Раздел 6. Дифференциальные уравнения 2 порядка

План

1) Линейные однородные дифференциальные уравнения 2 порядка с постоянными коэффициентами.
2) Линейные неоднородные уравнения 2 порядка с постоянными коэффициентами.

П.1 Линейные однородные дифференциальные уравнения 2 порядка с постоянными коэффициентами

Определение. *Дифференциальное уравнение вида*

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x), \tag{27}$$

где коэффициенты $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ *и свободный член* $b(x)$- *заданные функции аргумента* x, *называется линейным дифференциальным уравнением второго порядка. Если* $b(x) \equiv 0$, *то линейное уравнение (27) принимает вид:* $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$, *и оно называется однородным, в противном случае - неоднородным.*

Рассмотрим частный случай линейных уравнений второго порядка, когда коэффициенты уравнения постоянны, т.е. являются числами. Такие уравнения называются *уравнениями с постоянными коэффициентами*. Этот вид уравнений находит особенно широкое применение.

Рассмотрим уравнение $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, в котором a_0, a_1, a_2 - коэффициенты, являющиеся действительными числами; полагая, что $a_0 \neq 0$, деля все члены уравнения на a_0 и обозначая $\frac{a_1}{a_0} = p$, $\frac{a_2}{a_0} = q$, запишем данное уравнение в виде

$$y'' + py' + qy = 0. \qquad (28)$$

Для решения данного вида уравнения достаточно заменить в дифференциальном уравнении (28) производные y'', y' и функцию y заменить на соответствующие степени величины k, рассматривая при этом функцию y как производную нулевого порядка:

$$k^2 + pk + q = 0. \qquad (29)$$

Квадратное уравнение (29), из которого определяется число k, называется *характеристическим уравнением* данного линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (28).

Характеристическое уравнение (29) есть квадратное уравнение, имеющее два корня: обозначим их через k_1 и k_2. При этом

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\,; \qquad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\,.$$

При нахождении k_1 и k_2 возможны следующие случаи:

I. k_1 и k_2 - действительные и притом не равные между собой числа $(k_1 \neq k_2)$;

II. k_1 и k_2 - действительные равные числа $(k_1 = k_2)$;

III. k_1 и k_2 - комплексно-сопряженные числа.

Методы решения. Рассмотрим каждый случай отдельно.

I. Корни характеристического уравнения действительны и различны $k_1 \neq k_2$.

В этом случае общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \tag{30}$$

где C_1 и C_2 - произвольные постоянные.

II. Корни характеристического уравнения действительные и равные $k_1 = k_2$. В этом случае общее решение имеет вид

$$y = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x). \tag{31}$$

где C_1 и C_2 - произвольные постоянные.

III. Корни характеристического уравнения комплексно-сопряженные[1]. Таким образом $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$, тогда общее решение будет иметь вид

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x), \quad \text{где} \quad \alpha = -\frac{p}{2}; \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}; \tag{32}$$

C_1 и C_2 - произвольные постоянные.

Методы решения. Рассмотрим каждый случай отдельно.

I. Корни характеристического уравнения действительны и различны $k_1 \neq k_2$.

В этом случае общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \qquad (13)$$

где C_1 и C_2 - произвольные постоянные.

ПРИМЕР 5. Решить уравнение $y'' + y' - 2y = 0$.

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2 + k - 2 = 0.$$

Находим корни характеристического уравнения:

$$k_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}; \qquad k_1 = 1, \quad k_2 = -2.$$

Поэтому, согласно формуле (13), общее решение

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}.$$

II. Корни характеристического уравнения действительные и равные $k_1 = k_2$. В этом случае общее решение имеет вид

$$y = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x). \tag{14}$$

где C_1 и C_2 - произвольные постоянные.

ПРИМЕР 6. Решить уравнение $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Р е ш е н и е. Характеристическое уравнение

$$k^2 - 4k + 4 = 0$$

имеет корни $k_1 = k_2 = 2$. Тогда, по формуле (14), общее решение имеет вид

$$y = e^{2x}(C_1 + C_2 x).$$

III. Корни характеристического уравнения комплексно-сопряженные[1]. Таким образом $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$, тогда общее решение будет иметь вид

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x), \quad \text{где} \quad \alpha = -\frac{p}{2}; \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}; \quad (15)$$

C_1 и C_2 - произвольные постоянные.

ПРИМЕР 7. Решить уравнение $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Р е ш е н и е. Составим характеристическое уравнение

$$k^2 + 2k + 5 = 0$$

и найдем его корни:

$$k_1 = -1 + 2i, \quad k_2 = -1 - 2i.$$

Следовательно, применив формулу (15), общее решение есть

$$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

Для удобства нахождения общего решения все три случая можно свести к одной схеме, в зависимости от вида корней характеристического уравнения.

$$y'' + py' + qy = 0$$

$$\downarrow$$

$$k^2 + pk + q = 0$$

$$k_1 \neq k_2,$$

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

$$k_1 = k_2,$$

$$y = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x).$$

$$k_1 = \alpha + \beta i,\ k_2 = \alpha - \beta i;$$

$$\alpha = -\frac{p}{2}, \qquad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}};$$

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right).$$

Решить самостоятельно:

$$y'' - 4y' + 13y = 0.$$

$$y'' - 4y' + 3y = 0.$$

$$y'' - 6y' + 9y = 0,$$

$$y = 0, \ y' = 1 \text{ при } x = 0.$$

П 2. Линейные неоднородные уравнения 2 порядка с постоянными коэффициентами

Для того чтобы научиться Линейные неоднородные уравнения 2 порядка с постоянными коэффициентами необходимо хорошо научиться хорошо решать Линейные однородные уравнения 2 порядка с постоянными коэффициентами, так как решение неоднородных уравнений 2 порядка с постоянными коэффициентами основывается на решении аналогичных однородных уравнений.

В каком виде искать частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами $y'' + py' + qy = f(x)$?

Y

Сводная таблица

I. Характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня, отличных от нуля.

Пример: Рассмотрим неоднородное уравнение $y'' + y' - 2y = f(x)$
Для соответствующего однородного уравнения $y'' + y' - 2y = 0$ составим характеристическое уравнение $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ и найдём его корни: $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1$

Итак, получены различные действительные корни, среди которых нет нуля.

Правая часть $f(x)$	**В каком виде нужно искать частное решение** $\tilde{y}$ **неоднородного уравнения?**
1. $f(x) = 4$ (или другая ненулевая константа)	$\tilde{y} = A$
2. $f(x) = 3x - 1$	$\tilde{y} = Ax + B$
3. $f(x) = x^2 - x$	$\tilde{y} = Ax^2 + Bx + C$
4. $f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 1$	$\tilde{y} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$

Примечание: обратите внимание, что когда в правой части $f(x)$ находится неполный многочлен, то частное решение подбирается без пропусков степеней, пример: $f(x) = -5x$
Это многочлен первой степени, и в нём отсутствует константа. Однако при подборе частного решения константу пропускать нельзя, то есть частное решение необходимо искать в виде $\tilde{y} = Ax + B$

5. $f(x)=2e^{3x}$	Коэффициент в показателе экспоненты: $e^{\boxed{3}x}$ <u>не совпадает</u> с корнем характеристического уравнения $\lambda_1=-2$ или $\lambda_2=1$ Подбор выполняем очевидным образом: $\tilde{y}=Ae^{3x}$
6. $f(x)=(2x-3)e^{-x}$	Коэффициент в показателе экспоненты: $e^{\boxed{-1}\cdot x}$ <u>не совпадает</u> с корнем характеристического уравнения $\lambda_1=-2$ или $\lambda_2=1$ Подбор выполняем очевидным образом: $\tilde{y}=(Ax+B)e^{-x}$
7. $f(x)=\frac{x}{2}e^{-2x}$	Коэффициент в показателе экспоненты: $e^{\boxed{-2}x}$ **совпал** с корнем характеристического уравнения $\lambda_1=-2$. В подобной ситуации «штатный» подбор $\tilde{y}=(Ax+B)e^{-2x}$ нужно домножить на «икс»: $\tilde{y}=x(Ax+B)e^{-2x}$, то есть, искать частное решение в виде: $\tilde{y}=(Ax^2+Bx)e^{-2x}$
8. $f(x)=e^{x}$	Коэффициент в показателе экспоненты: $e^{\boxed{1}\cdot x}$ **совпал** с корнем характеристического уравнения $\lambda_2=1$. Аналогично: «штатный» подбор $\tilde{y}=Ae^{x}$ домножаем на «икс»: $\tilde{y}=x\cdot Ae^{x}$, то есть ищем частное решение в виде: $\tilde{y}=Axe^{x}$

Примечание: обратите внимание, что опять же в случае неполных многочленов <u>степени не теряются</u>, например, если $f(x)=7x^2e^{5x}$ (в многочлене отсутствует «икс» в первой степени и константа), то частное решение следует искать в виде $\tilde{y}=(Ax^2+Bx+C)e^{5x}$.
Если $f(x)=(1-x^2)e^{-2x}$ (в многочлене отсутствует «икс» в первой степени), то частное решение ищем в виде $\tilde{y}=x(Ax^2+Bx+C)e^{-2x}=(Ax^3+Bx^2+Cx)e^{-2x}$

9. $f(x)=\sin x$	$\tilde{y}=A\cos x+B\sin x$
10. $f(x)=-3\cos 2x$	$\tilde{y}=A\cos 2x+B\sin 2x$
11. $f(x)=2\cos 3x-4\sin 3x$	$\tilde{y}=A\cos 3x+B\sin 3x$
Примечание: в подборе частного решения **всегда должен присутствовать <u>и синус и косинус</u>** (даже если в правую часть $f(x)$ входит **только** синус или **только** косинус). Редко, но встречаются следующие похожие случаи:	
12. $f(x)=-x\sin 5x$	$\tilde{y}=(Ax+B)\cos 5x+(Cx+D)\sin 5x$
13. $f(x)=(x-1)\cos\frac{x}{2}$	$\tilde{y}=(Ax+B)\cos\frac{x}{2}+(Cx+D)\sin\frac{x}{2}$
14. $f(x)=x\cos x+2\sin x$	$\tilde{y}=(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x$
И заключительные примеры, здесь тоже всё прозрачно:	
15. $f(x)=2e^x\sin 2x$	$\tilde{y}=e^x(A\cos 2x+B\sin 2x)$
16. $f(x)=\frac{1}{3}e^{-3x}\sin x$	$\tilde{y}=e^{-3x}(A\cos x+B\sin x)$
17. $f(x)=e^{-2x}(5\sin 3x-\cos 3x)$	$\tilde{y}=e^{-2x}(A\cos 3x+B\sin 3x)$
Примечание: в примерах 15-17 хоть и есть экспонента, но корни характеристического уравнения $\lambda_1=-2, \lambda_2=1$ нас уже совершенно не волнуют – подбор частного решения идёт штатным образом без всяких домножений на «икс».	

II. Характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня, один из которых равен нулю.

Такой диффур имеет вид $y'' + py' = f(x)$.
Пример: Рассмотрим подопытное неоднородное уравнение $y'' + 3y' = f(x)$.
Для соответствующего однородного уравнения $y'' + 3y' = 0$ составим характеристическое уравнение $\lambda^2 + 3\lambda = 0$ и найдем его корни: $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 0$

Получены различные действительные корни, один из которых равен нулю.

Правая часть $f(x)$	**В каком виде нужно искать частное решение** $\tilde{y}$ **неоднородного уравнения?**
Правило: Если в правой части $f(x)$ находится ненулевая константа или многочлен, и один из корней характеристического уравнения равен нулю, то «очевидный» подбор частного решения необходимо домножить на «икс»:	
18. $f(x) = -10$	$\tilde{y} = x \cdot A$, то есть частное решение ищем в виде $\tilde{y} = Ax$
19. $f(x) = -2x$	$\tilde{y} = x \cdot (Ax + B)$, т.е. частное решение ищем в виде $\tilde{y} = Ax^2 + Bx$
20. $f(x) = x^2 + 3$	$\tilde{y} = x \cdot (Ax^2 + Bx + C)$ или $\tilde{y} = (Ax^3 + Bx^2 + Cx)$
21. $f(x) = x^3$	$\tilde{y} = x \cdot (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)$ или $\tilde{y} = (Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx)$
Если **в правую часть входит экспонента или экспонента, умноженная на многочлен**, то подбор частного решения следует проводить по тем же принципам, по которым он проведён в примерах № 5-8. На всякий случай еще пара примеров:	

22. $f(x)=(x^2+2x)e^{3x}$	Коэффициент в показателе экспоненты: $e^{\boxed{3}x}$ <u>не совпадает</u> с корнем характеристического уравнения $\lambda_1=-3$ $\tilde{y}=(Ax^2+Bx+C)e^{3x}$
23. $f(x)=(1-x)e^{-3x}$	Коэффициент в показателе экспоненты: $e^{\boxed{-3}x}$ **совпал** с корнем характеристического уравнения $\lambda_1=-3$. Поэтому «обычный» подбор $\tilde{y}=(Ax+B)e^{-3x}$ нужно домножить на «икс»: $\tilde{y}=x(Ax+B)e^{-3x}$, то есть, искать частное решение в виде: $\tilde{y}=(Ax^2+Bx)e^{-3x}$
Если правая часть $f(x)$ имеет вид из примеров № 9-17, то подбор осуществляется точно так же, как уже разобрано – в штатном режиме см. <u>Раздел I</u>.	

Дополнительный пример:

Рассмотрим дифференциальное уравнение третьего порядка: $y'''-y''=f(x)$. Для соответствующего однородного уравнения $y'''-y''=0$ составим характеристическое уравнение $\lambda^3-\lambda^2=0$ и найдем его корни: $\lambda_{1,2}=0, \lambda_3=1$.

Если получено **два кратных нулевых корня и в правой части** $f(x)$ **находится многочлен** (аналогично примерам № 18-21), то «штатный» подбор нужно домножать уже на x^2.
Например, если $f(x)=3x$, то частное решение следует искать в виде:
$\tilde{y}=x^2\cdot(Ax+B)=(Ax^3+Bx^2)$

III. Характеристическое уравнение имеет два кратных действительных корня

Если эти корни равны нулю $\lambda_{1,2} = 0$, то речь идёт об уравнении $y'' = f(x)$

Если же корни ненулевые, то выполняем подбор.

Пример: Рассмотрим неоднородное уравнение $y'' - 4y' + 4y = f(x)$.
Для соответствующего однородного уравнения $y'' - 4y' + 4y = 0$ составим характеристическое уравнение $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ и найдем его корни: $\lambda_{1,2} = 2$

Получены кратные (совпавшие) действительные корни

Правая часть $f(x)$	**В каком виде нужно искать частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения?**
$f(x)$ – ненулевая константа или многочлен	Если $\lambda_{1,2} \neq 0$, то подбор частного решения следует осуществлять «штатным» способом точно так же, как в примерах № 1-4; если $\lambda_{1,2} = 0$, то «очевидный» подбор следует домножить на x^2 либо дважды проинтегрировать правую часть.
24. $f(x) = 5e^x$	Коэффициент в показателе экспоненты: $e^{\boxed{1}x}$ не совпадает с кратным корнем характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = 2$ $\tilde{y} = Ae^x$

25. $f(x)=-2e^{2x}$	Коэффициент в показателе экспоненты: $e^{\boxed{2}x}$ **совпал** с кратным корнем характеристического уравнения $\lambda_{1,2}=2$. Поэтому очевидный подбор $\tilde{y}=Ae^{2x}$ следует домножить на x^2: $\tilde{y}=x^2\cdot Ae^{2x}$ и искать частное решение в виде: $\tilde{y}=Ax^2e^{2x}$
26. $f(x)=(5x-1)e^{2x}$	Коэффициент в показателе экспоненты: $e^{\boxed{2}x}$ **совпал** с кратным корнем характеристического уравнения $\lambda_{1,2}=2$. Поэтому «штатный» подбор $\tilde{y}=(Ax+B)e^{2x}$ следует домножить на x^2: $\tilde{y}=x^2\cdot(Ax+B)e^{2x}$, то есть искать частное решение в виде: $\tilde{y}=(Ax^3+Bx^2)e^{2x}$
Если правая часть $f(x)$ имеет вид из примеров № 9-17, то подбор осуществляется обычным образом	

IV. Характеристическое уравнение имеет сопряженные комплексные корни: $\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i$, причём $\alpha\neq 0, \beta\neq 0$

Пример: Рассмотрим неоднородное уравнение $y''+6y'+10y=f(x)$.
Для соответствующего однородного уравнения $y''+6y'+10y=0$ составим характеристическое уравнение $\lambda^2+6\lambda+10=0$ и найдем его корни: $\lambda_{1,2}=-3\pm i$
Получены сопряженные комплексные корни с ненулевой действительной частью α.

Правая часть $f(x)$	**В каком виде нужно искать частное решение $\widetilde{y}$ неоднородного уравнения?**
Подбор частного решения осуществляется очевидным образом (см. примеры № 1-6, 9-14) за исключением следующих видов правой части:	
27. $f(x)=2e^{-3x}\sin 2x$	Проще всего объяснить так, берём правую часть и составляем сопряженные комплексные числа: $2e^{-3x}\sin 2x$ $-3\pm 2i$ Полученные сопряженные комплексные числа $-3\pm 2i$ <u>не совпадают</u> с корнями характеристического уравнения $\lambda_{1,2}=-3\pm i$, поэтому частное решение следует искать в обычном виде: $\widetilde{y}=e^{-3x}(A\cos 2x+B\sin 2x)$
28. $f(x)=2e^{-3x}\cos x$	Составляем сопряженные комплексные числа: $2e^{-3x}\cos(1\cdot x)$ $-3\pm 1\cdot i$ Составленные сопряженные комплексные числа $-3\pm i$ **совпали** с корнями характеристического уравнения $\lambda_{1,2}=-3\pm i$, поэтому «обычный» подбор частного решения следует домножить на «икс»: $\widetilde{y}=x\cdot e^{-3x}(A\cos x+B\sin x)$ или: $\widetilde{y}=e^{-3x}(Ax\cos x+Bx\sin x)$

29. $f(x)=e^{x}(5\cos x-3\sin x)$	$e^{1x}(5\cos(1\cdot x)-3\sin(1\cdot x))$ $1\pm 1\cdot i$ Составленные сопряженные комплексные числа $1\pm i$ <u>не совпадают</u> с корнями характеристического уравнения $\lambda_{1,2}=-3\pm i$, поэтому частное решение ищем в виде: $\tilde{y}=e^{x}(A\cos x+B\sin x)$
30. $f(x)=e^{-3x}(-\cos x+2\sin x)$	$e^{-3x}(-\cos(1\cdot x)+2\sin(1\cdot x))$ $-3\pm 1\cdot i$ Составленные сопряженные комплексные числа $-3\pm i$ **совпали** с корнями $\lambda_{1,2}=-3\pm i$, поэтому: $\tilde{y}=x\cdot e^{-3x}(A\cos x+B\sin x)=e^{-3x}(Ax\cos x+Bx\sin x)$

ИТОГ

Тип корней характеристического уравнения	**Когда следует проявить ПОВЫШЕННОЕ ВНИМАНИЕ при подборе частного решения**
I. Характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня, отличных от нуля	Если в правой части $f(x)$ находится экспонента или экспонента, умноженная на многочлен (примеры 5-8)
II. Характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня, один из которых равен нулю	Если в правой части $f(x)$ находится константа, многочлен, экспонента или экспонента, умноженная на многочлен (примеры 18-23)
III. Характеристическое уравнение имеет два кратных действительных корня	Если в правой части $f(x)$ находится экспонента или экспонента, умноженная на многочлен (примеры 24-26)
IV. Характеристическое уравнение имеет сопряженные комплексные корни: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, причём $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$	Если в уравнении есть правые части, разобранные в примерах 27-30: $f(x) = 2e^{-3x}\sin 2x$, $f(x) = 2e^{-3x}\cos x$, $f(x) = e^{x}(5\cos x - 3\sin x)$ и т.п.

Алгоритм решения неоднородного ДУ следующий:

1) Сначала нужно найти общее решение соответствующего однородного уравнения. Да-да, взять уравнение $y'' + py' + qy = f(x)$, откинуть правую часть: $y'' + py' + qy = 0$ – и найти общее решение. Данная задача подробно разобрана на уроке Однородные уравнения второго и высших порядков. Общее решение однородного уравнения будем обозначать буквой Y.

2) Необходимо найти какое-либо частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения. Сделать это можно так называемым способом подбора частного решения с применением метода неопределенных коэффициентов.

3) На третьем этапе надо составить общее решение y неоднородного уравнения. Это совсем легко: $y = Y + \tilde{y}$.

Если изначально в условии сформулирована *задача Коши* (найти частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям), то добавляется четвёртый этап:

4) Нахождение частного решения, удовлетворяющего заданным начальным условиям. Порядок нахождения частного решение для уравнения второго порядка уже немного рассмотрен на уроке Однородные уравнения второго и высших порядков. В случае с неоднородным диффуром принципы нахождения частного решения сохраняются.

Пример 1

Найти общее решение дифференциального уравнения.

$y'' - 4y = 8x^3$

Решение:
1) Сначала найдем общее решение соответствующего однородного уравнения. Берём наш неоднородный диффур $y'' - 4y = 8x^3$ и обнуляем правую часть:

$y'' - 4y = 0$

Составим и решим характеристическое уравнение:

$\lambda^2 - 4 = 0$

$(\lambda + 2)(\lambda - 2) = 0$

$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 2$ – получены различные действительные корни, поэтому общее решение:

$Y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}, \ \textit{где}\ C_1, C_2 - const$

2) Теперь нужно найти какое-либо частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения

$y'' - 4y = 8x^3$

И вопрос, который вызывает затруднения чаще всего: **В каком виде нужно искать частное решение $\tilde{y}$?**

Прежде всего, смотрим на нашу правую часть: $f(x)=8x^3$. Тут у нас многочлен третьей степени. По идее, частное решение тоже следует искать в виде многочлена третьей степени: $\tilde{y}=Ax^3+Bx^2+Cx+D$, где A,B,C,D – *пока ещё* неизвестные коэффициенты (числа). Образно говоря, нужно посмотреть на правую часть неоднородного уравнения и переписать её, но уже с неопределёнными коэффициентами.

После предварительного анализа смотрим на корни характеристического уравнения $\lambda_1=-2,\lambda_2=2$, найденные на предыдущем этапе: это различные действительные корни, отличные от нуля.

В методическом материале Как подобрать частное решение неоднородного уравнения? данному случаю соответствует Раздел I. Анализируя примеры № 1-4 справки, приходим к выводу, что, да, действительно – частное решение неоднородного уравнения нужно искать в виде:

$$\tilde{y}=Ax^3+Bx^2+Cx+D$$

После правильно выбранного подбора алгоритм продолжим. Используем метод неопределенных коэффициентов.

Найдём первую и вторую производную:

$$\tilde{y}' = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)' = 3Ax^2 + 2Bx + C$$

$$\tilde{y}'' = (3Ax^2 + 2Bx + C)' = 6Ax + 2B$$

Подставим $\tilde{y}$ и $\tilde{y}''$ в левую часть неоднородного уравнени:

$$\tilde{y}'' - 4\tilde{y} = 6Ax + 2B - 4(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) \overset{(1)}{=}$$

$$= 6Ax + 2B - 4Ax^3 - 4Bx^2 - 4Cx - 4D \overset{(2)}{=} 8x^3$$

Далее работаем с последним равенством – необходимо **приравнять коэффициенты при соответствующих степенях и составить систему линейных уравнений**. В картинках процесс выглядит так:

$$6Ax + 2B - 4Ax^3 - 4Bx^2 - 4Cx - 4D = 8x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0$$

$$\begin{cases} -4A = 8 \\ -4B = 0 \\ 6A - 4C = 0 \\ 2B - 4D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = 0 \\ C = -3 \\ D = 0 \end{cases}$$

Чтобы было еще проще, новичкам рекомендую предварительно сгруппировать подобные слагаемые:

$6Ax + 2B - 4Ax^3 - 4Bx^2 - 4Cx - 4D = -4Ax^3 - 4Bx^2 + (6A - 4C)x + (2B - 4D) = 8x^3$, и только потом составлять систему.

В данном случае система получилась очень простой, и многие из читателей справятся с ней даже устно.

Подставляем найденные значения A, B, C, D в наш исходный подбор частного решения $\tilde{y} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$:

$\tilde{y} = -2x^3 + 0 \cdot x^2 - 3x + 0 = -2x^3 - 3x$

Таким образом, подобранное частное решение неоднородного уравнения:

$\tilde{y} = -2x^3 - 3x$

3) Запишем общее решение неоднородного уравнения:

$y = Y + \tilde{y} = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x} - 2x^3 - 3x,\ где\ \ C_1, C_2 - const$

Ответ: общее решение: $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x} - 2x^3 - 3x,\ где\ \ C_1, C_2 - const$

Пример 2

Найти общее решение неоднородного дифференциального уравнения.

$y'' - 7y' + 12y = 3e^{4x}$

Решение:

1) Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения:

$y'' - 7y' + 12y = 0$

Составим и решим характеристическое уравнение:

$\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$

$D = 49 - 48 = 1; \sqrt{D} = 1$

$$\lambda_{1,2} = \frac{7 \pm 1}{2}$$

$\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 4$ – получены различные действительные корни, среди которых нет нуля, поэтому общее решение: $Y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}$, *где* $C_1, C_2 - const$.

2) Выясняем, в каком виде нужно искать частное решение $\tilde{y}$?

Сначала смотрим на правую часть и выдвигаем первую гипотезу: раз в правой части находится экспонента, умноженная на константу $f(x) = 3e^{4x}$, то частное решение, по идее, нужно искать в виде $\tilde{y} = Ae^{4x}$

Далее смотрим на корни характеристического уравнения $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 4$. Это два действительных корня, среди которых нет нуля. *Данному случаю соответствует Раздел I справочного материала.*

Изучив примеры 5-8 таблицы, приходим к выводу, что наш первоначальный вариант подбора необходимо домножить на «икс». То есть, частное решение дифференциального уравнения следует искать в виде:

$\tilde{y} = x \cdot Ae^{4x} = Axe^{4x}$, где A – *пока еще* неизвестный коэффициент, который предстоит найти.

После того, как подобран корректный вид частного решения, алгоритм работает стандартно. Найдем первую и вторую производную:

$$\tilde{y}' = (Axe^{4x})' = Ae^{4x} + 4Axe^{4x} = (4Ax + A)e^{4x}$$

$$\tilde{y}'' = ((4Ax + A)e^{4x})' = 4Ae^{4x} + 4(4Ax + A)e^{4x} = (16Ax + 8A)e^{4x}$$

Здесь: из последнего равенства $Ae^{4x} = 3e^{4x}$ автоматически получаем $A = 3$.

Найденное значение $A = 3$ подставляем в наш исходный подбор $\tilde{y} = Axe^{4x}$.

Таким образом, частное решение: $\tilde{y} = 3xe^{4x}$

3) Составляем общее решение неоднородного уравнения:

$y = Y + \tilde{y} = C_1e^{3x} + C_2e^{4x} + 3xe^{4x}$, *где* $C_1, C_2 - const$

Ответ: общее решение: $y = C_1e^{3x} + C_2e^{4x} + 3xe^{4x}$, *где* $C_1, C_2 - const$

Пример 3

Найти частное решение неоднородного уравнения, соответствующее заданным начальным условиям.

$y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

Алгоритм решения полностью сохраняется, но в конце добавляется дополнительный пункт.

Решение:

1) Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения:

$y'' - 6y' + 9y = 0$

Характеристическое уравнение:

$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$

$(\lambda - 3)^2 = 0$

$\lambda_{1,2} = 3$

– получены кратные действительные корни, поэтому общее решение:

$Y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$, *где* $C_1, C_2 - const$

2) Выясняем, в каком виде нужно искать частное решение $\tilde{y}$. Правая часть неоднородного уравнения: $f(x) = e^{3x}$, следовательно: $\tilde{y} = Ae^{3x}$.

Далее смотрим на корни характеристического уравнения: $\lambda_{1,2} = 3$ – действительные кратные корни.

Изучая примеры 24-26 справочных материалов, приходим к выводу, что «очевидное» частное решение $\tilde{y} = Ae^{3x}$ необходимо домножить на x^2, то есть, частное решение следует искать в виде:

$$\tilde{y} = Ax^2e^{3x}$$

Ищем неизвестный коэффициент A.

Найдем первую и вторую производную:

$$\tilde{y}' = (Ax^2e^{3x})' = 2Axe^{3x} + 3Ax^2e^{3x} = (3Ax^2 + 2Ax)e^{3x}$$

$$\tilde{y}'' = ((3Ax^2 + 2Ax)e^{3x})' = (6Ax + 2A)e^{3x} + (9Ax^2 + 6Ax)e^{3x} = (9Ax^2 + 12Ax + 2A)e^{3x}$$

Подставим $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$ и $\tilde{y}''$ в левую часть неоднородного уравнения и максимально упростим выражение:

$$\tilde{y}'' - 6\tilde{y}' + 9\tilde{y} = (9Ax^2 + 12Ax + 2A)e^{3x} - 6(3Ax^2 + 2Ax)e^{3x} + 9Ax^2e^{3x} =$$

$$= (9Ax^2 + 12Ax + 2A - 18Ax^2 - 12Ax + 9Ax^2) \cdot e^{3x} = 2Ae^{3x} = e^{3x}$$

В самом конце после упрощений приписываем исходную правую часть e^{3x}.

Из последнего равенства $2Ae^{3x} = e^{3x}$ следует:

$$2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

Таким образом: $\tilde{y} = \frac{1}{2}x^2e^{3x}$.

3) Составим общее решение неоднородного уравнения:

$$y = Y + \tilde{y} = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} + \frac{1}{2}x^2e^{3x}, \text{ где } C_1, C_2 - const$$

4) Найдем частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(0)=0$, $y'(0)=1$

Сначала берём найденное общее решение $y=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}+\frac{1}{2}x^2e^{3x}$ и применяем к нему первое начальное условие $y(0)=0$, получаем:

$$y(0)=C_1e^{3\cdot 0}+C_2\cdot 0\cdot e^{3\cdot 0}+\frac{1}{2}\cdot 0^2\cdot e^{3\cdot 0}=C_1e^0+0+0=C_1$$

Согласно начальному условию: $y(0)=C_1=0$ – получаем первое уравнение.
Далее находим производную от общего решения:

$$y'=\left(C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}+\frac{1}{2}x^2e^{3x}\right)'=3C_1e^{3x}+C_2e^{3x}+3C_2xe^{3x}+xe^{3x}+\frac{3}{2}x^2e^{3x}$$

и применяем к найденной производной второе начальное уравнение $y'(0)=1$:

$$y'(0)=3C_1e^0+C_2e^0+0+0+0=3C_1+C_2$$

Согласно второму начальному условию: $y'(0) = 3C_1 + C_2 = 1$ – получаем второе уравнение.

Составим и решим систему:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 = 0 \\ y'(0) = 3C_1 + C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow C_2 = 1$$

Подставим найденные значения констант $C_1 = 0, C_2 = 1$, в общее решение $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + \frac{1}{2} x^2 e^{3x}$

Ответ: частное решение: $y = x e^{3x} + \frac{1}{2} x^2 e^{3x}$

Контрольные вопросы:

1. Когда линейное дифференциальное уравнение второго порядка будет являться однородным?
2. Как будет называться линейное однородное уравнение второго порядка, если коэффициенты уравнения постоянны?
3. Какое уравнение называется характеристическим?
4. Расскажите, как составляется характеристическое уравнение для линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?
5. Что собой представляет характеристическое уравнение и как его решить?
6. Перечислите, какие случаи могут возникнуть при решении характеристического уравнения.
7. Что собой представляет общее решение для линейного однородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами для случая когда $k_1 \neq k_2$?
8. Какой вид примет общее решение, если корни характеристического уравнения $k_1 = k_2$?
9. Как выглядит общее решение, когда корни характеристического уравнения являются комплексными числами?