в математический анализ

1.1 Функции и способы их задания

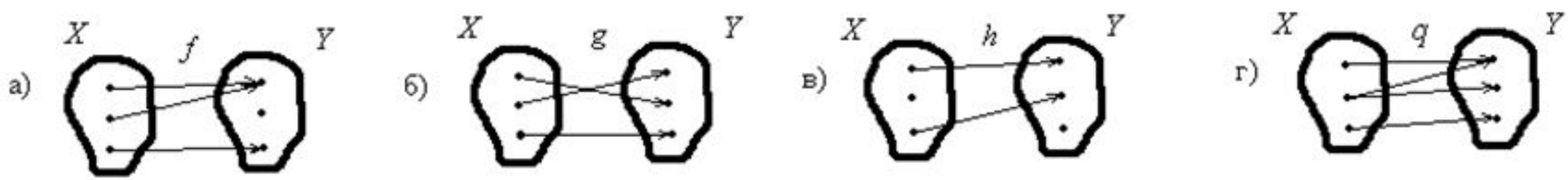
УЧЕБНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Функция.
2. Параметрический способ задания функции.
3. Полярные координаты.

I. Функция.

а) Определение и способы задания.

Определение: Пусть даны два множества X и Y (непустых). Соответствие f, которое каждому элементу $x \in X$ сопоставляет один и только один элемент $y \in Y$ называется *функцией* и записывается $y = f(x)$ или $f: X \to Y$ (говорят еще, что функция f отображает множество X на множество Y).



а), б) – функции; в), г) – нет

Множество X называется *областью определения функции* и обозначается $D(f)$; множество всех $y \in Y$ называется *множеством значений функции* и обозначается $E(f)$.

Переменная x называется *аргументом* или независимой переменной, а y – *значением функции* (функцией) или зависимой переменной (от x).

Способы задания функции:

Аналитический способ: функция задается в виде одной или нескольких формул или уравнений.

Графический способ: задается график функции.

Графиком функции $y(x)$ называется множество всех точек Oxy, абсциссами которых являются аргументы ($x \in X$), а ординатами – соответствующие им значения функции.

Табличный способ: функция задается таблицей ряда значений аргумента и соответствующих значений функции.

б) Основные характеристики.

1) Функция $y(x)$ называется *четной*, если для любого $x \in D$ выполняется условие $y(-x) = y(x)$ ($-x \in D$). График четной функции симметричен относительно оси Oy.

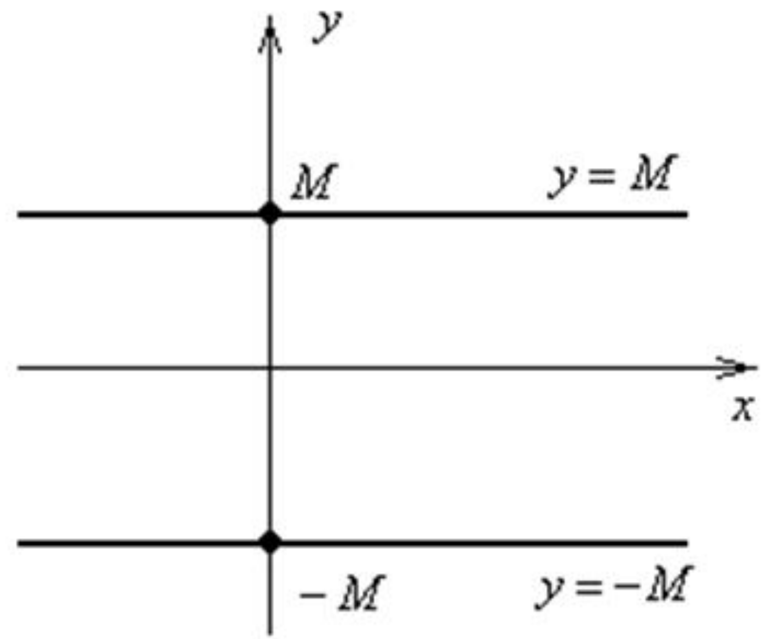
Функция $y(x)$ называется *нечетной*, если для любого $x \in D$ выполняется условие $y(-x) = -y(x)$. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

2) Функция $y(x)$ называется *возрастающей*, если для любых $x_1, x_2 \in D$ таких, что $x_1 > x_2$ выполняется неравенство $y(x_1) > y(x_2)$ (т.е. большему значению аргумента соответствует большее значение функции). На график линия слева направо направлена снизу вверх.

Функция $y(x)$ называется *убывающей*, если для любых $x_1, x_2 \in D$ таких, что $x_1 > x_2$ выполняется неравенство $y(x_1) < y(x_2)$ (т.е. большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции). График идет сверху вниз.

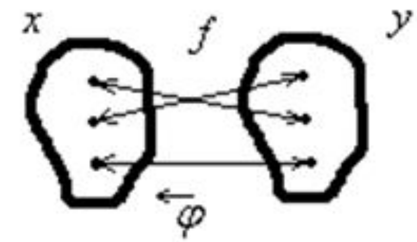
Эти функции называются *монотонными*. Интервалы, в которых функция монотонна называются *интервалами монотонности*.

3) Функция $y(x)$ называется *ограниченной*, если существует такое число $M > 0$, что для всех $x \in D$ выполняется неравенство $|f(x)| \le M$. Следовательно, график функции лежит между прямыми $y = M$ и $y = -M$.



4) Функция $y(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $T > 0$, что для всех $x \in D$ $\quad y(x+T) = y(x)$ (если $x + T \in D$). При этом число T называется *периодом* функции.

в) Обратная и сложная функции.



Пусть задана функция $y = f(x)$ с областью определения D и множеством значений E. Если любому значению y, принадлежащему E соответствует единственное значение $x \in D$, то определена функция $x = \varphi(y)$ с областью определения E и множеством значений D. Такая функция $\varphi(y)$ называется *обратной* к функции $f(x)$ и записывается $x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$. Про функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ говорят, что они являются взаимно обратными.

Пусть функция $y = f(u)$ определена на множестве D, а функция $u = \varphi(x)$ в свою очередь на множестве D_1. Тогда на множестве D_1 определена функция $y = f(\varphi(x))$, которая называется *сложной функцией* от x. Переменную $u = \varphi(x)$ называют *промежуточным аргументом*.

г) Основные элементарные функции.

Простейшие элементарные функции:

– постоянная функция $f(x)=c$ $(c=const)$,

– степенная x^{α} $(\alpha\in R)$,

– показательная a^{x} $(a>0,\ a\neq 1)$,

– логарифмическая $\log_{a}x$ $(a>0,\ a\neq 1)$,

– тригонометрические $(\sin x,\ \cos x,\ tg x,\ ctg x)$,

– обратные тригонометрические функции $(\arcsin x$, $\arccos x$, $arctg x$, $arcctg x)$.

Все функции, получаемые с помощью арифметических действий над простейшими элементарными функциями, суперпозицией этих функций, составляют класс *элементарных функций*.

1) Функция вида $P(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m$ ($m\geq 0$, целое; $a_0\neq 0$, $a_1,\ldots,a_m$ – числа) называется *целой рациональной функцией* или *алгебраическим многочленом степени* m. Многочлен первой степени называется также линейной функцией.

2) Функция, представляющая собой отношение двух целых рациональных функций

$$R(x)=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}x+b_n}$$

называется *дробно-рациональной функцией.* Совокупность целых рациональных и дробно-рациональных функций образует класс рациональных функций.

3) Функция, полученная с помощью арифметических действий и суперпозиций над степенными функциями, не являющаяся рациональной, называется *иррациональной функцией*.

4) Всякая функция, не являющаяся рациональной или иррациональной называется *трансцендентной*.

II. Параметрический способ задания функции.

Определение: Параметрической функцией называется функция, у которой каждый аргумент зависит от некоторого параметра, либо от нескольких параметров.

Общий вид параметрической функции от одного параметра с двумя аргументами:

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, где x и y – координаты произвольной точки M, лежащей на данной линии, а t – переменная, называемая параметром (он определяет положение т. (x, y) на плоскости).

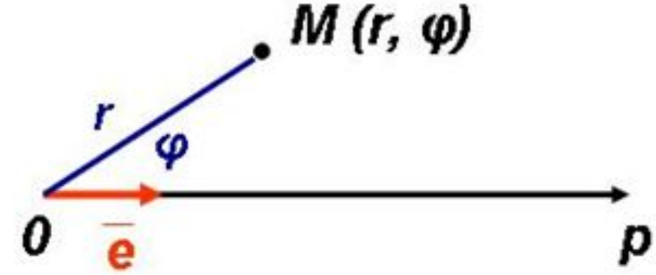
Определение: Неявной функцией от двух переменных называется функция вида $F(x, y) = 0$, т.е. мы не можем выразить явным образом одну из переменных функции с помощью другой переменной, но мы знаем зависимость между этими переменными.

III. Полярные координаты.

Под системой координат на плоскости понимают способ, позволяющий численно описать положение точки на плоскости.

Прямоугольная (декартова) система координат – каждой точке на плоскости ставилась в соответствие пара чисел x и y, называемая ее *координатами*.

Полярная система координат задается точкой O, называемой *полюсом*, лучом Op, называемым *полярной осью* и единичным вектором $\bar{e}$ того же направления, что и луч Op.



Положение произвольной точки M определяется двумя числами: ее расстоянием r от полюса и углом φ, образованным отрезком OM с полярной осью (направление против часовой стрелки считается положительным).

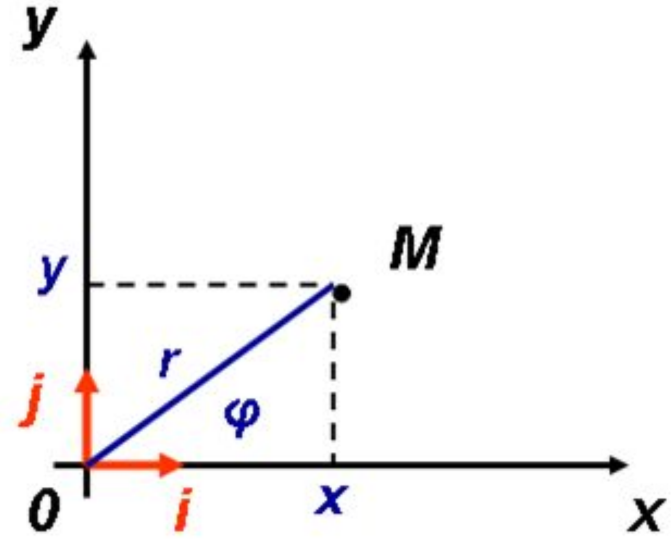
Числа r и φ называются полярными координатами точки M (*полярный радиус* и *полярный угол*).

Обозначение: $M(r,\varphi)$.

Связь между прямоугольной и полярной системой координат:

Пусть $(x;y)$ – прямоугольные, $(r;\varphi)$ – полярные координаты точки M, тогда

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\varphi = y/x \end{cases}.$$



Определяя величину φ, следует установить четверть, в которой лежит этот угол и учесть, что $0 \le \varphi < 2\pi$ (или $-\pi < \varphi \le \pi$).